

В. Ф. КАГАН

ОСНОВАНИЯ ГЕОМЕТРИИ

**УЧЕНИЕ ОБ ОБОСНОВАНИИ ГЕОМЕТРИИ
В ХОДЕ ЕГО ИСТОРИЧЕСКОГО РАЗВИТИЯ**

**ЧАСТЬ ПЕРВАЯ
ГЕОМЕТРИЯ ЛОБАЧЕВСКОГО
И ЕЕ ПРЕДИСТОРИЯ**

**ПРИ РЕДАКЦИОННОМ УЧАСТИИ
Я. С. ДУБНОВА**

**ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
ТЕХНИКО-ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1949 ЛЕНИНГРАД**

Редактор *И. Н. Бронштейн*

Техн. редактор *С. Н. Ахламов*
Корректор *С. Н. Емельянова*

Подписано к печати 24/XI 1949 г., 30,75 печ. л., 44,47 уч.-изд. л., 58 816 тип. зн. в 1 печ. л.
А-15801. Тираж 10 000. Заказ № 1639. Цена книги 15 р. 50 к. Переплет 2 р.

16-я типография Главполиграфиздата при Совете Министров СССР. Москва, Трехпрудный, 9.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	11
Введение	15
1. Задача учения об основаниях геометрии (15). 2. Возникновение задачи логического обоснования геометрии в Греции (18). 3. Высказывания Платона (19). 4. Аристотель как основоположник дедуктивной школы (21). 5. Учение о категориях и об истолковании суждений (22). 6. Аналитики Аристотеля (24). 7. После Аристотеля (26).	
ГЛАВА ПЕРВАЯ	
ЕВКЛИД, ЕГО ПРОДОЛЖАТЕЛИ И КОММЕНТАТОРЫ	
§ 1. Евклид и его «Начала»	28
1. Сведения о личности Евклида (28). 2. Текст «Начал» (29). 3. Схолии (30). 4. Проникновение «Начал» за пределы Греции и Византии (30). 5. Печатные издания «Начал» (31). 6. Школьные издания «Начал» (32). 7. Новейшие издания «Начал» (34). 8. Русские издания «Начал» (34). 9. Другие сочинения Евклида (35).	
§ 2. Общий обзор содержания и строения «Начал»	37
1. Значение заглавия «Начала» (37). 2. Структура «Начал» (38).	
§ 3. Исходные положения «Начал»	40
1. Определения, предшествующие первой книге (40). 2. Постулаты (43). 3. Аксиомы (44).	
§ 4. Первая половина первой книги «Начал». Учение об отрезках, углах и треугольниках	45
1. Вступление (45). 2. Предложения I. 1—3. Три основные задачи (46). 3. Предложения I. 4—6. Первый признак равенства треугольников. Основное свойство равнобедренного треугольника и его обращение (48). 4. Предложения I. 7, 8. Второй признак равенства треугольников (52). 5. Предложения I. 9—15. Конструктивные задачи; основные свойства смежных и вертикальных углов (54). 6. Предложения I. 16—19. Теорема о внешнем угле треугольника и ее следствия (54). 7. Предложения I. 20, 21. Сравнение длин прямой и ломаной, проходящих между теми же двумя конечными точками (54). 8. Предложения I. 22, 23. Еще две основные задачи на построение (55). 9. Предложения I. 24—26. Соотношения между сторонами и углами в двух треугольниках; третий признак равенства треугольников (55).	
§ 5. Вторая половина первой книги «Начал». Теория параллельных линий	56
1. Предложения I. 27, 28. Достаточные условия параллельности двух прямых (56). 2. Постулат о параллельных линиях (58). 3. Абсолютная и собственно евклидова геометрия. Предложение I. 29 (58). 4. Предложения I. 30—34. Евклидова теория параллельных линий (59). 5. Предложения I. 35—45. Учение о равновеликих параллелограммах, треугольниках и многоугольниках (60). 6. Предложения I. 46—48. Теорема Пифагора (60). 7. Общий обзор содержания первой книги «Начал» (60).	
§ 6. Вторая книга «Начал». Геометрическая алгебра Евклида	62
1. Геометрическая алгебра (62). 2. Предложения II. 1—4. Основные геометрические тождества (63). 3. Предложение II. 5. Гномон (65).	

4. Геометрическое решение квадратного уравнения (66). 5. Преобразование прямоугольника в равновеликий квадрат (67). 6. Обзор второй книги «Начал» (68).	
§ 7. Третья и четвертая книги «Начал». Учение об окружности, вписанных и описанных многоугольниках	69
1. Предложения III. 1—19. Окружность, ее хорды, секущие и касательные (69). 2. Предложения III. 20—34. Об углах, вписанных в окружность и описанных около нее (70). 3. Предложения III. 35—37. Соотношения между отрезками хорд, секущих и касательных, проходящих через общую точку (71). 4. Обзор содержания третьей книги «Начал» (71). 5. Четвертая книга «Начал» (72).	
§ 8. Пятая и шестая книги «Начал». Учение о пропорциональности и подобии фигур	73
1. Постановка задачи (73). 2. Замысел теории пропорциональности Евдокса-Евклида (74). 3. Тот же результат с точки зрения современной нам теории пропорций (76). 4. Определение пропорциональности по Евдоксу-Евклиду (76). 5. Отношение двух значений величины (77). 6. Анализ определения отношения (78). 7. Аксиоматическое определение (80). 8. Добавочное замечание (81). 9. Учение о подобии (81). 10. Общее учение о площадях параллелограмов и треугольников (83).	
§ 9. Седьмая—десятая книги «Начал» и учение об иррациональных величинах. Арифметика Евклида	84
1. Арифметические книги «Начал» (84). 2. Краткие сведения о десятой книге «Начал» (84). 3. Алгебра соизмеримых и несоизмеримых величин (86).	
§ 10. Одиннадцатая—тринадцатая книги «Начал». Заключительный обзор «Начал»	87
1. Стереометрические книги «Начал» (87). 2. Двенадцатая книга «Начал». Применение метода исчерпывания (88). 3. Тринадцатая книга «Начал». Учение о правильных многогранниках (89). 4. Заключительный обзор «Начал» (89).	
§ 11. Продолжатели Евклида	91
1. Четырнадцатая и пятнадцатая книги «Начал» (91). 2. Архимед (92). 3. Текст сочинений Архимеда (93). 4. Содержание геометрических сочинений Архимеда (93). 5. Аксиоматика Архимеда (95). 6. Аполлоний Пергский (96). 7. Эратосфен Киренский (97).	
§ 12. Комментаторы Евклида	98
1. Греческие комментаторы Евклида (98). 2. Средневековые комментаторы Евклида (101). 3. Комментарии к Евклиду в эпоху Возрождения и после нее (102). 4. Общий обзор комментариев к «Началам» Евклида (103).	
§ 13. Руководства по геометрии, составленные по плану Даламбера	104
1. План Даламбера по реформированию учебной книги по геометрии (104). 2. «Начала» геометрии Безу, Лежандра и Лакруа (107). 3. Определения и аксиомы Лежандра (109).	

ГЛАВА ВТОРАЯ

ПРЕДИСТОРИЯ НЕЕВКЛИДОВОЙ ГЕОМЕТРИИ

§ 14. Попытки доказательства постулата о параллельных линиях	111
1. Постулат о параллельных линиях (V постулат Евклида) (111). 2. Общие соображения о V постулате (112). 3. Постулаты, явно эквивалентные V постулату Евклида (114). 4. Ошибочные доказательства постулата о параллельных (116). 5. Доказательство Прокла (116). 6. Доказательство Насир-Эддина (118). 7. Доказательство Валлиса (123). 8. Доказательства, основанные на другом определении параллельных линий (126). 9. Доказательство Л. Бертрана (128). 10. Попытки доказательств постулата, относящиеся к третьей и четвертой категориям (130).	

§ 15. Постулат о параллельных линиях и учение о сумме углов треугольника	131
1. Сумма внутренних углов треугольника и постулат о параллельных линиях (131). 2. Установки Лежандра (132). 3. Первая основная теорема Лежандра (133). 4. Первая попытка Лежандра доказать постулат о параллельных линиях (134). 5. Вторая попытка Лежандра доказать постулат о параллельных линиях (136). 6. Вторая основная теорема Лежандра (138). 7. Доказательство Лежандра, основанное на принципе однородности (141). 8. Обзор изложенных рассуждений Лежандра (143). 9. Доказательство Картона (143).	
§ 16. Предвосхищение неевклидовой геометрии	145
1. Предшественники Лежандра (145). 2. Исследования Саккери (145). 3. Работы Ламберта (148). 4. Открытие неевклидовой геометрии (151).	
ГЛАВА ТРЕТЬЯ	
НАЧАЛА ГИПЕРБОЛИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ НА ПЛОСКОСТИ	
§ 17. Гиперболическая плоскость и гиперболическое пространство. Параллельные линии в гиперболической плоскости	154
1. Метод изложения (154). 2. Обзор аксиоматики абсолютной геометрии (154). 3. Материал абсолютной геометрии (155). 4. Об окружности, вписанной в треугольник и описанной около него (155). 5. Исходное положение Н. И. Лобачевского (157). 6. Уточнение исходного положения Лобачевского (159). 7. Сумма углов в прямолинейном многоугольнике (160).	
§ 18. Гиперболическая параллель	162
1. Определение гиперболической параллели (162). 2. Различение параллелей (164). 3. Определение ориентированной параллели (165).	
§ 19. Основные свойства параллельных линий в гиперболической плоскости	167
1. Особенности гиперболической параллели (167). 2. Смещение точки параллелизма (167). 3. Взаимность параллелизма (168). 4. Вспомогательные предложения (169). 5. Секущая равного наклона (170). 6. Транзитивность параллелизма (170).	
§ 20. Угол параллельности	172
1. Определение угла параллельности (172). 2. Монотонность функции $\Pi(x)$ (174). 3. Обращение функции $\Pi(x)$ (175). 4. Пределы изменения функции $\Pi(x)$ (177). 5. Соображения, связанные со второй основной теоремой (177). 6. Заметка Швейкарта (178). 7. Угловое и линейное задание отрезка в гиперболической плоскости (179).	
§ 21. Взаимное расположение двух прямых в гиперболической плоскости	179
1. Расхождение прямых (179). 2. Четвертая основная теорема (181). 3. Взаимное расположение двух пересекающихся прямых (182). 4. Загражденные прямые (182). 5. Взаимное расположение двух параллельных прямых (184). 6. Взаимное расположение двух расходящихся прямых (186).	
§ 22. Важнейшие свойства вырожденных треугольников	187
1. Треугольники с бесконечно удаленными вершинами (187). 2. Условия конгруэнтности вырожденных треугольников (190). 3. Окружность, вписанная в вырожденный треугольник (191).	
§ 23. Важнейшие типы четырехугольников в гиперболической плоскости	193
1. Четырехугольники Саккери (193). 2. Равнобокие четырехугольники (193). 3. Двупрямоугольные четырехугольники (194). 4. Трипрямоугольники (195). 5. Гиперболический параллелограмм (196). 6. Теорема Гильберта (198).	
§ 24. Замечательные точки и прямые треугольника	199
1. Биссектрисы внутренних и внешних углов треугольника (199). 2. Серединные перпендикуляры треугольника (201). 3. Точка пересечения высот треугольника (202). 4. Те же теоремы в другой терминологии (204). 5. Теоремы Гельмслева и Шура (205). 6. Два основных построения в гиперболической плоскости (208).	

ГЛАВА ЧЕТВЕРТАЯ

**ПЕРВЫЕ МЕТРИЧЕСКИЕ СООТНОШЕНИЯ
ГИПЕРБОЛИЧЕСКОЙ ПЛОСКОСТИ**

- § 25. Латентные уравнения, связывающие стороны и углы прямоугольного треугольника** **210**
1. Линейное задание углов (210). 2. Первая пара уравнений Лобачевского (211). 3. Вторая пара уравнений Лобачевского (211). 4. Латентные уравнения прямоугольного треугольника (212). 5. Первые два уравнения второй системы (213). 6. Дополнительные отрезки (213). 7. Исследование более общего случая (214). 8. Уравнения трипрямоугольника (217).
- § 26. Группа прямоугольного треугольника** **219**
1. Сопоставление треугольника с трипрямоугольником (219). 2. Цикл Лобачевского (220). 3. Группа прямоугольного треугольника (221). 4. Две системы уравнений прямоугольного треугольника (222). 5. Совокупность трипрямоугольников, соответствующих данному прямоугольному треугольнику (224). 6. *Pentagramma mirificum* (224). 7. Построение отрезка параллельности, соответствующего данному углу, и построение дополнительного отрезка (226).

ГЛАВА ПЯТАЯ

**ПОСТРОЕНИЕ ГЕОМЕТРИИ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОЙ ПЛОСКОСТИ,
НЕ ОПИРАЮЩЕЕСЯ НА ЕЕ НЕПРЕРЫВНОСТЬ**

- § 27. Конструктивные методы построения начал гиперболической геометрии** . . **227**
1. Задача конструктивных методов (227). 2. Решение элементарных задач без помощи постулата о непрерывности (228). 3. Построение прямоугольных треугольников в гиперболической плоскости (230). 4. Построение трипрямоугольника (232). 5. Пересечение прямой и окружности (232).
- § 28. Конструктивное доказательство IV основной теоремы и вытекающих из нее предложений** **232**
1. Постановка вопроса (232). 2. Случай пересекающихся прямых (233). 3. Случай параллельных прямых (233). 4. Построение общего перпендикуляра двух расходящихся прямых (234). 5. Доказательство четвертой основной теоремы для случая расходящихся прямых (235).
- § 29. Построения Гильберта** **235**
1. Постановка задачи (235). 2. Вспомогательное предложение (236). 3. Существование и построение общего перпендикуляра двух расходящихся прямых (237). 4. Общая параллель к сторонам угла (237). 5. Постулат Гильберта (238).

ГЛАВА ШЕСТАЯ

**КРИВЫЕ ПОСТОЯННОЙ КРИВИЗНЫ В ГИПЕРБОЛИЧЕСКОЙ
ПЛОСКОСТИ**

- § 30. Пучок прямых и его траектории** **240**
1. Определение пучка прямых в гиперболической плоскости (240). 2. Соответственные точки на лучах пучка (241). 3. Траектория пучка (243).
- § 31. Эквидистантные линии** **244**
1. Кривые постоянной кривизны в гиперболической плоскости (244). 2. Эквидистанта (245). 3. Пересечение эквидистанты прямой линией (245). 4. Длина дуги эквидистанты (246).
- § 32. Предельные линии** **247**
1. Определение предельной линии (247). 2. Важнейшие свойства предельной линии (248). 3. Элементы, определяющие предельную линию и ее части (252). 4. Предельная линия как окружность с бесконечно удаленным центром (254). 5. Параллельные предельные линии (255).
- § 33. Кривые постоянной кривизны** **257**
1. Три типа кривых постоянной кривизны (257). 2. Кривые постоянной кривизны, проходящие через три данные точки (257). 3. Кривые постоянной кривизны, касающиеся трех прямых (258). 4. Измерение

прямолинейных отрезков (259). 5. Измерение дуг окружности (259). 6. Измерение дуг эквидистанты (261). 7. Основная дуга предельной линии (262). 8. Тангенциальное и нормальное протяжения предельной дуги (262). 9. Измерение предельной дуги (264). 10. Типы кривых постоянной кривизны (266). 11. Классификация смещений плоскости в самой себе (268).

§ 34. Преобразование Либмана 269

1. Определение преобразования Либмана (269). 2. Преобразование прямой, расходящейся с осью (270). 3. Преобразование прямой, параллельной оси (271). 4. Преобразование прямой, пересекающей ось (272). 5. Геометрические построения, осуществляемые при помощи преобразования Либмана (273). 6. Условия взаимного пересечения двух окружностей гиперболической плоскости (275). 7. Взаимное расположение двух прямых, расходящихся с третьей (276).

ГЛАВА СЕДЬМАЯ

ТРИГОНОМЕТРИЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОЙ ПЛОСКОСТИ И ИЗМЕРЕНИЕ ПЛОЩАДЕЙ ПРЯМОЛИНЕЙНЫХ ФИГУР

§ 35. Первое основное метрическое соотношение в гиперболической плоскости и тригонометрические уравнения прямоугольного треугольника . . . 279

1. Постоянная гиперболической плоскости (279). 2. Уравнение, связывающее тангенциальное и нормальное протяжения предельной дуги (281). 3. Соотношение, связывающее длину предельной дуги с ее высотой (282). 4. Определение длины дуги предельной линии (283). 5. Задача тригонометрии прямолинейного прямоугольного треугольника (284). 6. Вывод двух явных (нелатентных) уравнений прямоугольного треугольника (284). 7. Вывод полной системы уравнений прямоугольного треугольника (286). 8. Аналитическое выражение соотношения, связывающего дополнительные отрезки (287). 9. Освобождение найденных уравнений от дополнительных отрезков (288). 10. Общие уравнения прямолинейного треугольника (289).

§ 36. Второе основное соотношение в гиперболической плоскости и другие формы уравнений треугольника. 291

1. Соотношение между значениями угла, выраженными в линейной и дуговой мере (291). 2. Второе основное уравнение в гиперболической плоскости (294). 3. Вторая форма уравнений прямоугольного треугольника (295). 4. Третья форма уравнений прямоугольного треугольника (296). 5. Задание прямоугольного треугольника его острыми углами (298). 6. Выражение общей теоремы косинусов прямолинейного треугольника через функцию $\Pi(x)$ (298). 7. Обзор установленных уравнений прямолинейной тригонометрии (299).

§ 37. Теорема сложения 300

1. Предварительные соображения (300). 2. Теорема сложения (300). 3. Формулы умножения и деления аргумента (302). 4. Соотношения, связывающие хорду, основание и высоту предельной дуги (302).

§ 38. Тригонометрия четырехугольника 303

1. Соотношения, связывающие стороны трипрямоугольника с его главной диагональю (303). 2. Уравнения, связывающие основания трипрямоугольника с его высотами (304). 3. Два вспомогательных уравнения (305). 4. Вычисление острого угла трипрямоугольника (305). 5. Вывод остальных уравнений трипрямоугольника (305). 6. Тригонометрические соотношения в равнобедренном трипрямоугольнике (306). 7. Соотношения в четырехугольнике Саккери (307). 8. Соотношения в четырехугольнике с двумя прямыми углами (308). 9. Специальное вычисление (309).

§ 39. Измерение длин кривых постоянной кривизны 310

1. Длина окружности (310). 2. Длина дуги эквидистанты (311).

§ 40. Теоремы Менелая и Чевы	312
1. Прямоугольные треугольники, имеющие общий угол (312). 2. Теорема Менелая (313). 3. Прямоугольные треугольники, имеющие общую гипотенузу (314). 4. Теорема, двойственная теореме Менелая (314). 5. Теорема Чевы (315). 6. Теоремы, обратные теореме Менелая и Чевы (315).	
§ 41. Измерение площадей прямолинейных фигур	316
1. Постановка задачи (316). 2. Вспомогательные предложения (317). 3. Основная теорема в учении об измерении площадей (319). 4. Выражение площади прямоугольного треугольника через его стороны (321). 5. Площадь вырожденного треугольника (322). 6. Вывод площади треугольника, предложенный Гауссом (323). 7. Площадь многоугольника (324). 8. Теорема Шатуновского (325).	
ГЛАВА ВОСЬМАЯ	
НАЧАЛА АНАЛИТИЧЕСКОЙ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ НА ГИПЕРБОЛИЧЕСКОЙ ПЛОСКОСТИ	
§ 42. Начала аналитической геометрии	327
1. Две системы декартовых координат (327). 2. Полярные координаты (328). 3. Расстояние между двумя точками (329). 4. Бельтрамиевы координаты (329). 5. Расстояние между двумя точками в бельтрамиевых координатах (330). 6. Явное выражение расстояния между двумя точками через бельтрамиевы координаты этих точек (331). 7. Уравнение прямой (332). 8. Приведение линейного уравнения прямой к нормальному виду (333). 9. Бельтрамиевы координаты прямой (334). 10. Расстояние точки от прямой (335). 11. Точка пересечения двух прямых (336). 12. Вычисление угла между двумя прямыми (336). 13. Разыскание общего перпендикуляра к двум прямым (338). 14. Взаимное расположение трех прямых на гиперболической плоскости (339). 15. Однородные координаты в гиперболической плоскости (340).	
§ 43. Уравнения кривых постоянной кривизны	341
1. Уравнение окружности (341). 2. Уравнение предельной линии (342). 3. Уравнение эквидистанты (344). 4. Кривые постоянной кривизны как кривые второго порядка (344).	
§ 44. Тригонометрические соотношения в бесконечно малом треугольнике	345
1. Значения тригонометрических функций угла параллельности при весьма малых значениях аргумента (345). 2. Тригонометрические соотношения в треугольниках с весьма малыми сторонами (345). 3. Задача Гаусса (347). 4. Вспомогательные функции (347). 5. Дифференциальные соотношения в прямоугольном треугольнике (348). 6. Общие уравнения, связывающие элементы прямоугольного треугольника (349). 7. Первое дифференциальное уравнение, связывающее функции $f(x)$ и $g(x)$ (351). 8. Вспомогательная формула (352). 9. Второе дифференциальное уравнение (354). 10. Разыскание функций $f(x)$ и $g(x)$ (355). 11. Три системы тригонометрии (356).	
§ 45. Основная метрическая форма гиперболической плоскости	358
1. Дифференциал угла параллельности (358). 2. Выражение элемента длины в декартовых координатах (358). 3. Другой вывод выражения метрической формы (359). 4. Вычисление длины кривой (360). 5. Выражение основной метрической формы в полярных координатах (362). 6. Выражение основной метрической формы в бельтрамиевых координатах (363). 7. Выражение элемента дуги на либмановой карте гиперболической плоскости (364). 8. Орициклические координаты в гиперболической плоскости (365). 9. Риманово выражение элемента длины в пространстве постоянной кривизны (366).	
§ 46. Вычисление площадей в гиперболической плоскости	368
1. Выражение элемента площади в гиперболической плоскости (368). 2. Вычисление площади четырехугольника Саккери с бесконечно малыми основаниями (369). 3. Вычисление площади трипрямоугольника (370). 4. Вычисление площади, содержащейся между дугой эквидистанты и ее базисом (371). 5. Вычисление площади сегмента предельной линии (372). 6. Вычисление площади в полярных координатах (373).	

ГЛАВА ДЕВЯТАЯ

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ПОСТРОЕНИЯ В ГИПЕРБОЛИЧЕСКОЙ ПЛОСКОСТИ

- § 47. Начала общей теории геометрических построений в гиперболической плоскости 375
1. Связанные отрезки (375). 2. Теорема Д. Д. Мордухай-Болтовского о геометрических построениях в гиперболической плоскости (H_2), осуществляемых циркулем и линейкой (376). 3. Замена тригонометрических функций угла гиперболическими функциями отрезка (378). 4. Построение целых гиперболических выражений (379). 5. Пропорциональность в гиперболической плоскости (380). 6. Построение рациональных многочленов с дробными коэффициентами (383). 7. Построение в гиперболической плоскости иррациональных выражений (385). 8. Обратная теорема (387).
- § 48. Классические построения в гиперболической плоскости 389
1. Трисекция угла (389). 2. Трисекция отрезка (389). 3. Деление предельной дуги на равные части (390). 4. Задача о делении окружности (391). 5. Построение правильного многоугольника, описанного около данной окружности (392). 6. Квадратура круга в гиперболической плоскости (392). 7. Осуществление квадратуры круга (394). 8. Построение треугольника по трем углам (395). 9. Построения в гиперболической плоскости, осуществляемые более широким комплексом инструментов (399). 10. Решение циркулем и линейкой всех конструктивных задач, осуществляемых вычерчиванием кривых постоянной кривизны (403).

ГЛАВА ДЕСЯТАЯ

ОСНОВЫ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ В ПРОСТРАНСТВЕ

- § 49. Расположение прямых и плоскостей в гиперболическом пространстве . . 404
1. Стереометрические предложения абсолютной геометрии (404). 2. Параллельные прямые в гиперболическом пространстве (406). 3. Прямые в пространстве, связанные между собой (407). 4. Прямая, параллельная плоскости (409). 5. Конус параллелей (410). 6. Пересекающиеся плоскости в гиперболическом пространстве (412). 7. Параллельные плоскости (413). 8. Расходящиеся плоскости (414). 9. Заключительная теорема абсолютной геометрии (415).
- § 50. Связки прямых 415
1. Связки прямых и их классификация (415). 2. Соответственные точки на прямых связки (416). 3. Связка прямых, как инвариант движения (418). 4. Поверхности уровня связки (418). 5. Сечение поверхности уровня связки плоскостью, проходящей через ось (419). 6. Сферы и эквидистантные поверхности (419). 7. Предельная поверхность (422).
- § 51. Поверхности, допускающие свободное движение в себе, и их геометрии . 424
1. Поверхности, допускающие свободное движение в себе (424). 2. Установление всех поверхностей гиперболического пространства, допускающих свободное движение в себе (425). 3. Внутренняя геометрия поверхности (426). 4. Внутренняя геометрия сферы (428). 5. Внутренняя геометрия эквидистантной поверхности в гиперболическом пространстве. Постулаты абсолютной геометрии (428). 6. Внутренняя геометрия эквидистантной поверхности; постулат о параллельных линиях (431). 7. Сумма углов в геодезическом треугольнике эквидистантной поверхности (431). 8. Геодезические линии эквидистантной поверхности (431). 9. Гиперболическая постоянная эквидистантной поверхности (433).
- § 52. Внутренняя геометрия предельной поверхности 434
1. Евклидова геометрия на предельной поверхности (434). 2. Сумма углов геодезического треугольника на предельной поверхности (436). 3. Гиперболическая постоянная пространства (437).
- § 53. Правильные многогранники в гиперболическом пространстве 439
1. Теорема Эйлера (439). 2. Оси правильного многогранника (440). 3. Правильные многогранники, вписанные в предельную поверх-

ность (440). 4. Правильные многогранники, вписанные в эквидистантную поверхность (441).

§ 54. Тригонометрия гиперболического пространства	442
1. Основные метрические соотношения в гиперболическом пространстве (442). 2. Вывод первой пары уравнений прямоугольного прямолинейного треугольника (443). 3. Вывод второй пары уравнений, связывающих стороны и углы прямоугольного треугольника (444). 4. Тригонометрические уравнения прямоугольного сферического треугольника (446).	
§ 55. Элементы аналитической геометрии в гиперболическом пространстве . .	447
1. Координация точки в гиперболическом пространстве (447). 2. Расстояние между двумя точками (448). 3. Уравнение плоскости (450). 4. Угол между двумя прямыми (451).	
§ 56. Простейшие приложения исчисления бесконечно малых в гиперболическом пространстве.	451
1. Выражение элемента длины в гиперболическом пространстве (451). 2. Длина кривой, расположенной на поверхности вращения (453). 3. Винтовая линия (454). 4. Вычисление площадей фигур, расположенных на кривых поверхностях (455). 5. Применение найденного выражения к некоторым простейшим поверхностям (457). 6. Элемент площади поверхности вращения (459). 7. Интеграл, выражающий поверхность сферы в угловых координатах (460). 8. Приведение двойного интеграла (29) к одной квадратуре (462). 9. Отзыв Остроградского (463). 10. Выражение элемента объема в гиперболическом пространстве (463). 11. Вычисление объема тела вращения (464). 12. Вычисление объема прямого кругового конуса (465). 13. Вычисление объема пирамиды (467).	
§ 57. Еще к предистории неевклидовой геометрии	468
1. Геометрические работы Лобачевского (468). 2. Работы Гаусса (468). 3. Работы Швейкарта и Тауринаса (470). 4. «Аппендикс» Иоанна Больаи (472). 5. Нерешенная проблема (475).	
Литература	476
Именной указатель	481
Предметный указатель	484

ПРЕДИСЛОВИЕ

В течение последних лет вышло в свет несколько книг по основаниям геометрии, предназначенных для студентов университетов или педагогических институтов¹⁾. Написанные в различном стиле, с различными установками, они несомненно могут служить хорошими учебниками по этому предмету.

Приступив уже несколько лет тому назад к составлению настоящего сочинения, я ставил себе более широкую задачу, имея в виду дать пособие для углубленного изучения оснований геометрии. Продолжительные занятия по изучению обширной литературы по основаниям геометрии, систематическое преподавание этого предмета и, наконец, многолетнее участие в его разработке явились естественной базой, на основе которой развилось содержание этой книги. Она должна служить пособием для студентов, желающих основательно изучить этот предмет, для аспирантов-геометров и — что, может быть, важнее всего — для многочисленных научных работников, преподающих основания геометрии, ведущих специальные семинары, избирающих темы для дипломных и диссертационных работ; найдется немало частей книги, которыми по указанию преподавателей сможет воспользоваться всякий студент. Появление такой книги особенно целесообразно в настоящее время, когда основания геометрии стали обязательным предметом преподавания как в университетах, так и в педагогических институтах.

Самое содержание дисциплины, получившей в текущем столетии общепринятое название «Основания геометрии», различные ученые, работающие в этой области и преподающие ее, понимают по-разному. Одни видят свою задачу почти исключительно в установлении аксиоматики, на которой с необходимой точностью и последовательностью строится самое здание современной геометрии, и в осуществлении такого построения; другие понимают ее шире. Я придерживаюсь того мнения, что как исследовательская работа по основаниям геометрии, так и преподавание этого предмета должны охватить весь обширный своеобразный цикл специальных идей, который возник на почве стремлений к строгому обоснованию геометрии и привел если не к окончательному, то во всяком случае к успешному разрешению этой проблемы. Сюда, в первую очередь, относятся создание различных геометрических систем, отличных от традиционной классической геометрии; далее, изыскания по вопросам о содержании геометрии, о ее строении в качестве одной из основных математических наук и, наконец, о строго логическом ее построении. И первая из сформулированных здесь задач по своему значению, фактическому и философскому, не уступает последней.

¹⁾ Н. В. Ефимов, Высшая геометрия, 1945 и 1949; В. И. Костин, Основания геометрии, 1946; О. С. Смогоржевский, Основы геометрії, Київ, 1947.

Выполнить эту задачу я считаю возможным только в порядке освещения в историческом аспекте всех тех специальных задач, тех важных вопросов и идей, которые возникали в процессе решения главной проблемы обоснования геометрии и в своей совокупности привели к современному состоянию этой дисциплины. Однако историческое изложение отнюдь не должно заключаться в повествовании о ходе и содержании относившихся сюда работ; оно должно давать обстоятельную математическую разработку вопросов в их фактическом содержании. Этим настоящая работа должна существенно отличаться от сочинения, которое я выпустил около 40 лет тому назад¹⁾.

Сообразно такой установке, настоящее сочинение состоит из трех частей. Первая часть, составляющая содержание настоящего тома, посвящена обстоятельному изложению геометрии Лобачевского, этого основного творения, на котором прежде всего построено современное учение об основаниях геометрии, если не об обосновании всей вообще математики. Совершенно естественно стремление к изданию у нас в стране, где неевклидова геометрия возникла и получила глубокое развитие в трудах Н. И. Лобачевского, обстоятельного и серьезного изложения гиперболической геометрии, по которому геометр мог бы ее основательно изучить, усвоить примерно так, как усваивается классическая геометрия Евклида. Я считаю совершенно неправильным мнение, что геометрию Лобачевского достаточно себе уяснить путем общего ознакомления с одной из ее интерпретаций или моделей. В соответствии с этим, гиперболическая геометрия в настоящем сочинении изложена так, чтобы изучающий мог ее усвоить и овладеть ею в той же мере, в какой он владеет классической геометрией; а для этого ее нужно изложить в таком порядке и в таком объеме, в каком излагается геометрия Евклида (элементарная, аналитическая, дифференциальная). Это я и старался выполнить в настоящем томе. Конечно, чтобы это было удовлетворительно сделано, самому изложению неевклидовой геометрии нужно было предпослать ее предисторию, т. е. историю попыток доказать постулат о параллельных линиях, как он формулирован Евклидом, и попыток безукоризненно построить его геометрию. В этой предварительной части я даю изложение содержания «Начал» Евклида, может быть, недостаточно кратко, но в таком объеме, чтобы картина построения этого замечательного сочинения отчетливо выяснилась. И мне кажется, что это изложение будет небесполезно для читателя, который прочитал самые «Начала».

Второй том состоит из двух частей. Первая часть содержит историю признания неевклидовой геометрии, возникновение ее интерпретаций или моделей, различных возникших при этом ее разновидностей. Эта часть заканчивается кратким изложением важнейших приложений геометрии Лобачевского в математике и в физике.

Наконец, заключительную часть второго тома и всего сочинения составляет учение, возникшее как результат развития всех этих идей — современная аксиоматика геометрии, разбор и выяснение ее содержания, построение геометрии на ее основе.

Таково содержание сочинения. Я бы хотел, однако, еще остановиться на вопросе, который считаю более важным, о методе построения этой книги — начать ли с современной аксиоматики геометрии или ею книгу закончить. При одной установке сочинение начинается с тех положений, на которых непосредственно за этим строится строго логическое,

¹⁾ В. Ф. Каган, Основания геометрии, ч. II. Историко-критическое обозрение учения об обосновании геометрии, Одесса, 1907.

дедуктивно выполненное развитие геометрии, а затем разворачиваются специальные вопросы, излагаемые далее. При другой установке сначала излагаются специальные вопросы, правда, иногда без совершенно точного формального их обоснования, и уже от них делается переход к общей основной задаче; ее решение, как это исторически всегда бывает, завершает основную проблему.

Какому же методу нужно отдать предпочтение? Выдержанная строгость логической дедукции, с одной стороны, и доступность изложения и усвоение предмета, с другой, часто находятся в противоречии, резко проявляющемся в математических дисциплинах, в геометрии в особенности. Как это противоречие преодолеть без ущерба для самого предмета и для понимания теми, кто его изучает?

Ясно во всяком случае, что дать безусловное предпочтение строгой дедукции пред наглядными представлениями с самого начала обучения совершенно невозможно. Так, я полагаю, не найдется такого геометра, который решился бы начать изложение геометрии в 6-м классе школы со строгой современной аксиоматики; это было бы неосуществимо вследствие недоступности такого изложения для учащихся, это было бы вредно для усвоения фактического содержания предмета. И, с другой стороны, вряд ли найдется математик, который не признавал бы, что математическое образование должно завершаться ясным пониманием сущности и значения современной постановки каждой дисциплины. Где же и с какого момента в ходе преподавания математики должна воцариться безукоризненная строгость дедукции? Некоторые авторы считают, что это должно происходить при переходе учащегося из средней школы в высшую. Глубоко убежден, что такое решение совершенно неправильно, как неправильна и самая постановка вопроса. Преодоление методологических противоречий, о которых идет речь, может совершиться только сложным диалектическим процессом и не допускает категорического формального решения. Переход от одних установок к другим должен решаться не формальным признаком перехода из средней школы в высшую, а должен совершаться постепенно, в зависимости от подготовки учащихся, от задач преподавания, от воззрений самого преподавателя.

Читатель приступит к изучению этой книги, будучи подготовлен вековыми традициями — геометрией, которой он учился в школе. Он привык мыслить образами, оперировать наглядными представлениями, своеобразным геометрическим воззрением. И от этого я решительно не хочу его отучать, не говоря уже — против этого его вооружать. Я утверждаю, что именно такими средствами изыскания шел Лобачевский в своем творении. Это может показаться парадоксальным. Но только тот, кто не читал работ Лобачевского, может думать, что он пришел к своей «Воображаемой геометрии» исключительно формальным логическим мышлением. Все его работы представляют собой очень пестрое сочетание логических рассуждений и геометрической наглядности. Скажу больше: и в настоящее время неевклидовой геометрией владеет только тот, кто умеет видеть, наглядно ориентироваться в пространстве Лобачевского. Самое открытие неевклидовой геометрии, утверждение уверенности в ее правильности не было актом формальной логики. Это был сложный диалектический процесс соединения логики и интуиции, преодоления тех противоречий, которые возникали из сопоставления старой геометрии Евклида и новой — «Воображаемой геометрии». Вина Остроградского и его сотрудников, не появивших и не оценивших этого открытия, заключалась в том, что они не были в состоянии эти противоречия преодолеть; слава Лобачевского заключается в том, что он их успешно преодолел, — он победил.

Однако значение победы выясняется не в момент успешного исхода сражения. Лишь после того, как бой прекратился, начинают постепенно сказываться его результаты. С момента признания правильности учения Лобачевского, т. е. с момента действительной его победы, начинается углубленное размышление над результатами, к которым привело создание геометрии Лобачевского. Это — тоже сложный процесс, завершение которого обычно связывается (на мой взгляд, слишком категорически) с именем Гильберта. Следуя этому взгляду, авторы сочинений по основаниям геометрии, придерживающиеся другой методической установки, начинают обыкновенно свое изложение перечислением аксиом Гильберта; это дает базу для строгого логического построения всего дальнейшего материала. Но, конечно, этого нельзя сделать одним перечислением новых аксиом: необходимо дать действительное построение геометрии на основе этой аксиоматики. Однако выполнение такого плана страдает двойным недостатком: во-первых, обстоятельное изложение такого материала с начала книги неизбежно делает ее чтение очень утомительным; во-вторых, если это с самого начала действительно сделано, то становится непонятным, к чему уже после этого излагать неевклидову геометрию и все специальные вопросы, о которых речь шла выше. Авторы обыкновенно ограничиваются поэтому кратким очерком построения геометрии на базе предпосланной аксиоматики. Это не может удовлетворить ни читателя, ни строгого критика.

В разработке настоящего сочинения я следовал методу, которого, по существу, придерживался Лобачевский. Я излагал специальные теории, которые привели к современной аксиоматике, не отказываясь от геометрической наглядности, стараясь, однако, сделать ясным для читателя, где эта наглядность нарушает строгую дедукцию. Я старался выяснить, как постепенно преодолевались возникавшие на этом пути противоречия и как их преодоление привело к современной аксиоматике. Излагая последнюю концепцию, я развиваю ее и основанное на ней построение геометрии со всей необходимой полнотой. Нужно при этом иметь в виду, что Гильберт в своих «Основаниях геометрии» неоднократно менял свою аксиоматику, будучи к этому вызван критикой и указаниями читателей. Должен к этому прибавить, что работа Гильберта в этом направлении отнюдь не была последним словом: в настоящем изложении нашли место и другие работы, развивающие аксиоматику геометрии в различных направлениях, дана аксиоматика не одной только евклидовой геометрии, но и гиперболической, эллиптической, аффинной и проективной.

Я надеюсь, что читатель, который продумает материал в том изложении, которое он найдет в этой книге, не поставит мне в вину стремление к наглядности, проникающее первую ее часть. Я убежден, что именно в этом виде она будет более полезна, чем в исключительно формальном изложении, не оправданном научным генезисом системы.

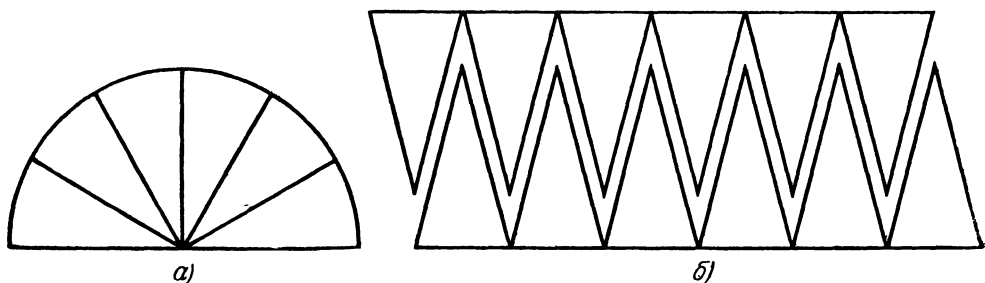
Июль 1949 г.

В. Каган.

ВВЕДЕНИЕ

1. Задача учения об основаниях геометрии. Под «Основаниями геометрии» разумеют дисциплину, имеющую своей основной задачей установление тех посылок различного логического свойства (определений, аксиом), из которых весь материал геометрии может быть выведен чисто логическим путем, а также выяснение тех путей, методов и средств, при помощи которых такое логическое построение геометрии действительно может быть выполнено.

Около трех тысяч лет тому назад индусский математик Ганези указал, что площадь круга равна площади прямоугольника, основанием которого служит полуокружность, а высотой — радиус этого круга. На стене одного индусского храма сохранился выгравированный на ней чертеж, которым Ганези подтверждал это свое открытие. Круг разделен на два полукруга, каждый из которых, в свою очередь, разделен на 6 секторов (черт. 1, а). Эти секторы с вытянутыми основаниями



Черт. 1.

размещаются в фигуру, напоминающую две пилы. Если мы сдвинем эти две пилы, то получим фигуру, более или менее напоминающую прямоугольник, о котором идет речь (черт. 1, б). Над этим чертежом сверху помещено одно слово, долженствовавшее, очевидно, заменить то, что мы называем доказательством, — долженствовавшее удостоверить правильность высказанной истины. Это слово гласит: «смотри». Это бесхитростное апеллирование к наглядности, как к единственному удостоверению (нужно сказать, в этом виде далеко еще не убедительному) правильности высказанной истины, характеризует младенческое состояние геометрии. Освободить геометрию от этих наивных соображений, заменить их строгими рассуждениями, не основанными на наглядных представлениях, — это задача, над которой математическая мысль неустанно работала в течение почти трех тысяч лет. И при всем том, руководства по геометрии не только не чужды такого рода наглядным представлениям, но, по существу, в некоторой мере даже проникнуты ими.

Французский академик А. Клеро в своем небольшом элементарном учебнике геометрии [¹] ¹⁾, выпущенном в 1741 г., пишет в предисловии: «Меня, вероятно, будут упрекать в том, что в некоторых местах я слишком полагаюсь на указания глаза». Даже такое выдающееся руководство, как «Элементарная геометрия» Адамара, недавно выпущенное в русском переводе ²⁾, не представляет исключения. Но, если оставить в стороне эти учебные книги, которые из педагогических соображений и не ставят себе целью излагать геометрию, не прибегая вовсе к наглядным представлениям, если обратиться к сочинениям строго научным, то и здесь дело обстоит далеко не благополучно. До начала текущего столетия сочинений, удовлетворяющих поставленному выше требованию строго логического построения геометрии, вовсе не было. В конце прошлого века в итальянской школе (Пеано, Амодео, Фано, Пиери) и в немецкой школе (Паш, Гильберт) появляются мемуары ³⁾, действительно устанавливающие начала, на которых такое логическое построение геометрии может быть осуществлено. Вслед за этими мемуарами появляются и книги (Гальстет, Каган, Тиме, Веронезе, Фордер), в которых эта задача в некоторой мере разрешена. Однако сочинения эти сложны, своеобразны и с трудом усваиваются читателем, не знакомым с той работой мысли, которая к такой постановке построения геометрии привела.

Эта работа мысли, как уже сказано, продолжалась около трех тысяч лет. Сменялись народы, культивировавшие геометрию. От индусских, вавилонских и египетских жрецов геометрия перешла к греческим философам, развившим ее в обширную науку; с распадом греческой культуры она перешла к арабам и ими вновь была перенесена в Европу — в Италию и в Испанию; ее культивировали немецкие монахи и французские энциклопедисты.

Менялись методы математического исследования. Тонкий синтез греческих геометров нашел опору у арабских аналитиков; появилась тригонометрия, выросла алгебра, сложился анализ бесконечно малых, — и все эти дисциплины нашли себе широкое применение в геометрии. Была построена аналитическая геометрия, дифференциальная геометрия; и в противовес этому родились новые системы синтетической геометрии — геометрия положения, проективная геометрия, аффинная геометрия.

Наконец, коренным образом менялись философские воззрения. На смену господствовавшим в античном мире умозрениям и средневековой метафизике пришли течения мысли, которые извилистыми путями вели к четкой материалистической философии.

И при всех этих метаморфозах, перед лицом важнейших задач, разрешения которых властно и неотложно требовала жизнь, математики не оставляли основ геометрии и притом в такой мере, что трудно назвать выдающегося геометра, который не отдал бы дани этому направлению. Декарт, Лейбниц, Лагранж, Лежандр, Фурье, Гаусс, Коши, Ампер — все эти творцы новой математики — люди, чрезвычайно различные по своим научным, философским, политическим установкам, — все размышляли об основаниях геометрии, стараясь, по выражению Н. И. Лобачевского, пролить свет на те «темные понятия, с которых, повторяя Евклида, начинаем мы геометрию».

Но нужно ли было все это? Что худого в том, что геометр в своем исследовании и в своих доказательствах руководствуется не только логикой,

¹⁾ Цифры в квадратных скобках указывают номер соответствующего сочинения в библиографическом списке, имеющемся в конце книги (стр. 476—480).

²⁾ См. ниже, стр. 108.

³⁾ На этих мемуарах мы остановимся подробно в конце настоящего сочинения.

но и интуицией и глазом? Разве результаты оказались от этого менее достоверными? Разве геометрия при этом не разрослась в могучее здание, служащее фундаментом всех точных наук? Эти вопросы возникали и в общей философской литературе. Во второй половине прошлого века, когда в математической литературе задача обоснования геометрии приближалась к своему разрешению, принес с собою ряд глубоких и своеобразных идей как математического, так и философского значения, в общей литературе возникло даже течение против этих тенденций математиков; это течение возглавлял философ-идеалист Шопенгауэр. Он утверждал, что потребность в строгом доказательстве свойственна только людям низшего умственного уровня. Шопенгауэр называет знаменитое классическое доказательство пифагоровой теоремы, приведенное в 47 предложении I книги «Начал» Евклида, мышеловкой; в частности, он возражает против вспомогательных прямых, которыми это доказательство пользуется; между тем, именно эти вспомогательные прямые способствуют наглядному уяснению предложения. И как бы в противовес этому во второй половине прошлого столетия в математической среде крепнет тенденция к строгому логическому обоснованию всей математики, и в школах Вейерштрасса, Дедекинда, Г. Кантора, Гильберта это направление получает доминирующее значение.

Кто же прав в этом споре? Нужно ли растить эти тенденции к строгому логическому обоснованию геометрии или надлежит их подавить?

Дать на эти вопросы исчерпывающий ответ мы здесь (пока еще) не можем. Поскольку этот ответ должен стоять на высоте современной математической мысли, он не может быть дан в нескольких словах, в общих утверждениях; он требует серьезного, глубокого обоснования, — это и составляет одну из основных задач настоящего сочинения.

Читая в течение многих лет в различных университетах курс «Оснований геометрии», я нередко слышал этот вопрос от студентов на первой лекции. Я говорил: «Позвольте мне сейчас не отвечать на этот вопрос. Прислушайтесь курсу, к чтению которого я приступаю; если после этого у Вас останутся сомнения, то на вопросы этого рода я дам исчерпывающий ответ». И ни разу эти вопросы в конце курса не повторялись: курс содержал ответ на них. Я надеюсь, что такой исчерпывающий ответ читатель получит, прочитав эту книгу.

Здесь замечу только, что объем и содержание геометрии, а может быть и всей математики, глубоко изменились под влиянием идей, которые с собой принесли размышления над ее основаниями, — что эти идеи наложили четко выраженную печать на все построение теоретического естествознания. К этому нужно прибавить, что задача науки, конечно, заключается не только в том, чтобы собирать материал, хотя бы и чрезвычайно полезный, необходимый. Задача науки заключается также в том, чтобы объединить эти факты в одну систему, чтобы указать внутреннюю связь между ними, чтобы установить так называемые принципы науки, т. е. те факты, которые обуславливают все остальные; чтобы выяснить действительное содержание ее предложений, не умаляя грубой интуицией того, что в них содержится, и не присваивая им по традиции того, что в них не вложено; чтобы отдать себе отчет в каждом термине, которым мы пользуемся, а не считать ясным все то, что мы привычно повторяем. Задача науки заключается, наконец, в том, чтобы выяснить источник, из которого мы черпаем ее истины; не те, конечно, истины, которые логически выводятся из других и, следовательно, в этих последних имеют свой источник, а те, которые сами служат предпосылками остальных, так называемые основные положения науки, в геометрии — ее определения

и аксиомы. Но для того чтобы выяснить источник основных положений науки, их нужно знать, их нужно установить. Все это и составляет в применении к геометрии задачу учения об ее основаниях. В беглом обзоре осветим, как возникли и сложились эти тенденции к логическому обоснованию геометрии.

2. Возникновение задачи логического обоснования геометрии в Греции. На Востоке, в Индии, в Вавилоне, в Египте в период с третьего по первое тысячелетие до нашей эры были накоплены первые сведения по математике вообще, по геометрии в частности. Еще в начале текущего столетия считалось, что сведения эти были очень скудны, часто далеко не точны. Тщательное исследование египетских и вавилонских текстов, записанных частью в клинописи, частью в иероглифах, привело к изменению этой точки зрения. Вавилоняне ушли далеко в области счисления (шестидесятеричная система), алгебры и геометрических вычислений; египтяне имели гораздо менее приспособленную систему счисления и в алгебре отстали; но геометрические задачи, решением которых они занимались, требовали гораздо более значительных геометрических познаний, чем это предполагалось ранее, как в отношении геометрических фактов, так и средств вычисления¹⁾. Материал, которым египтяне располагали, вряд ли мог быть добыт без помощи рассуждений, которые следует назвать доказательствами. Поэтому и довольно распространенная прежде точка зрения, согласно которой идея доказательства была совершенно чужда восточной математике, вряд ли может теперь поддерживаться. Но все же два факта можно считать несомненными. Во-первых, восточная математика в области геометрии в первом тысячелетии до н. э. все же ограничивалась элементарными вычислительными задачами; эти вычисления выполнялись не так грубо и ошибочно, как это приписывали Ахмесу²⁾, но они все же были очень элементарны; во-вторых, логическая разработка накопленного геометрического материала стояла еще на очень низком уровне.

Повидимому, от египтян геометрические сведения, которыми они располагали, перешли к грекам. По истории греческой геометрии в древности существовало обстоятельное сочинение, принадлежавшее Евдему Родосскому; ученику Аристотеля, жившему, следовательно, во второй половине IV столетия до н. э. Сочинение это до нас, к сожалению, не дошло. Ряд отрывков из него, частью в дословной, частью в собственной передаче, приводит комментатор Евклида Прокл (410—485 гг. н. э.), о котором нам ниже придется говорить часто и подробно. Согласно Проклу, Евдем относит появление геометрии в Греции к основателю ионийской философской школы Фалесу Милетскому (VII—VI столетие до н. э.), полумифическая деятельность которого не может быть точно очерчена. Достоверно, повидимому, то, что Фалес много путешествовал по восточным странам, главным образом по Египту, имел тесное общение с египетскими жрецами, у них научился многому, между прочим — геометрии. Судя по тому, что он предсказал солнечное затмение, происходившее в 585 г. до н. э., он располагал уже значительными для того времени сведениями из математики; это мало вяжется с открытиями тривиальных вещей, которые ему приписывает Евдем (равенство вертикальных углов, равенство углов при основании равнобедренного треугольника и обратное предложение, равенство треугольников по трем сторонам, деление круга

¹⁾ См., например, книгу Нейгебауэра [3].

²⁾ Автор манускрипта, представляющего древнейший памятник египетской математики.

диаметром на два равных полукруга); заслуга Фалеса, нужно думать, заключалась в том, что он дал (до нас не дошедшие) доказательства этих элементарных предложений. Важно, повидимому, то, что на рубеже VII и VI столетий до н. э. начальные сведения по геометрии проникли в Грецию, были переданы народу, который по уровню своей культуры был уже способен поставить геометрии более широкие задачи, нежели те, при разрешении которых она первоначально возникла на Востоке. Греция была в то время уже в состоянии выделить достаточный контингент людей, в глазах которых значение научного исследования вообще, геометрии в частности, не ограничивалось небольшим числом самых элементарных задач непосредственной узко утилитарной ценности, которые были уже способны к далеко идущей абстракции, и от геометрии измерения земельных участков были в состоянии перейти к гораздо более общему учению о пространственных образах и их соотношениях. При таком расширении задач геометрии стал уже необходим более глубокий логический анализ. Уже в следующем столетии после Фалеса большие успехи были в этом отношении достигнуты Пифагором и его школой; но до нас дошли только отрывочные сведения о фактических достижениях пифагорейцев и о методах, которыми они вели исследования. Несомненно только то, что рядом с крупными достижениями [если не открытие, то классическое доказательство знаменитой теоремы, связываемой с именем Пифагора¹⁾] пифагорейцы впадали в грубо метафизические рассуждения, приписывали числам мистическое значение и силу. Если учение Фалеса носило характер ранней материалистической мысли, то пифагорейцы принадлежали к числу родоначальников мистического идеализма, оформленного и в некоторой мере канонизированного Платоном.

3. Высказывания Платона. В связи с этим, повидимому за отсутствием достаточных сведений о ходе и методах математических и, в частности, геометрических исследований в первые два столетия после их появления в Элладе, постановку задачи о логическом обосновании геометрии связывают с именем Платона (в Византии — Прокл, в новое время — Таннери, Виндельбанд и многие другие). Впрочем, никто из историков геометрии не считает, что требование логического обоснования геометрии не ставилось до Платона. Вообще, всякая тенденция связать глубокую идею, широкий замысел с одним определенным лицом, как с родоначальником этой идеи, этого замысла, обычно по меньшей мере рискована. Идеи широкого замысла не рождаются из головы Юпитера — легендарного бога — или даже знаменитого философа. Они всегда представляют собой результат эволюции, обыкновенно продолжительной, часто очень разветвленной. И вряд ли можно указать такой замысел, такую научную концепцию, связываемую с тем или иным ученым или философом в качестве ее родоначальника, следов, зачатков, начал которой нельзя было бы найти гораздо раньше, задолго до того, как она была отчетливо сформулирована тем лицом, которому ее склонны приписывать. Менее всего тенденцию к логическому обоснованию геометрии можно приписывать Платону, как первому ее провозвестнику. Как уже отмечалось выше, доказательства математических предложений должны были существовать на Востоке; тенденцию к проведению логических доказательств можно видеть у Фалеса, в более широком масштабе у пифагорейцев, отчасти даже у софистов. Уже до Платона составлялись учебники и трактаты по геометрии; достоверно, что одно такое руководство принадлежало Гиппократу

1) Самая теорема была, повидимому, в Египте известна значительно ранее.

Хиосскому; трактаты по математике составлял и Демокрит; от Диогена Лаэртция (греческий писатель III—IV столетия н. э.) мы знаем, что Демокрит составил сочинение «О геометрии». Можно думать, что оно было посвящено вопросам обоснования геометрии, которые по всем установкам Демокрита были ему не чужды; но о содержании геометрических сочинений Демокрита мы, к сожалению, не имеем достаточных сведений. Наконец, в Афинах, в самой Академии Платона, были уже в ходу курсы геометрии, а изучение руководства, составленного Февдием из Магнезии, было, повидимому, обязательно для лиц, желавших вступить в Академию.

Прокл, сам геометр по специальности, был видным неоплатоником (мы будем об этом говорить ниже); совершенно естественно, что он был склонен приписать знаменитому основателю школы первостепенное значение в той специальности, которой он преимущественно занимался; такого рода тенденция возвеличивать первых представителей того направления, которое те или иные ученые сами отстаивают, — черта очень распространенная в научной среде. Несомненно, что этой тенденции через полторы тысячи лет отдает дань и Виндельбанд, когда говорит: «Платон внес в математические исследования требование, по которому исходить должно от определенных и аксиом...». Виндельбанд — один из наиболее четко выраженных философов-идеалистов конца прошлого века; совершенно естественно, что он, как и Прокл, присваивает родоначальнику идеалистической философии заслугу постановки логического обоснования геометрии. Эта заслуга, несомненно, преувеличена; но нужно отдать себе отчет о том, какую роль Платон действительно играл в тенденции логического обоснования геометрии.

Деятельность Платона протекала в конце V и, главным образом, в первой половине IV века до н. э. По своим философским установкам Платон, как уже сказано, был идеалист с ясно выраженным мистическим умонастроением; более того, можно сказать, что Платон был родоначальником объективного идеализма. При всем том, в своих сочинениях Платон требует, чтобы наше знание и вся деятельность были построены на «научном основании».

Во всех своих диалогах Платон выдвигал требование, имевшее руководящее значение в его исследованиях, проникавшее всё его учение, все его сочинения. Это требование заключалось в том, чтобы вся деятельность нашего ума — как в деле уяснения мироздания, так и в вопросах организации жизни отдельного лица, общества или государства — была основана на научной базе.

Как же, по замыслу Платона, должно было осуществиться это научное обоснование всякого знания и всякой деятельности? Платон точно своего замысла не формулирует, но ответ на этот вопрос отчетливо выступает в каждом его сочинении. Он заключается в том, что во главу всякой отрасли знания и деятельности должны быть поставлены понятия и положения, из которых все остальное, что к этой отрасли относится, должно вытекать как их следствие.

Как известно, все дошедшие до нас сочинения Платона (кроме «Апологии Сократа») представляют собой беседы — диалоги; их содержание охватывает все вопросы знания, жизни человека и общества. Диалоги эти построены так, что ведущее лицо (такое лицо есть в каждом диалоге Платона, чаще всего это — Сократ) старается убедить других собеседников в справедливости тех или иных исходных положений и, достигнув этого, заставляет его признать проистекающие из этих положений выводы. Идет ли речь о вопросах физики и биологии («Тимей»), о вопросах морали (в очень многих диалогах), о социальных отношениях («Государство»),

о вопросах права («Законы») — Платон всюду принципиально выставляет основные положения, выводы из которых должны составить содержание соответствующей теоретической или практической дисциплины. Положения эти частью наивны, частью фантастичны, выдуманы, — но всюду они есть, они выдвигаются, они должны составить научную базу рассматриваемого вопроса.

Это требование в настоящее время кажется научно мыслящему человеку совершенно тривиальным; но это только показывает, в какой мере мы эти требования восприняли и усвоили.

Через всю историю науки красной нитью проходит глубокое различие между отношением к формулированному выше принципу Платона, по которому научное исследование должно строиться в порядке вывода из основных исходных положений, и к самому содержанию положений, которые он принимает. Требование принципиального обоснования всякой научной дисциплины крепло в течение всей истории науки. Что же касается содержания тех положений, на которых Платон пытался строить философские, биологические и социальные науки, то они, как уже отмечалось, неверны, идеалистичны и с развитием науки почти во всех своих частях постепенно отпадали.

Платон понимал трудность выполнения поставленного им требования, особенно в области физических, биологических и общественных наук. Но в области математики уже тогда намечалась возможность осуществления этой задачи. Платон ставит математические дисциплины в ходе научного образования («Государство», VII кн.) на первое место — прежде всего арифметику, а затем тесно с ней связанную геометрию; он мотивирует это тем, что геометрия, с одной стороны, особенно приложима к военному делу, а с другой стороны, чрезвычайно способствует развитию мышления. Известно, что хорошее знание геометрии было требованием, которое ставилось всякому, желавшему вступить в Академию Платона. Не может подлежать сомнению, что это требование стимулировало как изучение геометрии, так и ее построение по той схеме, которая намечалась для всякой дисциплины, а в области геометрии, казалось, уже допускала осуществление. Платон, таким образом, стимулировал логическое построение геометрии; в этом заключается его заслуга в деле обоснования геометрии. Но общий замысел логического построения науки у Платона четко не формулирован, и все его учение построено, как уже сказано, на полумистической базе.

4. Аристотель как основоположник дедуктивной школы. Глубокие сомнения в установках Платона уже при его жизни возникали и в самой Академии. Возникла оппозиция к основам его учения, главным представителем которой был великий ученик Платона — Аристотель. Он был противником не только учения об идеях, но и многих других взглядов Платона. Аристотель был человеком неизмеримо более конкретной мысли; если идеалистические установки ему еще далеко не были чужды, то признать мистическую теорию анамнеза (вспоминаний), которую настойчиво проповедывал Платон, он все же не мог. Всем известно изречение, которое ему приписывают; в средневековой латинской передаче оно гласит: *amicus Plato sed magis amica veritas* (друг Платон, но более высокий друг — истина).

Расхождение с Платоном и его школой шло в этом отношении так далеко, что переходило в прямую борьбу и заставило Аристотеля после смерти Платона покинуть Академию и даже Афины на продолжительное время. Но основную установку Платона — научное обоснование всякого

знания и всякой деятельности — Аристотель не только сохранил, но даже чрезвычайно углубил. Более того, отбросив почти все, что было у Платона мистического, отказавшись от фантастической теории идей, вступив даже в некоторой мере на путь экспериментального исследования, Аристотель, можно сказать, стал действительным родоначальником настоящей науки.

И если основной замысел, по которому каждая наука должна развертываться в порядке выводов из ее основных положений, у Платона можно усмотреть только из хода его диалогов, то у Аристотеля эта мысль четко выражена со всей возможной определенностью; и самая теория логического вывода впервые построена Аристотелем и изложена в его сочинениях, посвященных логике.

5. Учение о категориях и об истолковании суждений. Повидимому, Андроник Родосский, выпустивший в середине I столетия до н. э. первое собрание сочинений Аристотеля, — после того как его манускрипты, пролежав около 200 лет в подвалах Малой Азии, были возвращены в Европу, — объединил сочинения, посвященные логике, в один кодекс под названием «Органон». В состав этого кодекса вошло пять сочинений: 1) Категории, 2) Об истолковании, 3) Первая аналитика, 4) Вторая аналитика, 5) Топика; некоторые авторы выделяют восьмой раздел последней книги в особое сочинение под названием «Софистические доказательства». «Органон» представляет собой, таким образом, собрание сочинений, которые частично были составлены без прямой зависимости одно от другого. Трудно даже точно установить последовательность, в которой они были составлены. Повидимому, первым по времени было «Топика» — самое большое по объему из этих сочинений. К вопросам логики, хотя и не столь систематически, Аристотель возвращается и в других своих сочинениях, особенно в «Метафизике». Однако по содержанию указанная выше последовательность, повидимому, установленная Андроником, представляется наиболее естественной. Дадим весьма краткий обзор сочинений, входящих в состав «Органона», как имеющих для нас наиболее важное значение.

Первое сочинение «Категории»¹⁾ имеет целью установить наиболее общие родовые понятия, т. е. такие понятия, которые охватывают всё существующее, всё нами мыслимое — как материальное, так и абстрактное. Всё, что мы называем тем или иным словом, должно войти в состав одной и только одной категории. Установление категорий есть, таким образом, высшая классификация всего сущего. Возникновение этой классификации, повидимому, было вызвано точкой зрения Аристотеля на определение понятий. Определение каждого понятия по Аристотелю осуществляется путем его включения в ближайшее родовое понятие и указания видовых отличий. Хорошо известна стандартная формулировка этого правила, как она была дана средневековыми схоластиками: *definitio fit ex genere proximo ac differentia specifica* (определение составляется из ближайшего родового понятия и видового отличия). Мы будем называть это «аристотелевым правилом логического определения»²⁾. Так, определяя ромб как параллелограм, в котором смежные стороны равны, мы включаем ромб в родовое понятие «параллелограм» и выделяем его присущим

¹⁾ «Категории» изданы на русском языке в переводе А. В. Кубицкого со вступительной статьей и примечаниями Г. Ф. Александрова, Москва, 1939.

²⁾ Это «правило определения» Аристотель дает в различных своих сочинениях; особенно четко оно выражено в VI книге «Топики».

ему видовым отличием — равенством смежных сторон. Когда некоторое понятие, согласно этому правилу, определено, то определение родового понятия, в которое оно включено, требует более общего понятия; и так как это восхождение, как указывает Аристотель, не может продолжаться неограниченно, то мы в этом порядке неизбежно должны прийти к понятиям, которые уже не могут быть включены в более общие понятия, по выражению Аристотеля — не могут быть включены ни в какое подлежащее, как его часть, и могут в определенных подчиненных понятиях служить только предикатами. Эти-то понятия, которые по своей общности уже определения не допускают, и суть категорий. Установление категорий имеет очень большое значение для науки вообще, для оснований геометрии в частности. Приведем целиком четвертую главку этого сочинения.

Глава четвертая

«Из слов, высказываемых без какой-либо связи, каждое означает или сущность, или качество, или количество, или отношение, или место, или время, или положение, или обладание, или действие, или страдание. Сущностью является, коротко говоря, например, человек, лошадь. Количество — это, например, в два локтя, в три локтя. Качество — например, белое, сведущий в грамматике. Отношение — например, двойное, половинное, большое. Где — например, на площади, в Ликее. Когда — например, вчера, в прошлом году. Положение — например, лежит, сидит. Обладание — например, обут, вооружен. Действие — например, режет, жжет. Страдание — например, его режут, жгут. Каждое из перечисленных слов само по себе не обозначает никакого утверждения [или отрицания], но утверждение [или отрицание] получается вследствие связи этих слов друг с другом; ведь всякое утверждение [или отрицание], повидимому, или истинно, или ложно; из слов же, высказываемых вне всякой связи, ни одно не является ни истинною, ни ложью, как, например, человек, белое, бежит, побеждает».

Аристотель устанавливает, таким образом, десять категорий, в которые укладывается всё сущее в самом широком смысле этого слова. Следующие главки «Категорий» выясняют каждую из этих категорий порознь, выявляют важнейшие их виды, возможность их сосуществования в месте или во времени. Автор как бы старается убедить читателя, что это действительно категории, что ими действительно охватывается всё сущее. И именно в этой классификации, а не в формальном делении понятий заключалась цель Аристотеля, заключалось значение его категорий.

Установлением категорий занимались и до Аристотеля; не раз возвращался к этому вопросу и сам Аристотель; неисчислимо много раз этим занимались философы после него, вплоть до нашего времени. И классификация Канта (его 12 категорий) не более убедительна, чем 10 категорий Аристотеля.

Математики хорошо знают, что вопрос, который в течение тысячелетий не получал разрешения, почти всегда несет в себе порочность задания; несомненно, что такая порочность крылась и в постановке вопроса о категориях, как его понимал Аристотель. Прежде всего, можно ли говорить о единой классификации всего сущего? Однозначна ли задача такой классификации? Далее, может ли идти речь о постоянной, устойчивой классификации всего сущего, включая сюда и отвлеченные понятия, когда самая совокупность этих понятий постоянно изменяется? Многие понятия эволюционирующей науки не укладываются без больших натяжек

ни в категории Аристотеля, ни в какую бы то ни было из позднейших категорий. На порочности самого задания в таком понимании в наше время справедливо настаивают, конечно, представители диалектического материализма. Но ее, несомненно, ощущал уже и сам Аристотель. В XIV кн. «Метафизики» (гл. II) есть места, которые можно рассматривать как попытку свести категории к трем (сущность, состояние, отношение); тенденция к уменьшению числа категорий проходит через многие сочинения, относящиеся к учению о категориях. Нужно, однако, уяснить себе, что с уменьшением числа категорий становится все труднее указать видовые отличия входящих в них понятий. Можно было бы говорить только об одной категории «нечто»; но тогда не было бы классификации, а установление видовых отличий наиболее общих понятий неизбежно привело бы к выделению других категорий. С этим обстоятельством нам придется иметь дело, поэтому мы на нем и останавливаемся. Аристотелево учение о «Категориях» несомненно дефектно, но оно имело большое значение в деле выяснения основных понятий науки.

Вторую часть «Органона» составляет небольшое сочинение «Об истолковании»¹⁾. Его было бы правильнее называть учением «О суждениях», к которому оно, по существу, сводится. Сочинения «Категории» и «Об истолковании» составили базу, на которой была построена грамматика: «Категории» определили схему этимологии, «Об истолковании» — схему синтаксиса, главным образом, простого предложения. Наиболее существенным в сочинении «Об истолковании» из его дополнений к обычному содержанию синтаксиса, является деление суждений по количеству (общее, частное, единичное), по качеству (положительные и отрицательные суждения), по модальности (категорические — безоговорочно устанавливающие факт, возможные или гипотетические — условные), а также противоположение суждений (противоположные и противоречивые суждения). Эту классификацию можно найти в любом элементарном курсе логики.

6. Аналитики Аристотеля. Основную часть «Органона» составляет теория вывода или умозаключения: ей посвящены остальные разделы «Органона» — две «Аналитики» и «Топика». Как уже было указано, различные отделы «Органона» составляют самостоятельные сочинения; они поэтому в большой мере перекрывают друг друга; «Топика», которой в «Органоне» отведено последнее место, как выше уже упомянуто, повидимому, была написана раньше других. При всем том, в общем, каждое из этих сочинений имеет свои характерные специфические черты.

Содержание Первой и Второй аналитик²⁾, может быть, правильнее всего охарактеризовать как теорию доказательства, основой которого служит силлогизм. Обе книги посвящены теории силлогизма и общей теории доказательства, хотя в различном аспекте. «По теории силлогизма, — говорит сам Аристотель, — я не нашел решительно ничего, что было бы сказано до меня; я ее разработал путем продолжительных и трудных изысканий». Это было сделано Аристотелем с таким искусством, что последующие 2000 лет, по существу, ничего нового в это учение, т. е. в дедуктивную формальную логику, не внесли.

Кант и Гегель согласно указывают, что до них после Аристотеля в логику ничего существенного не было внесено; конечно, это следует

¹⁾ Имеется русское издание «Об истолковании» Аристотеля. Перевод с греческого Э. Л. Радлова, Журн. Мин. Нар. Просвещ., 1891, 1—2.

²⁾ Строго говоря, «Первые и вторые аналитики», т. е. методы и правила аналитического рассуждения; аналогично, собственно, «Топики», а не «Топика».

относить только к формальной дедуктивной логике, которая их только и интересовала.

«Вторая аналитика», которую Аристотель рассматривал как продолжение «Первой аналитики», представляет собой сочинение, посвященное тем вопросам, которые в настоящее время относят к теории познания. Аристотель рассматривает их в тесной связи с общей теорией науки; это, естественно, приводит к соприкосновению с вопросами чистой логики, которые рассмотрены в «Первой аналитике». «Вторая аналитика» имеет наиболее прямое отношение к тем проблемам, которым посвящено настоящее сочинение.

Однако прежде чем обратиться к содержанию «Второй аналитики», скажем еще несколько слов о последней части «Органона», о так называемой «Тописке». Это сочинение лучше всего охарактеризовать как учение о диспуте. Как известно, диспуты и диалоги были в ту пору в Греции широко распространены. Это был путь, которым в то время главным образом шло установление и распространение знаний и научных идей. «Тописку» можно рассматривать как руководство для ведения диспута. По существу, это сочинение содержит чисто формальные указания, как вести диспут, чтобы выйти из него победителем; задача заключается не столько в установлении истины, сколько именно в торжестве ведущего диспут. При такой своей задаче «Тописка» в настоящее время, по существу, интерес потеряла. При всем том и в ней встречаются рассуждения, относящиеся к общей логике и к теории познания. Во «Второй аналитике» и в «Тописке» выясняются основные вопросы, которые имеют существенное значение в учении об «Основаниях геометрии»; вернее, выясняются те точки зрения на эти вопросы, которые были установлены Аристотелем и в течение многих веков в теории науки вообще, в учении об основаниях геометрии в частности, имели господствующее значение. Выяснению этих установок именно для обоснования геометрии в настоящее время посвящено немало сочинений; мы отметим здесь два, которые наиболее отчетливо этот вопрос освещают, — во-первых, издание Евклида с комментариями Хиса¹⁾ и, во-вторых, статью Шольца^[3] «Об аксиоматике древних». Воззрения Аристотеля, как они изложены в указанных его сочинениях, главным образом во «Второй аналитике» и в «Тописке», сводятся к следующему.

А. Наука, как ее понимает Аристотель, представляет собой последовательность предложений, относящихся к некоторой определенной области. Эти предложения распадаются на основные или исходные положения (*ἀξιώματα*, *ἀρχαί*, *πρώτα*) и выводы из них — теоремы (*θεωρήματα*). Понятия, входящие в эти предложения, в свою очередь, делятся на основные понятия (*ἀρχαί*, *πρώτα*) и выводные (*τὰ ἐκ τούτων*). Относительно основных положений устанавливается следующее требование. Они должны быть непосредственно очевидны, а потому не допускают доказательства. Аналогично этому, основные понятия должны быть непосредственно понятны и потому не допускают определений. Эта точка зрения Аристотеля, подвергаясь в наше время существенной модификации, в течение многих столетий имела общепризнанное и господствующее значение. Шольц считает, что у Аристотеля к основным положениям и понятиям предъявляется еще и другое требование: основные положения должны быть достаточны для доказательства остальных предложений в том смысле, что для выполнения этих доказательств требуются только правила логики. Основные понятия тоже должны быть достаточны в том смысле, что осталь-

¹⁾ Об этом издании см. ниже, стр. 34.

ные, выводные понятия могут быть на них формально построены по тому правилу определения, которое выше было сформулировано. Однако эти требования достаточности как для основных положений, так и для основных понятий явно и отчетливо у Аристотеля, собственно, нигде не сформулированы. Шольц считает, что они вытекают из всей структуры аристотелевой аксиоматики. Во всяком случае, что к этому требованию при построении любой науки необходимо стремиться, действительно ясно следует из всех установок Аристотеля.

Наконец, к основным положениям (аксиомам) предъявляется еще следующее важное, характерное для аристотелевой доктрины, требование: эти положения должны быть аподиктичны, т. е. должны представлять собой утверждения, выражающие совершенно необходимые факты.

Точку зрения Аристотеля на определение, его правило определения мы выше уже изложили. Восходящий процесс определения понятий возрастающей общности неизбежно должен остановиться на некоторых исходных понятиях. Аристотель ясно видит, что довести этот процесс в отдельных науках до общих его категорий — задача трудная, если не невозможная; он признает поэтому необходимым устанавливать исходные начальные понятия в каждой науке, хотя это неизбежно до некоторой степени подрывает учение о категориях как общей классификации сущего; приходится уже устанавливать исходные категории каждой отдельной науки. При этом введение каждого такого основного понятия должно сопровождаться аксиомой или постулатом, устанавливающим существование соответствующей вещи. «Это вещи, — говорит Аристотель, — существование которых нужно непосредственно принять... Так, в геометрии мы должны принять существование небольшого количества вещей, именно точек и линий. Существование всего остального должно быть доказано».

Аристотель понимал, конечно, что по той схеме, которую он устанавливает, построение всякой науки невозможно. Он отличает, поэтому выводные науки (*ἐπιστήμη ἀποδεικτική*) от индуктивных наук (*ἀπαγωγή* — индуктивный вывод). Он указывает в самом начале «Второй аналитики», что познание приобретается не только путем логического вывода, но и путем индукции. Однако индукция и теория индуктивных наук играют у Аристотеля совершенно второстепенную роль; им посвящены только две небольшие главки (23 и 24) в самом конце «Первой аналитики». Доминирующее значение у Аристотеля имеют науки выводные и среди них прежде всего математика, в частности геометрия. Самое слово «*μάθημα*» фигурирует у Аристотеля в качестве всякого точного знания. Что касается источника основных положений выводных наук, то Аристотель его видит только в деятельности нашего ума (*νοῦς*), и именно поэтому аксиомы часто фигурируют у последователей Аристотеля под названием «*κοινὰ ἔννοια*», т. е. «общие достояния ума».

7. После Аристотеля. К началу третьего столетия до н. э., таким образом, была установлена логическая схема, по которой должна строиться выводная наука. Не подлежит сомнению, что Аристотель в этом своем построении в некоторой мере руководился ранее намеченными образцами. Но различные установки были им приведены в систему, а при том авторитете, которым он пользовался, эта схема стала, можно сказать, обязательной для дальнейших авторов, приняла как бы стандартный характер. Много раз указывалось, что строгие логические доказательства появлялись и до Аристотеля, что часто они и после него строились людьми, не владевшими его Аналитикой. Это несомненно верно; наша

мысль, к счастью, работает быстрее, чем того требует разветвленная силлогистика. Но творение Аристотеля своим анализом логического процесса дисциплинировало научную мысль, сделало осознанным то, что еще носило характер бессознательного, установило пути, по которым пошло обоснование выводных наук. Не подлежит сомнению, что попытка заковать всю научную мысль в цепи аристотелевой силлогистики была бы для нее губительной. Попытка Спинозы построить «Этику» по точной аристотелевой схеме, при всей оригинальности, при всем значении этого сочинения, по методу изложения, производит впечатление наивности.

Но, с другой стороны, в области математики дедуктивное мышление несомненно играет существенную, а в ее обосновании — особенно важную роль; и в деле обоснования математики, прежде всего — геометрии, схема Аристотеля имела руководящее значение. Обоснование геометрии осуществлялось в курсах геометрии. Мы уже указывали, что такого рода курс был составлен Гиппократом Хиосским до Платона; в Академии было в ходу руководство Февдия; ученик Платона Лев составил такое же сочинение; называя эти руководства, Прокл указывает, что это не были единственные сочинения этого рода. Однако ни одно из этих сочинений до Прокла уже не дошло. Все они были забыты, когда появился замечательный трактат по геометрии — «Начала» Евклида (Εὐκλείδου Στοιχεῖα). Это сочинение по своей структуре несет на себе явную печать схемы Аристотеля; в течение 2000 лет оно служило единственным руководством, по которому учились геометрии юноши и взрослые; от него шли и все замыслы дальнейшего, более совершенного обоснования геометрии. С него мы и начнем изложение учения об основаниях геометрии.

ГЛАВА ПЕРВАЯ

ЕВКЛИД, ЕГО ПРОДОЛЖАТЕЛИ И КОММЕНТАТОРЫ

§ 1. ЕВКЛИД И ЕГО «НАЧАЛА»

1. Сведения о личности Евклида. В 331 г. до нашей эры Александр Македонский, заканчивая организацию своей мировой монархии, основал в Египте город, который он предназначал сделать столицей империи, и назвал его Александрией. При таком назначении город тотчас же начал привлекать наиболее предприимчивые элементы как Греции, так и Востока. Купцы, ремесленники, вольноотпущенники стали в большом числе стекаться в Александрию и очень быстро развернули в ней торговлю и различного рода производства. После смерти Александра (323 г. до н. э.) и распада его монархии Александрия стала столицей греко-египетского государства, которое досталось одному из полководцев Александра — Птолемею, сыну Лага. Провозгласив себя вскоре царем, Птолемей стал родоначальником династии, правившей Египтом до 30 г. до н. э.

Желая возвысить свою столицу, Птолемеи покровительствовали развитию наук и искусств, ассигнуя для этого значительные средства и всячески поддерживая выдающихся ученых и художников. Эти меры, которые широко применял уже первый Птолемей, очень быстро привлекли в Александрию большое число известных греческих философов и их учеников, — тем более, что в Афинах прежней свободе мысли уже давно не было места. С конца IV столетия до н. э. Александрия становится центром интеллектуальной жизни эллинистического мира. Здесь возникла первая школа неоплатоников; здесь развернулась и деятельность Евклида.

О личности Евклида мы имеем очень мало сведений; они сводятся к нескольким дошедшим до нас указаниям Паппа Александрийского (III столетие н. э.) и, главным образом, к следующим строкам из предисловия Прокла (V столетие н. э.) к его комментариям к первой книге «Начал» Евклида [4].

«Немногим моложе их (Гермотима из Колофана и Филиппа из Медеи) был Евклид, который составил «Начала», собрал в одно целое многие предложения, принадлежавшие Евдоксу, усовершенствовал многое, принадлежавшее Теэтету, и дал неоспоримые доказательства тому, что было слабо доказано его предшественниками. Этот муж жил во времена первого Птолемея. Ибо Архимед, который жил непосредственно после первого [Птолемея], упоминает об Евклиде. Рассказывают также, что Птолемей однажды спросил его [Евклида], есть ли к геометрии путь короче того, который проложен в «Началах», на что Евклид ответил, что „к геометрии нет особенного пути для царей“¹⁾).

¹⁾ Последняя легенда передается также в применении к другим лицам и вряд ли заслуживает доверия.

Сопоставляя все эти указания, компетентные исследователи (Гейберг, Хис) считают достоверным следующее.

Деятельность Евклида протекала в Александрии, где он основал свою школу; расцвет этой деятельности падает на первые годы III столетия до нашей эры. Очень вероятно, что свое образование Евклид получил в Афинах у учеников Платона, в том числе у Аристотеля; к ним он примыкал в Александрии.

Много указаний, содержащих гораздо больше сведений об Евклиде (о месте его рождения, об его отце и даже деде), имеется у арабских авторов; но эти сведения противоречивы, имеют явную тенденцию приписать Евклиду восточное происхождение и совершенно не заслуживают доверия. Часто Евклида Александрийского смешивают с Евклидом из Мегары, философом, современником Платона.

2. Текст «Начал». Оригинальные манускрипты «Начал», имевшие обращение в эпоху Евклида и его учеников, до нас не дошли. В последующие столетия появилось много «изданий» «Начал». Ученые и преподаватели геометрии еще в древности восстанавливали «Начала» Евклида по оригинальным манускриптам или на основании сведений, которые они об этом сочинении имели из тех или иных источников. Манускрипты, составители которых пользовались значительным авторитетом, переписывались и циркулировали в более или менее значительном числе списков. Так возникали различные издания «Начал», отдельные экземпляры которых, однако, тоже не вполне совпадали. Составители манускриптов, как сказано, старались восстановить подлинный текст «Начал» по тем сведениям, которыми они располагали; нередко они, однако, считали нужным вносить в текст те или иные улучшения или дополнения: другие доказательства, разбор случаев, которых Евклид не предусмотрел, леммы и следствия. Переписчики, в свою очередь, нередко пытались исправлять составителя издания или даже самого Евклида; отсюда — расхождения текстов в различных греческих списках «Начал», которыми мы располагаем, даже расхождения в таких списках, которые ведут свое начало от одного издания.

Греческий текст «Начал» дошел до нас в довольно большом числе манускриптов. Большинство из них ведет свое начало от Теона Александрийского. Теон жил в Александрии в IV веке нашей эры и преподавал математику по Евклиду. Можно считать достоверным, что он выпустил издание «Начал». Как это издание, так и самые его лекции имели большое влияние на текст последующих изданий «Начал». Однако в 1808 г. французский ученый Пейрар (F. Peyrard) получил возможность использовать манускрипт X века, который хранился в Ватикане и содержал список «Начал» с текстом, несомненно составленным до Теона. Наконец, в различных библиотеках обнаружены также манускрипты, содержащие отдельные фрагменты «Начал» другого происхождения. Тщательное сличение всех материалов дало возможность почти полностью восстановить подлинный текст Евклида; сомнительных мест остается немного, преимущественно в аксиомах и определениях, «исправить» которые составители манускриптов и переписчики особенно старались. Таким сопоставлением манускриптов и исследованием текстов занимались многие математики и филологи, особенно искусные в восстановлении текстов греческих авторов. С большим успехом это совместно выполнили датский математик Гейберг (J. Heiberg) и германский филолог Менге (H. Menge). Установленный ими текст «Начал» и других дошедших до нас сочинений Евклида был выпущен издательством Гейбнера

в Лейпциге [5] и до настоящего времени считается наиболее достоверным текстом Евклида. Гейберг и Менге располагали шестью независимыми манускриптами, одни из которых содержали полный текст «Начал», другие — части его.

3. Схолии. Все манускрипты «Начал» изобилуют так называемыми «схолиями» (scholia). Это — в большинстве примечания неизвестных авторов, помещенные частью на полях, частью вслед за текстом Евклида. Некоторые схолии, помещенные в ранних изданиях на полях, в последующих включены в текст. Гейберг собрал до 1500 схолий и опубликовал их в 5-м томе указанного выше издания «Начал». Главная цель схолий — облегчить чтение сочинения. Однако значительное большинство их тривиально; лишь немногие из них имеют ценность, как обобщающие предложения Евклида или вносящие более или менее существенные поправки. Большее значение имеют исторические указания, часто содержащиеся в схолиях. Так, например, греческие авторы часто называют правильные многогранники «платоновыми телами», приписывая, таким образом, их открытие Платону. Между тем в схолии, помещенной в начале XIII книги, автор говорит: «... пять так называемых платоновых тел, которые однако, не принадлежат Платону: три из этих пяти тел открыты пифагорейцами, именно, куб, пирамида (тетраэдр) и додекаэдр, а остальные два — октаэдр и икосаэдр — открыты Теэтетом». Что эти тела были известны до Платона, в настоящее время не подлежит сомнению.

4. Проникновение «Начал» за пределы Греции и Византии. Еще в древности «Начала» Евклида проникли за пределы Греции. Об Евклиде упоминает уже Цицерон; но в ту пору (I столетие до н. э.) математические познания в Риме, как отмечает Цицерон, мало ценились и были мало распространены. Однако, в ближайшие века «Начала» стали постепенно проникать в круг образования, которое получали римские юноши господствующих классов. При том распространении, которым в этих классах пользовался греческий язык, Евклида изучали по-гречески. В IV и V-веках делались переводы отдельных отрывков из «Начал» на латинский язык, притом в очень свободной передаче. Боэтию (А. М. Boëthius, 480 — 524 гг. н. э.), издававшему ряд переводов различных греческих авторов на латинский язык, приписывали также перевод «Начал»; однако и это неправильно: до нас дошло несколько списков так называемой «Геометрии Боэтия»; они содержат только отдельные отрывки из «Начал».

Посредниками между древнегреческой и новоевропейской наукой были арабы. Во второй половине VIII столетия халиф ал-Мансур послал из Багдада миссию к византийскому императору и в результате получил от последнего некоторое количество греческих сочинений, в том числе экземпляр «Начал» Евклида. Позже, в первой половине IX века, халиф ал-Мамун также получил из Византии в числе других сочинений — Евклида. «Начала» были тогда же переведены на арабский язык ал-Хаджаджем (латинская транскрипция al-Hajja); это было если не первое, то одно из первых научных сочинений, переведенных на арабский язык. Было даже два варианта этого перевода — полный и сокращенный. Экземпляр последнего дошел до нас. В предисловии к нему сказано, что «в царствование Гаруна ал-Рашида Хаджадж был командирован в Византию для перевода этой книги. Когда же халифом стал ал-Мамун, Хаджадж убедился, что он сделается любимцем халифа, если для его

собственного употребления упростит и сократит книгу Евклида». Хаджадж выполнил это; он был, таким образом, более покладист, чем, по преданию, Евклид, и постарался найти для халифа более короткий путь к геометрии. Важно, однако, не это; эпизод во всяком случае свидетельствует, как высок был авторитет книги Евклида через 1000 слишком лет после того, как она была составлена.

После Хаджаджа, в IX — X веках, были сделаны еще другие переводы «Начал» на арабский язык (Исгак и Табит, Абу-Утман; в латинской транскрипции — Ishaq, Thabit, Abu-Uthman), частично дошедшие до нас. За этими переводами последовал ряд арабских изданий Евклида, сопровождаемых комментариями, иногда очень обширными; наибольший интерес приписывают работам Анариция (an-Nairizi, X столетие н. э.) и Туси (Nasir-addin at Tusi, XIII столетие н. э.), о которых нам придется говорить ниже (стр. 102 и 118). Однако Гейберг, тщательно изучивший арабские издания «Начал», приходит к заключению, что эти манускрипты как в качестве материала для восстановления подлинного текста Евклида, так и по научному своему достоинству стоят ниже греческих. При всем том арабы, как уже указано, в этом деле, несомненно, сыграли связующую роль между греческой наукой и новоевропейской. С арабского в первой четверти XII столетия англичанином Ательгартом (Athelhard of Bath) был сделан дошедший до нас перевод «Начал» на латинский язык; этот перевод сыграл большую роль. Появившееся после этого латинское издание Кампануса (Johannes Campanus, XIII в.) тесно с ним связано; оно повторяет текст Ательгарта лишь с небольшими исправлениями; рукопись Региомонтана (Johannes Regiomontanus), получившая распространение в Германии, также весьма мало отличается от перевода Ательгарта-Кампануса. Более того, первое печатное издание «Начал» также содержало перевод Кампануса. Таким образом, на распространение «Начал» в Европе арабские авторы, несомненно, имели большое влияние: до середины XVI столетия «Начала» были распространены в Европе в изданиях, зависевших от арабских переводов.

б. Печатные издания «Начал». Первое печатное издание «Начал» в переводе Кампануса появилось в 1482 г. [6]. Оно было выпущено в свет в Венеции Ратдольтом (Erhard Ratdolt), основавшим незадолго до того крупное издательство. Выполнение этого издания с его большим количеством чертежей представляло значительные трудности; с ним, по видимому, связано возникновение ксилографического метода воспроизведения рисунков. Если не считать нескольких брошюр ничтожного значения, то «Начала» были первым математическим сочинением, появившимся в печати.

С середины XVI столетия в связи с успехами книгопечатания, с одной стороны, и с быстрым ростом образования и научного исследования, с другой стороны, появляются печатные издания «Начал», число которых очень быстро возрастает. Они выходят сначала на греческом языке и в латинских переводах, а затем в различных странах на языках читателей и учащихся. Они выпускаются то в полном объеме, то в сокращениях; текст Евклида в них то более, то менее тщательно выверен. В большинстве изданий текст Евклида сопровождается схолиями и комментариями. Как и в рукописных изданиях, в текст Евклида часто вносятся изменения, иногда с целью исправления, улучшения содержания, иногда для облегчения его понимания. В некоторых изданиях к 13 книгам Евклида присоединяются книги XIV и XV, написанные после него. Перечислить здесь даже наиболее значительные издания нецелесообразно, да и не-

возможно ¹⁾. Мы все же здесь укажем четыре издания, которые сохранили руководящее значение — первые два больше по традиции, два другие, как представляющие собой результат тщательного исследования математического и филологического характера; эти издания должны быть рекомендованы тем, кто желает глубже изучить Евклида.

1) Базельское издание; выпущено Гринеем старшим (Simon Grynaeus) в Базеле в 1533 г. [⁸]; оно содержит греческий текст «Начал» и две дополнительные книги (XIV и XV), всё по Теону. В литературе это издание называют также главным изданием («editio princeps»), хотя это название оправдывается только по тому влиянию, которое оно имело на дальнейшие издания, а не по качеству текста.

2) Оксфордское издание; выпущено Давидом Грегори (David Gregory) в Оксфорде в 1703 г. [⁹]; содержит все дошедшие до нас сочинения Евклида, их греческий текст и латинский перевод.

3) Парижское издание; выпущено Пейраром в промежуток времени от 1814 до 1818 г. [¹⁰]; содержит текст тщательно проверенный путем сравнения теоновских манускриптов с манускриптом, найденным Пейраром (см. выше, стр. 29); греческий текст сопровождается латинским и французским переводами; считается лучшим изданием до Гейберга.

4) Берлинское издание; в 1824 — 1825 гг. Камерером (J. W. Camerer) был выпущен в Берлине в двух томах греческий текст первых шести книг «Начал» с латинским переводом их [¹¹]. Греческий текст составлен, главным образом, по изданию Пейрара, но с учетом базельского и оксфордского изданий; более того, трудно указать издателя или комментатора, которого бы Камерер не изучил. Книга содержит огромное число примечаний и указаний как геометрического, так и исторического содержания. «Нет тех слов похвалы, — замечает Хис, — которые были бы достаточно теплыми для оценки этой подлинной энциклопедии информации».

6. Школьные издания «Начал». Перечисленные основные издания «Начал» по своей структуре, по характеру комментариев и примечаний имеют в виду читателя, научно изучающего геометрию. Но «Начала» имели, конечно, и учебное значение; более того, до XVIII столетия они служили, можно сказать, единственной учебной книгой по геометрии. Однако, когда во второй половине XVIII века вследствие роста буржуазии и назревавших во Франции революционных настроений тяготение к образованию стало охватывать новые, более широкие слои населения, понадобилась и более доступная учебная книга по геометрии. Переходной ступенью к ней явились так называемые школьные издания «Начал» Евклида. Эти издания отличались тремя особенностями. Во-первых, это были переводы Евклида на родной язык учащихся. Во-вторых, они содержали только восемь книг: первые шесть планиметрических книг, XI и XII стереометрические; арифметические книги (VII—X) и трудная книга XIII вовсе опускались; иногда опускались также XI и XII книги; сохранялось только то, что необходимо для обучения геометрии в школе. Третью особенность школьных изданий составлял характер примечаний и дополнений: в них критика отходила на задний план; вместо традиционных «схолий» здесь помещались примечания и дополнения, имевшие целью пояснить текст, сделать его доступным даже начинающим учащимся.

¹⁾ В конце прошлого столетия итальянский профессор Рикарди (P. Riccardi) выпустил обширную библиографию изданий Евклида в четырех томах [⁷]. В издании «Начал» Хиса (см. ниже, стр. 34) перечислены издания «Начал», получившие широкое распространение. Очень большой список изданий «Начал» помещен также в русском издании «Начал» проф. Ващенко-Захарченко (см. ниже, стр. 35).

Повидимому, первое школьное издание Евклида было выпущено голландским математиком Таке (Andreas Tacquet) еще в 1654 г. [12]. Правда, перевод Таке сделан не на родной язык читателя, а на вульгарную латынь того времени. Но именно здесь в предисловии указаны остальные требования, которым должны удовлетворять издания, предназначенные «для начинающих» (*pro tironibus*). Книга имела значительный успех, несколько раз переиздавалась, а в 1714 г. переведена на английский язык.

Однако школьным изданием Евклида, действительно получившим широкое распространение, был английский перевод Симсона (R. Simson), выпущенный в 1756 г. [13]. Он выдержал 30 изданий. Текст сопровождается большим числом пояснительных примечаний, иногда очень поучительных. Это издание «Начал» именно в качестве школьного руководства настолько ценилось, что оно было полностью (со всеми примечаниями) переведено на немецкий язык.

Вслед за Симсоном школьное издание Евклида на английском языке было выпущено Плэйфером (J. Playfair [14]). Он пошел дальше Симсона и внес уже алгебраические обозначения, модернизировав этим как вторую книгу, так и всю теорию пропорций. К шести книгам Евклида, таким образом, видоизмененным, Плэйфер присоединил еще три свои статьи, содержавшие учения о спрямлении и квадратуре круга и о пересечении плоскостей; за этим следовали прямолинейная и сферическая тригонометрия и арифметика. Примечания, помещенные в конце книги, содержат указания на причины, побудившие автора внести те или иные изменения в подлинный текст Евклида. Книга Плэйфера также получила широкое распространение; она выдержала десять изданий.

Ту роль, которая в Англии принадлежала изданиям Симсона и Плэйфера, в Германии играл немецкий перевод «Начал» Лоренца (J. F. Lorenz [15]); первое издание его появилось в 1773 г., после чего и оно очень много раз повторялось. Лоренц пошел еще дальше в видоизменении текста Евклида. Он вносит алгебраическую символику всюду, где это возможно; сокращает самое изложение предложений; опускает части доказательства, мало одно от другого отличающиеся; вносит иногда пояснительные рассуждения в самый текст; еще чаще он приводит такие пояснения в примечаниях, которые, однако, у него никогда не разворачиваются в обширные рассуждения, как это было обычным у комментаторов Евклида (см. ниже).

До середины XIX столетия в Англии учились геометрии преимущественно по Симсону, в Германии — по Лоренцу. В Англии, впрочем, и до настоящего времени во многих средних школах учебником служат «Начала» Евклида. Еще в 1862 г. известный математик и педагог Тоттентер (J. Todhunter) выпустил издание «Начал» [16], указав на титуле книги, что она предназначена для употребления в школах и колледжах. Компактная, хорошо напечатанная, без чрезмерного обилия примечаний, она выдержала много изданий и очень ценится не только в Англии.

Хис приводит большой список английских изданий «Начал»; заканчивая их изданием Тоттентера, он замечает: «Более поздних английских изданий [т. е. вышедших позже 1862 г.] я перечислять не стану; имя им легион; их задача обыкновенно заключается в том, чтобы приспособить «Начала» для употребления в школе; с этой целью делаются самые разнообразные отклонения от текста и порядка предложений Евклида» 1).

1) Речь, таким образом, идет о сочинениях, которые, собственно, трудно даже назвать изданиями Евклида, например издание Дешаля (см. стр. 34).

Во Франции дело обстояло несколько иначе. Школьное издание «Начал» во Франции было выпущено Дешалем (С. F. Dechales) в XVII столетии [17]; оно содержало 8 книг и очень удачно составленные разъяснительные примечания, выдержало много изданий, было переведено на английский и итальянский языки. Но с середины XVIII столетия во французской школе «Начала» заменяются новыми учебными книгами по геометрии. В 1741 г. появился написанный на французском языке небольшой, но очень талантливо составленный учебник геометрии Клеро [1]. В 1794 г. Лежандр (А. М. Legendre) выпустил свои «Начала» геометрии [18], которые вытеснили Евклида из средней школы не только во Франции, но и во всей Европе, за исключением разве некоторых английских школ. Сопоставление этих двух книг — «Начал» Евклида и «Начал» Лежандра — мы сделаем ниже, после обстоятельного изложения содержания «Начал» Евклида¹⁾.

7. Новейшие издания «Начал». «Начала» Евклида утратили значение школьной книги; но они сохранили интерес как научное изложение геометрии, как лучший памятник эллинской науки, как точка отправления всех дальнейших исследований по основаниям геометрии. Именно в последние сто лет в связи с общими успехами в деле расшифровки древних манускриптов производились тщательные исследования текстов Евклида. В результате появились издания «Начал» высокого научного значения. Мы уже назвали выше издание Гейберга и Менге ([⁵], 1883—1896), содержащее текст всех дошедших до нас сочинений Евклида, который в настоящее время считается наиболее достоверным. Предисловие к нему, составленное на латинском языке, представляет собою монографию по сличению манускриптов, которыми издатели располагали.

В 1908 г. Хис (Т. L. Heath) выпустил перевод гейбергова текста «Начал» на английский язык с очень обстоятельным предисловием и многочисленными примечаниями [19]. Предисловие содержит тщательно выверенные литературные и исторические сведения и обзор материала во всех его частях. Примечаниями сопровождается почти каждое предложение; они содержат обстоятельный обзор взглядов и соображений различных авторов по каждому вопросу, возникающему при внимательном изучении «Начал».

Издания Гейберга и Хиса дополняют одно другое и вместе составляют исчерпывающий трактат по «Началам» Евклида. Несмотря на большой объем (3 тома, по 30 печатных листов в каждом), книги Хиса были переизданы в 1926 г.

В 1925 г. итальянские математики начали выпускать итальянский перевод того же текста [20]. Он также сопровождается примечаниями, но в гораздо меньшем числе. Читателю, который не склонен к специальному глубокому изучению Евклида, это издание подойдет больше, чем книги Хиса.

8. Русские издания «Начал». В России было выпущено пять изданий «Начал». Первые три из них относятся еще к XVIII веку. Издание И. Сатарова было выпущено в 1739 г. [21] и представляет собой перевод восьми книг «Начал» с латинского языка, повидимому, с издания Таке [12]. Хотя перевод был произведен Сатаровым, но душой этого издания был проф. А. Фарварсон. Полное заглавие этого издания гласит: «Эвклидовы элементы, из двенадцати нефтоновых книг выбранные и в осмь книг чрез профессора математики Андрея Фархварсона сокращенные, с латинского на российский язык хирургусом Иваном Сатаровым преложенные». Фарварсон был англичанин, состоял профессором Абердинского универ-

¹⁾ См. стр. 107—108.

ситета. Когда Петр I в 1698 г. посетил Лондон, он пригласил Фарварсона в Россию. Это был человек в такой же мере добросовестный, как и энергичный. При его содействии в России были организованы сначала морское училище, а затем и морская Академия, в которой он состоял первым профессором математики. Ему мы обязаны первым русским изданием «Начал».

Через 30 лет был выпущен русский перевод «Начал», сделанный Н. Кургановым с французского языка [22], а еще через 15 лет, в 1784 г., появился перевод П. Суворова и В. Никитина [23], сделанный непосредственно с греческого текста под названием «Евклидовы стихи»¹⁾; в 1789 г. этот перевод был выпущен вторым изданием.

Несравненно лучше был выполнен перевод Петрушевского с оксфордского издания [9], выпущенный в 1819 г. [24]. В 1835 г. это издание было дополнено переводом седьмой, восьмой и девятой книг [25]. Сложная десятая книга в это издание не вошла, как не вошла она и ни в одно из последующих русских изданий.

Наконец, еще через полвека профессором Киевского университета М. Е. Ващенко-Захарченко был выпущен перевод «Начал» на русский язык [26], сделанный также с оксфордского издания [9]. М. Е. Ващенко-Захарченко принадлежал к числу тех немногих у нас энтузиастов Евклида, которые еще в конце XIX столетия отстаивали необходимость вести преподавание геометрии в гимназиях по Евклиду. Для этого он и выпустил свое издание «Начал», снабдив его многочисленными примечаниями и большим количеством задач. Издание содержит 12 книг — 10 книг Евклида (опущены арифметические книги VII, VIII и IX), а также так называемые XIV и XV книги. Обширное предисловие содержит изложение неевклидовой геометрии по Фришауфу (J. Frischau) [27]. Вряд ли, однако, это издание имеет преимущество перед очень тщательно выполненным переводом Петрушевского.

В настоящее время Гостехиздат приступил к печатанию нового русского издания «Начал»; перевод, сделанный с греческого текста Гейберга, и обширные, очень ценные комментарии выполнены профессором Д. Д. Мордухай-Болтовским. Первые два тома этого издания уже выпущены в свет [28].

9. Другие сочинения Евклида. При том значении, которое «Начала» Евклида имели как для изучения геометрии, так и для ее обоснования, нельзя не уделить здесь немного места и другим его сочинениям. Достоверно известно, что Евклид, кроме «Начал», составил еще не менее восьми сочинений. Из них сочинение, которое могло бы иметь для нас наибольший интерес, так называемые «Pseudaria»²⁾, безвозвратно утрачено. Из немногих строк, которые ему посвящает Прокл, можно заключить, что это было рассуждение о ложных выводах, имевшее целью предостеречь от них начинающих и людей «поверхностного ума». Утеряны также сочинения «Поверхности как геометрические места» и «Конические сечения». Судя по указанию Паппа Александрийского, последнее сочинение содержало начала учения о конических сечениях, которое Аполлоний позже развил и дополнил.

Утерянным нужно считать также сочинение «Поризмы» (Porismata), хотя о нем имеется много сведений и указаний у различных древних авторов; Симсону (автор школьного издания «Начал») и Шалю (M. Chasles)

¹⁾ Слово «стихи» имеет следующее происхождение. «Начала» по-латыни называли «элементами». Четыре стихи — земля, вода, воздух, огонь — назывались тем же словом «элементы».

²⁾ Затрудняемся перевести это название на русский язык, — повидимому — «ложные заключения».

удалось даже, как они полагают, восстановить на основе этих указаний текст сочинения. Несмотря на то, что о «Поризмах» сложилась целая литература, до сих пор нельзя считать вполне установленным, что, собственно, Евклид разумел под поризмами. По довольно подробным указаниям Прокла, «поризм» есть нечто среднее между теоремой и задачей. Теорема устанавливает существование некоторого соотношения или геометрического объекта; конструктивная задача требует построения некоторого объекта (точки, прямой, плоскости), существование которого должно быть решением задачи установлено. Поризм требует разыскания такого объекта, существование которого не подлежит сомнению (заранее известно). Следующий пример хорошо иллюстрирует это различие. Требование построить окружность, проходящую через данные три точки, не лежащие на одной прямой, есть задача; ее решением устанавливается существование центра требуемой окружности, а следовательно, и самой окружности. Аналогичное требование в «Началах» (III.1) выражено, однако, иначе: «Найти центр данной окружности»; здесь, таким образом, окружность считается заданной, существование центра не подлежит сомнению, его нужно найти; это поризм. Однако, указания других авторов не вполне сходятся с этим определением поризма. «При той неясности, которая царит в этом вопросе,—замечает Хис,—достоверным можно считать следующее: во-первых, поризмы определенно составляли часть высшей [в то время], а не элементарной геометрии, и, во-вторых, к числу поризмов принадлежали предложения, относящиеся ныне к учению о трансверсалиях и к проективной геометрии; к этому следует прибавить, что именно исследования по этому вопросу привели Шаля к понятию об «ангармоническом отношении». Заметим, что под названием «поризм» фигурирует также несколько теорем в тексте «Начал»; подлинность их не вполне достоверна; по характеру же их содержания это — непосредственные следствия предыдущих предложений.

Полностью сохранились, кроме «Начал», четыре сочинения Евклида.

1) «Данные» (Data). Сочинение содержит ряд предложений, которые устанавливают, что задание тех или иных элементов фигуры (численных или чисто геометрических) влечет за собой знание других ее элементов. Сочинение воспроизведено в 6-м томе сочинений Евклида издания Гейберга и Менге. Предложения, содержащиеся в этом сочинении, по большей части тривиальны; на них можно смотреть как на элементарные упражнения.

2) «Оптика» (Optica). Сочинение помещено в 7-м томе гейберговского издания; собственно геометрического материала не содержит.

3) «Феномены» (Phaenomena). Сочинение, по существу, астрономическое, но содержит 18 предложений сферической геометрии. Английский перевод помещен в виде приложения к оксфордскому изданию «Начал»^[9].

4) «О делениях» (De divisionibus). Сочинение содержит ряд задач на построение, сводящихся к делению фигур (треугольника, параллелограмма, трапеции, круга) на части, удовлетворяющие тем или иным требованиям; например, разделить треугольник на части по данному (рациональному) их отношению (т. е. отношению их площадей) прямой, проходящей через данную точку. Имеется английское издание этого сочинения^[9].

В общем, нужно сказать, что не дошедшие до нас другие сочинения Евклида не имеют существенного значения и в развитии учения об основах геометрии роли не сыграли.

В заключение заметим, что в библиотеке имени В. И. Ленина в Москве имеется значительное число различных изданий Евклида, в том числе все указанные выше.

§ 2. ОБЩИЙ ОБЗОР СОДЕРЖАНИЯ И СТРОЕНИЯ «НАЧАЛ».

1. **Значение заглавия «Начала».** Русское название сочинения Евклида «Начала» не вполне соответствует ни греческому заголовку «Στοιχεῖα», ни даже латинскому его переводу «Elementa». Что же означает оригинальное название? Слово «στοιχεῖα» было, конечно, в ходу до Евклида; Аристотель в следующих словах выясняет его значение в науке и в философии ¹⁾:

«Элементом называется то основное в составе вещи, из чего вещь складывается, причем [само] оно не делится [дальше] по виду так, чтобы образовать другой [низший] вид ²⁾,—таковы, например, элементы голоса, из которых голос состоит и на которые разлагается как на последние составные части, в то время как эти составные части уже не распадаются на другие звуки, отличные от них по виду... Подобным же образом говорят и об элементах геометрических чертежей—и вообще об элементах доказательств; это название носят доказательства основные и входящие в состав большего количества доказательств...».

Почти через тысячу лет к этому возвращается Прокл уже применительно к «Началам» Евклида. Он говорит [⁴⁾]:

«Геометрия в целом имеет в своем составе некоторые ведущие теоремы, играющие по отношению ко всему следующему роль исходного начала; эти теоремы все собой пронизывают и дают доказательства многих свойств. Эти теоремы называются элементами а м и. Их функции можно сравнить с функциями букв алфавита в отношении языка; и действительно, буквы по-гречески носят то же название—στοιχεῖα».

Вернее, основное значение слова στοιχεῖα, которое оно имело в повседневной греческой речи,—буквы. И отсюда, по аналогии, оно вошло в философскую литературу в значении элементов—основных составных частей; отсюда оно вошло и в заглавие сочинения Евклида. Возвращаемся к цитате из Прокла:

«И очень трудно,—продолжает он,—в каждой науке отобрать и расположить в надлежащем порядке элементы, из которых все дальнейшее следует, в которые все дальнейшее разрешается...

Такого рода трактат должен быть освобожден от всего лишнего (ибо это служило бы препятствием к приобретению знания); он должен отображать все, что охватывает предмет, и доводить это до конца (ибо это высшая услуга науке...); вместе с тем должно быть уделено большое внимание ясности и точности (ибо противное служило бы помехой нашему пониманию); нужно стараться выражать теоремы в широком охвате (ибо мелочное деление делает знание недоступным восприятию). И во всем этом система элементов Евклида превосходит все остальное; ибо польза ее сказывается в том, что она ведет к исследованию наиболее совершенных фигур ³⁾; ее ясность и совершенство обеспечиваются тем, что она восходит от более простого к более сложному, тем, что она основывает все

¹⁾ Метафизика, кн. V, гл. 3, стр. 81; цитируется здесь и в дальнейшем по русскому изданию в переводе и с примечаниями А. В. Кубицкого, М.—Л., 1934 г.

²⁾ То-есть, не может уже служить родом составляющих его видов.

³⁾ Вероятно, Прокл имеет в виду правильные многогранники, исследование которых завершает «Начала».

исследование на аксиомах; общность же доказательства обеспечивается тем, что оно переходит от начальных теорем, носящих характер принципов, к [сложным] объектам мышления».

Так характеризовали древние цель, установку и достоинства «Начал». Книга Евклида на тысячелетия установила то, что по настоящее время считается началами, элементами геометрии,—установила рамки элементарной геометрии.

2. Структура «Начал». «Начала» состоят из тринадцати книг, из которых первые шесть обнимают планиметрию; книги VII—IX, непосредственно к геометрии почти не относящиеся, содержат, как обыкновенно говорят, начала теории чисел, т. е. элементы учения о целом числе; книга X содержит геометрическую теорию иррациональных величин; книги XI—XIII обнимают стереометрию, в частности, книга XIII посвящена учению о правильных многогранниках. Некоторые авторы, в том числе и Прокл, считают вероятным, что основная цель «Начал» заключалась в том, чтобы дать исчерпывающую теорию учения о правильных многогранниках, так называемых платоновых телах ¹⁾. Однако нельзя не видеть, что это только тенденция учеников и последователей Платона поднимать ореол своего учителя.

К тринадцати книгам «Начал» примыкают две небольшие монографии, обыкновенно называемые четырнадцатой и пятнадцатой книгами «Начал»; они помещены во многих изданиях. Их первоначально приписывали Евклиду; но, как выяснено, первая из них принадлежит Гипсиклусу Александрийскому, ученику Евклида; автор второй остается неизвестным.

Каждая книга «Начал» начинается определением всех терминов, которые в ней в первый раз появляются; первой книге предпосланы также аксиомы и постулаты. За ними следуют предложения. Под этим общим названием идут то теоремы, то задачи (конструктивные). Изложение всех предложений строится по совершенно единообразной схеме. Оно начинается формулировкой предложения, за которой следует повторное ее изложение с указанием применительно к чертежу того, что дано и что требуется доказать или сделать (буквенные обозначения введены задолго до Евклида). За этим следует главная часть—доказательство, опирающееся на предыдущие предложения, определения, постулаты и аксиомы. Собственно ссылок на нумерованные постулаты, аксиомы или предложения у Евклида нет; он просто повторяет постулат или предложение, на котором тот или иной отдельный вывод основывается. Предложение заканчивается заключением, которое повторяет его содержание, теперь уже доказанное, установленное (например, предложение 1.32 ²⁾: «следовательно, сумма углов треугольника равна двум прямым»); за этим неизменно следует стереотипная фраза «ὅθεν ἔδει δεῖξαι» (что и требовалось доказать) или, в случае задачи, «ὅθεν ἔδει ποιῆσαι» (что и требовалось сделать). Изложение доказательств отличается подробностью; автор старается не оставить у читателя никаких сомнений. Там, где то или иное утверждение относится к нескольким аналогичным частям той же фигуры, Евклид только изредка считает нужным повторно излагать явно тривиальные соображения. Вообще же, даже там, где возможны различные случаи—различное расположение частей фигуры, каждое из которых требует некоторой модификации доказательства,—Евклид рассматривает только

¹⁾ См. предыдущую сноску.

²⁾ Согласно установившемуся обычаю, мы будем обозначать номер книги «Начал» римской цифрой, номер предложения—арабской.

один случай, обычно—наиболее сложный. Рассмотрением всех возможных случаев, часто очень тривиальных, охотно занимаются комментаторы Евклида.

Среди теорем имеются такие, которые носят названия поризмов или лемм. Они не имеют особого номера, а примыкают к тому или иному предложению. Поризмов в «Началах» немного, и вряд ли это название здесь соответствует тому значению, которое с ним связывается в специальном сочинении «Поризмы»¹⁾ и которое вызвало много споров. В тексте «Начал» поризм—просто следствие, т. е. теорема, в такой мере непосредственно вытекающая из предыдущей, что доказательство ее, как тривиальное, опускается. Лемма—это вспомогательное предложение, которому было бы целесообразно дать место до доказательства теоремы. Так, 14-му предложению X книги предшествует лемма—решение задачи—построить квадрат, равновеликий разности двух данных квадратов. Она могла бы быть с успехом помещена в конце I книги, но нашла себе место там, где понадобилась. Поризмов, как уже сказано, в «Началах» немного; лемм значительно больше; их особенно много в последних книгах, почему некоторые авторы сомневаются в их подлинности.

Вся система геометрии в «Началах» строится строго синтетически; каждое доказательство представляет собой цепь умозаключений, развертывающихся из задания. Анализа, предугадывающего ход рассуждения или построения, нигде нет. Евклид предпочитает прямой вывод; но он, повидимому, первый широко пользовался методом «приведения к абсурду», особенно при доказательстве обратных теорем.

Изложение «Начал» носит строго догматический характер, как часто говорят,—эпический: автор рассказывает читателю содержание теоремы и развертывает перед ним доказательство. Что привело к этому предложению, какова связь между отдельными предложениями, что делает необходимым или целесообразным принятое автором расположение теорем—это нигде не указывается; какую цель преследуют отдельные части сочинения, автор нигде не разъясняет,—читатель должен это усмотреть сам. Иногда это несомненно затрудняет чтение: нелегко читатель разбирается, например, в трудной десятой книге, недоумевая, для чего она понадобится; он поймет это только при чтении тринадцатой книги.

Самый характер всего сочинения глубоко теоретический. Цель и задачи геометрии, как и самой книги, нигде не указаны. Это, может быть, и подало повод усматривать цель сочинения в построении полной теории правильных тел.

Стобей²⁾ передает следующую легенду. Некто, начавший читать геометрию под руководством Евклида, проштудировав первую теорему, спросил учителя: «Что я приобрету от изучения этих вещей?» В ответ Евклид позвал раба и сказал ему: «Дай ему три обола, потому что он хочет получить доход от того, чему он учится».

В соответствии с этой установкой «Начала» Евклида совершенно не содержат того, что выражено в наименовании геометрии—прямой метрики, т. е. теорем, устанавливающих в числах длины линий, площади фигур, объемы тел³⁾. Они содержат только теоремы о пропорциональности тех

¹⁾ См. выше, стр. 35—36.

²⁾ Стобей Македонский—византийский ученый, эклектик (VI век н. э.), собрал для образования своего сына огромную коллекцию цитат, выдержек из сочинений различных авторов.

³⁾ С современной точки зрения, которая, как будет указано во втором томе настоящего сочинения, понимает метрическую геометрию шире, геометрия Евклида все же метрическая; но учения об измерении в указанном здесь смысле в «Началах» нет.

или иных вещей, которые служат подготовкой к метрике. Это тем более странно, что даже Платон, этот яркий ревнитель теоретической геометрии, настаивает на прикладном ее значении.

Таково общее содержание и характер этого замечательного сочинения. В своей структуре оно несет на себе явный отпечаток установок Платона и Аристотеля; оно имеет много глубоких недостатков идеологического и математического свойства, но для своего времени оно отличается удивительным совершенством. Знаменитый итальянский математик XVI столетия Кардано (G. Cardano) дает следующее выражение своему восхищению «Началами» Евклида: «Неоспорима крепость их догматов и их совершенство настолько абсолютны, что никакое другое сочинение по справедливости нельзя с ними сравнивать. Вследствие этого в них отражается такой свет истины, что, повидимому, только тот способен отличать в сложных вопросах геометрии истинное от ложного, кто усвоил Евклида».

И при всем том внимательное изучение этого сочинения обнаруживает в нем много дефектов; тонкий их анализ привел к тем идеям, из которых развернулось современное учение об основаниях геометрии. Развитие этого учения столь тесно связано с «Началами» Евклида, что изложение этого предмета нельзя начинать, не дав краткого обзора содержания «Начал»; мы здесь ограничимся при этом, главным образом планиметрией. Этот обзор мы проведем, однако, таким образом, чтобы он не только дал представление о «Началах» Евклида, но четко выяснил те моменты, которые привели к отходу от его геометрии — к так называемой «неевклидовой» геометрии.

§ 3. ИСХОДНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ «НАЧАЛ»

1. Определения, предшествующие первой книге. Как уже сказано выше, Евклид предпосылает каждой книге определения всех тех терминов (понятий), которые в ней встречаются. Это уже само по себе нецелесообразно; гораздо естественнее было бы каждому определению дать место там, где определяемое понятие появляется. Между тем, Евклид при этой своеобразной установке в первой же книге дает определения некоторых терминов, которыми он на протяжении всего сочинения вовсе не пользуется (ромб, ромбоид, трапеция).

Определения, предпосланные первой книге (их 23)¹⁾ отчетливо распадаются на две группы. Первую группу составляют первые 9 определений, которые мы здесь приводим текстуально. К этим девяти примыкают еще определения 13 и 14. Остальные определения составляют вторую группу.

«Определения»

1. Точка есть то, что не имеет частей.
2. Линия есть длина без ширины.
3. Концы линии суть точки.
4. Прямая есть линия, которая одинаково расположена относительно лежащих на ней точек.
5. Поверхность есть то, что имеет только длину и ширину.
6. Границы же поверхности суть линии.
7. Плоскость есть такая поверхность, которая одинаково расположена по отношению к лежащим на ней прямым.

¹⁾ Здесь, как и везде в дальнейшем, имеем в виду издание «Начал» Гейберга и Менге [5], с которого сделан перевод на русский язык Л. Д. Мордухай-Болтовским^[28] (наш перевод немногочисленно отличается от перевода Мордухай-Болтовского). В других изданиях определений больше (в некоторых даже свыше тридцати), вследствие того, что некоторые определения, охватывающие несколько терминов, разбиваются издателями на части.

8. Плоский угол есть взаимное наклонение двух линий на плоскости, которые друг друга встречают, но не расположены на одной прямой.

9. И если линии, образующие угол, прямые, то угол называется прямолинейным».

Приведенные определения не только составляют самое слабое место во всем сочинении, но в известной мере являются источником большинства его дефектов.

В то время как все сочинение явно имеет целью выполнить требования, которые Платон и особенно Аристотель предъявляют к выводной науке, перечисленные исходные определения находятся в полном противоречии с этими требованиями, с аристотелевой схемой. Прежде всего, по Аристотелю изложение всякой выводной науки должно начинаться указанием тех основных, наиболее общих понятий, к которым все остальные понятия приводятся, виды и разновидности которых они составляют. Все понятия, которыми та или иная научная дисциплина оперирует, как было выяснено во введении, должны определяться либо как виды общих категорий, либо как виды специальных, этой науке свойственных категорий—наиболее общих ее понятий, которые в этой дисциплине принимаются за исходные и поэтому определению не подлежат. При научном построении геометрии, на которую в школе Платона смотрели, как на самую совершенную из выводных наук, это основное требование должно было бы быть выполнено в первую очередь; это Евклидом не сделано, это—первородный грех, который, естественно, влечет за собою дальнейшие, чтобы не сказать—все остальные дефекты.

В самом деле, определяя точку, Евклид не следует аристотелеву правилу, не относит это понятие ни к какой категории, ни к какому родовому понятию. Можно это определение истолковать так: «точка есть нечто, что не имеет частей», но, как было указано выше, н е ч т о не есть категория, ибо под н е ч т о подходит всё; Евклид явно пользовался высказываниями своих предшественников; так, Аристотель говорит, что «точка имеет положение, но не имеет частей»; однако, ставя, таким образом, понятие «точки» в связь с категорией «положение», Аристотель не смотрит на это, как на определение точки. Многочисленные толкования этого определения древними и новыми авторами нисколько его не улучшают; нужно сказать просто, что никакого определения в этой формулировке нет.

Немногим лучше обстоит дело и с определением линии; поскольку длина и ширина ранее не определены и к основным понятиям не отнесены, определения в этой формулировке нет; критики совершенно правильно замечают, что длина есть понятие, присваиваемое линии, а никак не категория, в которую линия может быть включена.

Явно, сознавая слабость этих определений 1 и 2, Евклид присоединяет, повидимому, в пояснение их определение 3; но читатель недоумевает: что это—новое определение точки или некоторое свойство точки, из прежнего определения не проистекающее? Те же соображения относятся и к двойному определению поверхности (5 и 6).

Может быть, большее еще недоумение вызывает определение 4 (прямой линии). Трудно уяснить себе, что собственно означает: «линия одинаково расположена относительно всех своих точек». Если сделать натяжку, руководясь соображениями наглядности, то нельзя себе уяснить, почему этим свойством характеризуется прямая, когда им в такой же мере обладают окружность и винтовая линия. Трудно думать, что Евклид

не предусматривает таких непосредственно напрашивающихся возражений. Комментаторы считают поэтому, что Евклид в эту формулировку вкладывал некоторое специфическое содержание. Платон характеризовал прямую следующим образом: прямая характеризуется тем, что глаз, помещенный в одной из ее точек и вдоль нее смотрящий, видит все ее точки сливающимися в одну. Может быть, это содержание Евклид, приверженец Платона, вкладывал в свою формулировку, освобождая ее от зрительных ощущений. Такое толкование (Прокл) представляет, конечно, большую натяжку.

Определения 10—12 прямого, острого и тупого углов и перпендикуляра от таких существенных возражений свободны. Но определения 13 и 14 вновь вызывают недоумение. Они гласят:

«13. Граница есть край (конец) чего-нибудь.

14. Фигура есть то, что окаймляется одной или несколькими границами».

Определять понятие путем замены его названия синонимом — неправильно; это не только не соответствует аристотелеву правилу, но такой возможный дефект определения им даже предусматривается. Эти определения в том виде, как они формулированы, также не имеют ценности.

Остальные определения — окружности, ее центра и диаметра, полуокружности, прямолинейной фигуры, треугольника, четырехугольника, многоугольника и т. д., тривиальные уже и в то время, — принципиальных возражений не вызывают; незначительные дефекты формулировок, которые в них отмечаются, легко поддаются исправлению.

Помимо всех изложенных соображений, легко совершенно объективно усмотреть, что определения основных геометрических понятий 1—8, 13 и 14 научной ценности не имеют. В самом деле, определения понятий имеют научное значение только в том случае, когда на них основывается развитие дисциплины, когда из них выводятся дальнейшие свойства геометрических объектов. Так, все свойства окружности выводятся из обычного ее определения. Между тем, на протяжении всех тринадцати книг Евклид ни на одно из перечисленных определений не опирается; они ему не нужны, потому что не содержат характерных свойств определяемых понятий, они не научны. Понятия «точка», «прямая», «поверхность», «плоскость» у Евклида остаются рассматривать как основные понятия, введенные без определений; но тогда не нужно было их определять. Приводя многообразные возражения, которые высказывались против этих определений, Хис замечает:

«Истина заключается в том, что Евклид поставил себе неразрешимую задачу; как говорит Плэйфер в одной из своих схолий, повидимому, понятие «прямая линия» вследствие своей простоты не допускает правильного определения без помощи терминов, которые выражают понятия, уже содержащие в себе определяемое понятие или подлежащие предварительному определению».

Не останавливаясь здесь на том, в какой мере это соображение справедливо, заметим только, что определение исходных понятий, выяснение того, какие из них нужно оставить без определения, как использовать те понятия, которые не определены, — эти вопросы в деле обоснования геометрии принадлежали к числу наиболее трудных.

К этому нужно еще прибавить, что терминология у Евклида иногда не выдержана; так, под термином «прямая» Евклид подразумевает то неограниченную прямую, то отрезок прямой.

2. Постулаты. За определениями следуют постулаты и аксиомы.

Слово «постулат» (αἴτημα — требование, в точном латинском переводе—postulatum) впервые появляется у Аристотеля и притом только один раз ¹⁾. Он противопоставляет постулаты не аксиомам, а гипотезам; именно, он понимает под постулатом положение, которое не воспринимается учеником (читателем, диспутантом) безоговорочно,—нужно предъявить к нему требование, чтобы он это положение принял, признал. Самое название «требование», насколько можно судить, связано с диалогами—диспутами (см. стр. 20). Постулаты—это те положения, признания которых лицо, руководящее диспутом, требует от остальных участников диспута,—признав которые, они вынуждены будут признать все происходящие из них выводы. К вопросу о том, что надлежит понимать под гипотезами, аксиомами и постулатами, нам еще придется возвратиться при изложении взглядов комментаторов Евклида, главным образом Прокла (см. ниже, стр. 100). Здесь же заметим только, что после Аристотеля термин «аксиома» употреблялся в значениях, не вполне тождественных.

Соответственно этому, в «Началах» постулаты—это, повидимому, требования, которые читатель должен принять, приступая к изучению дисциплины (в данном случае геометрии), чтобы дальнейшие рассуждения не вызывали с его стороны возражений; это—исходные допущения данной дисциплины (у Евклида—геометрии); аксиомы же—это общие достояния ума, истины, которые признаются всяким человеком, которыми человек неизбежно руководится как во всяком научном, так и в любом повседневном рассуждении. Евклид, в отличие от Аристотеля, называет их «κοινὰ ἔννοιαι»—общие достояния ума ²⁾. Постулатов Евклид устанавливает пять.

«Нужно потребовать (Ἦτις δε βούλονται)

I. Чтобы от каждой точки к каждой точке можно было провести прямую линию.

II. И чтобы ограниченную прямую можно было непрерывно продолжать по прямой.

III. И чтобы вокруг любого центра на любом расстоянии ³⁾ можно было провести окружность.

IV. И чтобы все прямые углы были друг другу равны.

V. И чтобы всякий раз, как прямая, пересекая две прямые, образует с ними внутренние односторонние углы, составляющие [вместе] меньше двух прямых, эти прямые при неограниченном продолжении пересекались с той стороны, с которой эти углы составляют меньше двух прямых».

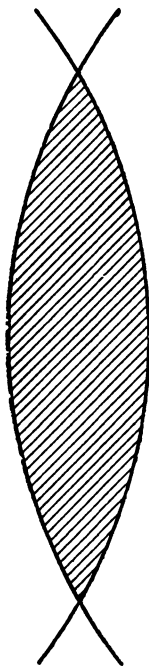
Много соображений и возражений высказано по поводу постулатов Евклида. Укажем наиболее существенные из них. Первые три постулата устанавливают допустимые построения, явно осуществляемые циркулем и линейкой. Некоторые авторы удерживают поэтому только эти три постулата и считают, что постулаты тем именно отличаются от аксиом, что устанавливают допускаемые средства геометрических построений. Эта точка зрения, однако, не оправдывается ни текстами манускриптов, ни употреблением терминов «постулат» и «аксиома» во многих случаях, когда они встречаются в последующей литературе.

¹⁾ Вторая аналитика, кн. I, гл. X.

²⁾ Термин «κοινὰ»—общие понятия—есть уже и у Аристотеля.

³⁾ То-есть любым радиусом. В греческом языке нет термина, соответствующего нашему слову «радиус»; поэтому Евклид говорит о «расстоянии» окружности от центра.

Формулировка первого постулата не содержит утверждения, что через две точки можно провести только одну прямую, как Евклид это, конечно, всегда подразумевает; необходимое дополнение некоторые древние авторы вносят в своеобразной форме, иногда в виде схолии (к доказательству четвертого предложения I книги), иногда в виде вставки в текст этого доказательства, иногда даже в виде добавочной аксиомы. Текст этой вставки гласит: «две прямые не могут заключать пространства». Смысл тот, что две прямые, пересекаясь в двух точках, «заключали бы пространство», заштрихованное на черт. 2. Не подлежит сомнению, что один из издателей «Начал», не находя оправдания тому утверждению, что при совпадении точек B и C с точками E и F прямая BC совпадает с прямой EF (I.4), поместил в подтверждение этого схолию; другой издатель признал эту схолию настолько существенной, что внес ее в текст, а кто-либо из последующих переписчиков даже вынес ее в аксиомы, не давая себе ясного отчета в различии между постулатами и аксиомами. Так искажался первоначальный текст Евклида.



Черт. 2.

В тексте второго постулата Евклид не отмечает, что «ограниченная прямая» может быть продолжена в обе стороны и что ни одно, ни другое продолжение не возвращается в точку исхода; между тем, пользуясь этим постулатом, Евклид, несомненно, предполагает то и другое.

Третий постулат вызывает сомнения у многих авторов. Есть ли в нем нужда? Отложив на каждой прямой, проходящей через данную точку, в одну и в другую сторону отрезок, равный данному радиусу, получим точки, геометрическое место которых и составит требуемую окружность. Но постулат именно и выражает требование, чтобы на каждом луче, выходящем из данной точки, можно было отложить отрезок, равный данному отрезку, выходящему из той же точки. Иначе говоря, если OA есть луч, выходящий из точки O , и A —произвольная точка на нем, то на каждом другом луче OA' , выходящем из точки O , есть точка A' , отстоящая от O на такое же расстояние, что и точка A . Избежать этот постулат было бы возможно, если бы были установлены другие постулаты, которые характеризовали бы движения, существующие в пространстве и на плоскости (возможное вращение прямой). Но Евклид избегает пользоваться движением; он прибегает к нему только два раза. Повидимому, именно поэтому он вводит и четвертый постулат, без которого также можно было бы обойтись, пользуясь надлежащим образом установленными движениями.

На пятом постулате мы здесь не будем останавливаться, так как будем им заниматься ниже очень подробно.

3. Аксиомы. Достоверных аксиом Евклида Гейберг считает четыре.

«I. [Вещи, величины] равные одной и той же [вещи или величине], равны между собой¹⁾).

II. И если равным придать равные, то получаются равные.

III. И если от равных отнять равные, то получаются равные.

В различных изданиях приводятся в качестве дополнительных аксиом варианты такого рода: удваивая равные, получаем равные;

¹⁾ В оригинале член во множественном числе среднего рода скрадывает подлежащее.

половины равных равны; если к неравным прибавить равные, то получаются неравные; целое больше части.

IV. И [вещи,] которые могут быть приведены в совмещение друг с другом, равны друг другу.

По поводу последней аксиомы было высказано много сомнений, соображений, критических замечаний различными авторами, начиная с античных геометров и философов (Герон Александрийский, Прокл и др.) и кончая авторами нового, даже новейшего времени (Киллинг, Веронезе, Таннери и др.); даже Шопенгауэр изливал свой яд в это действительно уязвимое место. Существо этих возражений сводится к следующему. Во-первых, содержание этой аксиомы носит явно геометрический характер; поэтому непонятно, почему она нашла место среди аксиом, а не среди постулатов. Она вносит сомнение в правильность точки зрения на различие между постулатами и аксиомами; если же эта точка зрения правильна, то эту аксиому надлежало бы отнести к числу постулатов. Во-вторых, аксиома устанавливает, собственно, условие конгруэнтности фигур, и потому ей нет места и среди постулатов; в несколько измененном виде ее содержание должно было бы найти себе место среди определений. В-третьих, совмещение геометрических объектов тесно связано с понятием движения; поэтому рассматриваемая аксиома могла бы претендовать на определенное содержание только после того, как было бы введено понятие «движение» и были бы установлены постулаты, его характеризующие. Все эти соображения, конечно, далеко не лишены основания; они послужили точками отправления для глубокого анализа понятия о геометрическом движении, об основанном на нем методе наложения, о конгруэнтности геометрических объектов. Входить в обсуждение всех этих соображений мы здесь не будем, — вопрос будет подробно рассмотрен в своем месте. У Евклида сделаны только первые попытки характеризовать конгруэнтность (аксиомы I и IV), они нуждаются в развитии.

Вся совокупность определений, аксиом и постулатов Евклида, несомненно, недостаточна для обоснования геометрии. Ими, например, совершенно не характеризуются такие существенные понятия, как «между» (точка на прямой «лежит между двумя ее точками»), «по одну и по разные стороны», «внутри и вне геометрического объекта». В аксиоматике Евклида не затронута вовсе идея непрерывности прямой, плоскости или пространства. Дефекты, как мы видели, имеются и в формулировках постулатов и аксиом. Проследить за тем, как сказывались эти дефекты, как они выправились, как их анализ привел к современной постановке обоснования геометрии, составляет главную задачу настоящего сочинения.

§ 4. ПЕРВАЯ ПОЛОВИНА ПЕРВОЙ КНИГИ «НАЧАЛ». УЧЕНИЕ ОБ ОТРЕЗКАХ, УГЛАХ И ТРЕУГОЛЬНИКАХ

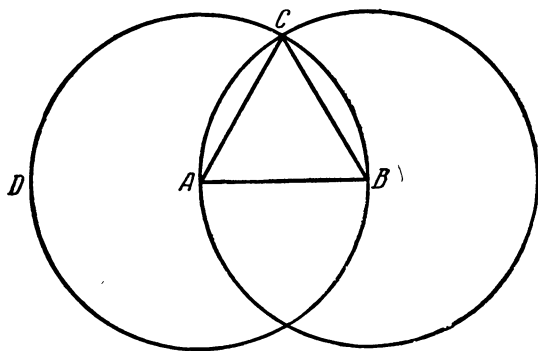
1. Вступление. Так как «Начала» служат точкой отправления всех исследований по основаниям геометрии, необходимо с этим сочинением ближе познакомиться. Обращаясь к изложению содержания первой книги «Начал», мы прежде всего дадим здесь почти полный перевод первых восьми ее предложений. Читатель получит возможность по этому краткому извлечению в некоторой мере уяснить себе характер изложения Евклида, в общих чертах описанный в § 2. Вместе с тем мы даем разбор доказательств этих начальных теорем и их дефектов.

Перевод классического сочинения, особенно написанного за два тысячелетия до нашего времени, представляет существенные трудности и, смотря по тем целям, которые переводчик себе ставит, различно выпол-

няется. Чаще всего как терминология, так и фразеология модифицируются, чтобы текст легче воспринимался и усваивался читателем, чтобы стиль перевода не производил неприятного впечатления. Имея в виду дать возможно более отчетливое представление об изложении автора, мы в переводе этих немногих предложений старались приблизиться к оригиналу, поскольку это возможно, даже жертвуя для этого, где необходимо, некоторой гладкостью стиля; там, где это не удастся выдержать, сделана пометка. Греческие буквы для обозначения точек в тексте и на чертежах заменены латинскими, как это обыкновенно делается в переводах «Начал» на европейские языки. Примечания, сопровождающие перевод, имеют целью, с одной стороны, отметить значение соответствующих предложений, а с другой стороны—осветить дефекты рассуждений Евклида. В прямые скобки заключены слова и ссылки, вставленные для уяснения текста.

2. Предложения I.1—3. Три основные задачи.

Предложение I.1. На данной конечной прямой линии построить равносторонний треуголь-



Черт. 3.

ник. Пусть AB будет данная конечная прямая линия (черт. 3). Требуется на прямой¹⁾ AB построить²⁾ равносторонний треугольник. Вокруг точки A , как центра, на расстоянии AB опишем окружность²⁾ BCD [пост. III]; далее вокруг точки B , как центра, на расстоянии BA опишем окружность ACE [пост. III]; и точку C , в которой ок-

ружности пересекаются, соединим с A и B прямыми CA и CB [пост. I]. И так как точка A есть центр окружности CDB , то [прямая] AC равна AB . Далее, так как точка B есть центр окружности CAE , то [прямая] BC равна BA ; но и [прямая] CA , как было указано, равна AB ; следовательно, каждая из прямых CA и CB равна AB ; но [вещи], равные той же [вещи], также равны друг другу; следовательно, CA также равно CB . Следовательно, прямые CA , AB , BC равны друг другу [акс. I]. Следовательно, ABC есть равносторонний треугольник; и он построен на данной ограниченной прямой AB ,—что и требовалось сделать.

Основным моментом в этом рассуждении служит утверждение, что окружности BCD и ACE пересекаются в некоторой точке C , притом не лежащей на прямой AB . И то, и другое не обосновано и непосредственно не может быть доказано теми средствами, которыми Евклид здесь располагает. Это слабое место доказательства, вследствие которого оно свою логическую выдержанность теряет, отмечается всеми комментаторами—

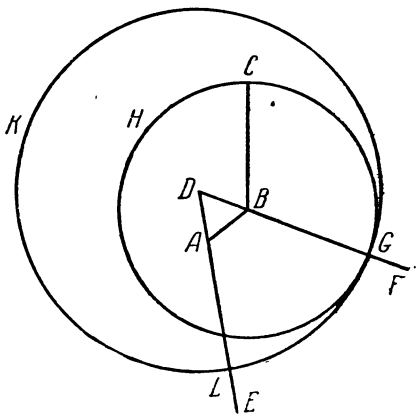
¹⁾ Евклид в дальнейшем обыкновенно говорит «прямая» вместо «конечная прямая»; слово отрезок (τμήμα от слова τέμνω—режу, отсекаю) у него появляется только во второй книге; сохраняем его терминологично. К неопределенностям этого повести не может.

²⁾ Во всех этих случаях (здесь и ниже) у Евклида глагол приводится в третьем лице в повелительном наклонении: пусть будет построен треугольник, пусть будет описана окружность.

как древними, так и новыми. Этот дефект можно исправить, пользуясь непрерывностью окружности, отличив точки одной окружности, лежащие внутри и вне другой, но это отнюдь не просто.

Предложение I.2. При данной точке поместить прямую, равную данной прямой. Пусть A будет данная точка, BC —данная прямая; требуется при точке A поместить прямую, равную данной прямой BC (черт. 4).

Точку A соединим с точкой B прямой AB [пост. I] и на ней построим равносторонний треугольник DAB [предл. I.1]. Продолжим прямые DA и DB ; пусть AE и BF составят эти продолжения [пост. II]; вокруг точки B , как центра, на расстоянии BC опишем окружность CGH и затем вокруг точки D , как центра, на расстоянии DG опишем окружность GKL [пост. III]. Тогда, так как точка B есть центр окружности CGH , то BC равно BG ; далее, так как D есть центр окружности GKL , то DL равно DG . Вместе с тем DA равно DB ; следовательно, остаток AL равен остатку BG [акс. III]. Но было также доказано, что BC равно BG ; следовательно, каждая из прямых AL , BC равна BG . Вещи же, равные той же вещи, равны между собой [акс. I]. Следовательно, AL равно BC . Следовательно, при данной точке A помещена прямая AL , равная прямой BC ,—что и требовалось сделать.



Черт. 4.

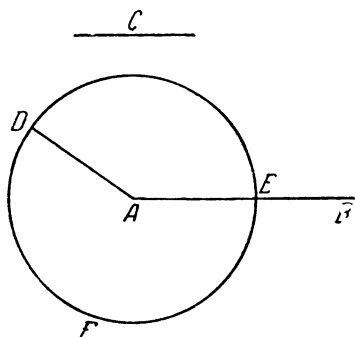
Насколько скрупулезно Евклид здесь проводит все шаги доказательства, настолько свободно он останавливается только на одном из возможных случаев расположения частей чертежа; этим он предоставил широкое поприще комментаторам (Прокл и др.), классифицирующим все случаи, которые здесь могут представиться, и разбирающим каждый в отдельности. Самое предложение могло бы казаться излишним, но оно имеет глубокий смысл: оно устанавливает, что достаточно постулировать возможность перенесения отрезка на любую прямую, выходящую из его конца, чтобы тем самым признать возможным перенести его в любую другую точку. Здесь отчетливо выступает значение постулата III. Гильберт формулирует это так: на циркуль можно смотреть, как на инструмент, служащий для двойной цели—для черчения окружности вокруг данной точки (радиусом, который определяется центром и одной точкой окружности) и для перенесения отрезка из одной точки в другую (*Streckenüberträger*). Евклид показывает уже здесь, что второе построение циркулем всегда может быть осуществлено путем повторного выполнения первого.

Простое, но тонкое рассуждение, которым это доказывается, все же имеет дефект. В доказательстве Евклида не указывается, о какой точке G идет речь, как эта точка появляется. Чертеж это выясняет: это есть пересечение прямой (точнее, луча) BF с окружностью CGH . Постулат III требует, чтобы вокруг каждой точки B , как центра, любым радиусом BC можно было описать окружность. Следует ли из этого, что на каждой прямой, выходящей из центра B (точнее, на каждом луче), есть точка,

принадлежащая окружности? Устранение этого сомнения, как и указанного выше дефекта, в предыдущем предложении обыкновенно проводится рассуждением, основанным на непрерывности прямой и окружности. Между тем, постулата, устанавливающего эту непрерывность, у Евклида нет; нет и никакого другого положения, которое могло бы его заменить. К вопросу о непрерывности прямой, как и о других недостаточно освещенных моментах, нам еще придется не раз возвращаться; отмечаем его здесь, чтобы показать, какие серьезные вопросы возникают уже при анализе первых рассуждений Евклида.

Вместе с тем, укажем еще, что Гильберт предпочитает ввести такой постулат: на каждом луче можно от вершины отложить отрезок, равный любому данному отрезку¹⁾. Это покрывает постулат III Евклида и делает излишними остроумные, но все же недостаточно точные рассуждения, содержащиеся в доказательстве предложения I.2.

Предложение I.3. Даны две неравные прямые линии; отсечь от большей прямую, равную меньшей.



Черт. 5.

Пусть AB и C —данные неравные прямые и пусть AB больше C (черт. 5). Требуется от большей прямой AB отсечь прямую, равную меньшей C . При точке A поместим прямую AD , равную прямой C [предл. 2]; и вокруг центра A на расстоянии AD опишем окружность DEF [пост. III]. Теперь, так как A есть центр окружности DEF , то AE равно AD [опр. 15]. Но C также равняется AD ; следовательно, каждая из прямых линий AE и C равна AD ; так что [прямая] AE равна C [акс. I]. Следовательно, были

даны две прямые AB и C и от большей AB отсечена AE , равная меньшей C , — что и требовалось сделать.

Когда предыдущее предложение установлено, то это рассуждение основывается на том, что точка E неизбежно попадет между точками A и B . Евклид это явно принимает как выражение того, что отрезок C меньше AB . Но это все же должно быть обосновано, а главное—для обоснования того, что точка E лежит между A и B , должно быть предварительно определено, что это собственно означает. Учение о расположении точек на прямой, на плоскости и в пространстве, т. е. установление таких понятий, как «между», «внутри», «вне», в различных случаях у Евклида совершенно отсутствует; и этот серьезный дефект дает себя чувствовать уже в первых его предложениях.

3. Предложения I.4—6. Первый признак равенства треугольников. Основное свойство равнобедренного треугольника и его обращение

Предложение I.4. Если в двух треугольниках две стороны одного равны двум сторонам другого и углы, содержащиеся между равными сторонами, равны, то и основание одного треугольника равно

¹⁾ Более точное выражение постулата Гильберта читатель найдет ниже, в изложении его аксиоматики (во втором томе настоящего сочинения).

основанию другого, и один треугольник равен другому, и остальные углы одного треугольника соответственно равны остальным углам другого, именно равны углы, противолежащие равным сторонам.

Тогда как первые три предложения содержат только задачи, четвертое содержит уже теорему. Доказательство для нас тривиальное; следуя Евклиду, его почти без изменения воспроизводят все учебники геометрии. Однако оно вызвало много соображений, справедливых возражений со стороны комментаторов. При доказательстве этого предложения Евклид пользуется наложением, т. е. движением фигуры—в первый раз; и, главное, помимо этого случая, он пользуется этим приемом еще только один раз—при доказательстве предложения 8 (равенство треугольников по трем сторонам). Прежде всего, не ясно, почему Евклид так ограниченно пользуется движением. Некоторые авторы, настойчивее других Киллинг (W. Killing)¹⁾, полагают, что Платон и Аристотель не считали правильным пользоваться движением в геометрии. Так, в «Метафизике»²⁾ Аристотель говорит: «Математические предметы чужды движению, за исключением тех, которые относятся к астрономии»³⁾. В другом месте «Метафизики»⁴⁾ Аристотель говорит: «Что касается физики, она занимается предметами, имеющими начало движения в самих себе; с другой стороны, математика, это—некоторая теоретическая наука, которая рассматривает объекты пребывающие» [в покое, *μένοντα*]. Таких цитат приводят много. Нужно, однако, сказать, что это спорно; не ясно, надлежит ли именно так понимать мысль Аристотеля; другие авторы этой точки зрения не разделяют. Входить в эти споры мы здесь не станем. Ясно только то, что Евклид, вообще, явно избегает пользоваться движением. Несомненно, однако, что в этом вопросе следовало бы занять определенную позицию: либо считать движение актом, которым геометрия может пользоваться; тогда не только нет основания ограничить его применение одним или двумя предложениями, но целесообразно сделать его основным методом построения геометрии; приемы, которыми решаются задачи предложений 1.1—3, становятся излишними, требуемое построение может быть заменено в том и другом случае одним движением; либо же от движения, как геометрического акта, отказаться, тогда им нельзя пользоваться вовсе. Если стоять на первой точке зрения, то нужно установить и постулировать свойства, характеризующие допустимые движения; на этой именно точке зрения стоит Ф. Клейн (F. Klein). Если стоять на второй точке зрения, то утверждение, содержащееся в предложении 4, нужно просто постулировать; так и делает Гильберт. Евклид занимает двойственную позицию; это, конечно, не принадлежит к достоинствам его «Начал». Учение о движении в геометрии (о геометрическом движении) полностью получит в дальнейшем необходимое освещение; здесь важно отметить, что этот вопрос возникает уже при чтении первых предложений «Начал».

Поскольку, однако, мы остановились на этом вопросе, следует отметить еще один момент, с ним связанный. При всей ограниченности, с которой Евклид пользуется наложением, он, как видно из доказательства следующего (5-го) предложения, допускает наложение и в том случае, когда его нельзя осуществить, не выходя из плоскости, когда один из треуголь-

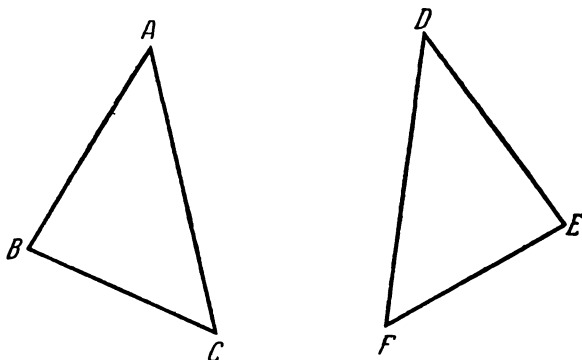
¹⁾ [30], т. II, стр. 4—5.

²⁾ Кн. I, гл. 8, стр. 33.

³⁾ Астрономию Платон и Аристотель относили к числу математических наук.

⁴⁾ Кн. XI, гл. 7, стр. 191.

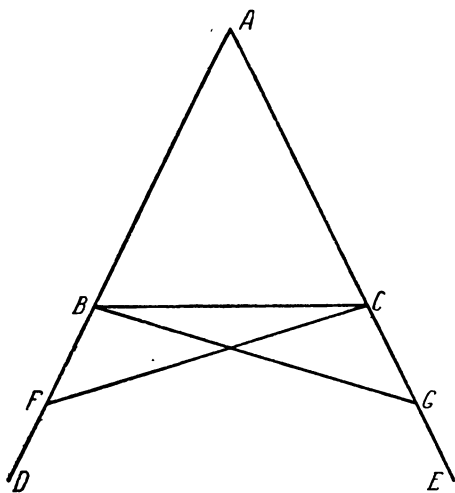
ников нужно для этого «опрокинуть», вывести из плоскости, в которой он лежит (треугольники ABC и DEF на чертеже 6). Между тем при построении планиметрии весьма желательно оперировать внутренними сред-



Черт. 6.

ствами, т. е. оставаясь в плоскости, геометрия которой строится. Отступление от этого также часто ставится Евклиду в упрек.

Предложение I. 5. В равнобедренном треугольнике углы при основании друг другу равны, и если продолжить равные прямые, то углы под основанием будут друг другу равны. Пусть ABC будет равнобедренный треугольник, в котором сторона AB равна стороне AC (черт. 7); пусть



Черт. 7.

прямые линии BD , CE будут продолжения прямых AB , AC [пост. II]. Утверждаю, что угол ABC равен углу ACB и угол CBD —углу BCE .

Пусть F будет произвольная точка на BD . От большей [прямой] AE отсечем AG , меньшую, равную AF [I.3]; проведем соединяющие прямые FC , GB [пост. I]. Тогда, так как AF равно AG и AB [равно] AC , то две стороны [треугольника AFC] FA , AC соответственно равны двум сторонам GA , AB [треугольника AGB]; и они заключают общий угол FAG . Следовательно, основание FC равно основанию GB , и треугольник AFC равен треугольнику

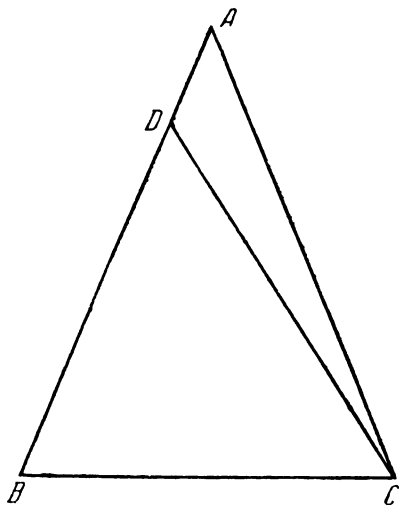
AGB ; и остальные углы соответственно равны остальным углам, именно тем, которые противолежат равным сторонам, т. е. угол ACF —углу ABG , и угол AFC —углу AGB . И так как вся сторона AF равна всей [стороне] AG и на них AB равно AC , то остаток BF равен остатку CG . Но [сторона] FC , как было доказано, равна GB ; следовательно, две стороны BF , FC соответственно равны двум сторонам CG , GB и угол BFC равен углу CGB (основание же

BC у них общее¹⁾; следовательно, треугольник BFC также равен треугольнику CGB , и остальные углы соответственно равны остальным углам, именно те, которые лежат против равных сторон. Следовательно, угол FBC равен углу GCB и угол BCF равен углу CBG . Вследствие этого, так как было доказано, что весь угол ABG равен углу ACF и в них угол CBG равен углу BCF , то остаточный угол ABC равен остаточному углу ACB , и они прилежат основанию треугольника ABC . Но было также доказано, что угол FBC равен углу GCB , и они лежат под основанием. Следовательно,...

По Аристотелю, это предложение установлено Фалесом. Уже Папп указал, что доказательство излишне усложнено; поскольку углы BAC и CAE Евклид всегда считает равными, можно смотреть на данный равнобедренный треугольник как на два треугольника ABC и ACB , приведенные к общему основанию; тогда равенство углов при основании непосредственно вытекает из теоремы I.4.

Предложение I.6. Если в треугольнике два угла друг другу равны, то стороны, противолежащие равным углам, также равны друг другу. Пусть ABC будет треугольник, в котором угол ABC равен углу ACB (черт. 8). Утверждаю, что сторона AB также равна стороне AC .

Ибо, если [сторона] AB не равна [стороне] AC , то одна из них больше другой. Пусть AB большая [сторона], и от большей [стороны] AB отсечем DB , равную меньшей AC [I.3]. Соединим точки C и D прямой CD . Тогда, поскольку DB [сторона треугольника DBC] равна AC [стороне треугольника ACB], сторона же BC общая, две стороны DB и BC [треугольника DBC] соответственно равны двум сторонам AC и CB [треугольника ACB], угол же DBC равен углу ACB , то DC равна AB и треугольник DBC равен треугольнику ACB , меньший большему, — что лишено смысла.



Черт. 8.

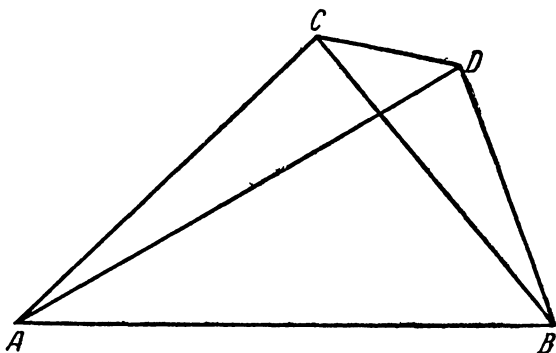
И этому доказательству, конечно, нельзя отказать в остроумии, хотя оно может быть упрощено, если его поместить после предложения I.18, устанавливающего, что в треугольнике против большей стороны лежит больший угол (как это теперь обыкновенно делается). Но, помимо этого, самое заключение нельзя считать строго обоснованным. На чем основано утверждение, что треугольник DBC , составляющий часть треугольника ACB , не конгруэнтен ему, т. е. не может быть с ним совмещен надлежащим движением (Хис [¹⁹]). Спрашивается, можно ли утверждать, что треугольник DBC , будучи наложен на треугольник ACB так, чтобы основание первого BC совместились с основанием второго CB (т. е. чтобы точка B совпала с C , а C с B), не может с ним совместиться? Во всяком случае не видно, чтобы это непосредственно вытекало из аксиоматики

¹⁾ Содержащиеся здесь в скобках слова евклидова текста лишние.

Евклида. Некоторые издатели «Начал» вводят для этого дополнительную аксиому—«часть меньше целого»,—пример того, как возникали аксиомы, добавочные к евклидовым. Вопрос таким добавочным допущением не исчерпывается, а нуждается в дополнительной дискуссии, которая и найдет себе место ниже. Отметим еще, что при доказательстве этого предложения Евклид в первый раз пользуется рассуждением от противного.

4. Предложения I.7, 8. Второй признак равенства треугольников

Предложение I.7. Если две прямые линии построены над прямой [при ее концах] и встречаются в некоторой точке, то над той же прямой линией по ту же сторону от нее невозможно построить две другие прямые, встречающиеся в другой точке и соответственно равные тем же прямым, притом так, чтобы равны были прямые, выходящие из того же конца¹⁾.



Черт. 9.

Ибо, если бы это было возможно, пусть, кроме двух прямых линий AC , CB , построенных над прямой линией AB и встречающихся

в точке C , были бы по ту же сторону от нее построены две другие прямые AD и DB (черт. 9), встречающиеся в другой точке D , соответственно равные первым двум, именно каждая той, которая выходит из того же конца,—так что [прямая] CA равна DA , выходящей с нею из того же конца A , и CB равна DB , имеющей с нею тот же конец B ; соединим точки C и D прямой CD . Тогда, так как [прямая] AC равна AD , то угол ACD также равен углу ADC [I.5]. Следовательно, угол ADC больше угла DCB ; следовательно, угол CDB и подавно больше угла DCB . Но, так как [прямая] CB равна DB , то угол CDB также равен углу DCB ; но было доказано, что он много больше его, что невозможно. Следовательно,...

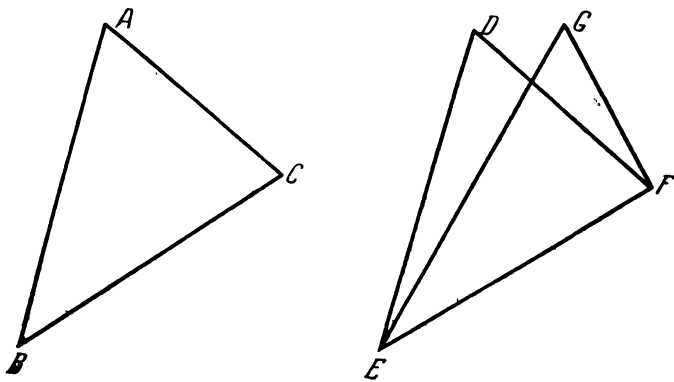
Те же сомнения, которые были указаны относительно доказательства предложения I.6, возникают и здесь. Угол DCB признается меньшим угла DCA , потому что его сторона CB проходит внутри угла DCA . Но какое содержание имеет утверждение, что луч CB расположен внутри угла DCA , т. е. между лучами CA и CD ? Понятие «между» здесь по отношению к лучам пучка снова появляется без малейшей попытки его определить или охарактеризовать надлежащими постулатами. Вопрос о расположении лучей в пучке остается столь же невыясненным, как вопрос о расположении точек прямой.

В такой же мере не выяснено, что надлежит разуметь под выражением «прямые расположены по одну сторону прямой AB ». Это общий цикл вопросов, относящихся к расположению точек на прямой, лучей

¹⁾ Здесь особенно неприятно, что Евклид говорит о прямых, а не об ограниченных прямых, т. е. прямолинейных отрезках. Хис совершенно справедливо замечает, что эта теорема выражена очень тяжеловесно; перевести ее дословно очень трудно.

в пучке; к точному выяснению этих понятий Евклид даже не подходит; слишком уже они ему кажутся наглядно ясными. По обыкновению, Евклид рассматривает только один случай расположения точки D относительно прямой CB ; комментаторы (Симсон и др.) разбирают остальные случаи, которые здесь могут представиться.

Предложение I.8. Если две стороны одного треугольника соответственно равны двум сторонам другого треугольника и основание одного треугольника также равно основанию другого, то и углы, содержащиеся между равными прямыми, равны. Пусть треугольники ABC и DEF имеют две стороны AB , AC , соответственно равные сторонам DE , DF , именно, пусть [сторона]



Черт. 10.

AB [равна стороне] DE и AC [равна] DF (черт. 10); пусть основание BC равно основанию EF . Утверждаю, что угол BAC также равен углу EDF .

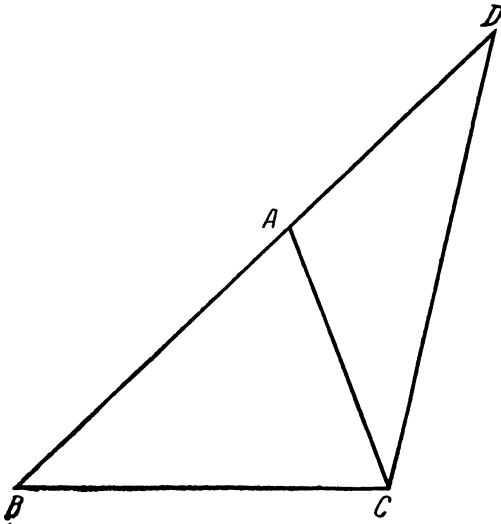
Ибо, если треугольник ABC приложим к треугольнику DEF так, что точка B будет совмещена с точкой E и прямая BC с прямой EF , то точка C также совпадет с F , так как [основание] BC равно EF ; следовательно, BC совпадет с EF , а вместе с тем [стороны] BA , CA совпадут с DE , FD ; ибо, если бы основание BC совпало с основанием EF , а стороны BA , AC не совпали бы с ED , DF , а заняли бы другое положение, например EG , GF ,—то мы имели бы две прямые, построенные над прямой, встречающиеся в некоторой точке, и в то же время по ту же сторону от нее были бы построены две другие прямые, встречающиеся в другой точке и соответственно равные двум первым, именно: каждая той, которая имеет с нею общий конец. Но такое построение невозможно. Следовательно, после того как основание BC приведено в совмещение с основанием EF , невозможно, чтобы стороны BA , AC не совпали с ED , DF ; они поэтому совпадут, так что угол BAC совпадет с углом EDF и будет ему равен.

По поводу этого доказательства, которое, по существу, и теперь еще приводится во многих руководствах по элементарной геометрии, можно было бы повторить соображения, высказанные относительно доказательства предыдущего предложения и предложения I.4; те же вопросы расположения остаются совершенно невыясненными здесь, как и там.

Мы привели первые восемь предложений «Начал» в дословном переводе. Некоторое представление о «манере» Евклида они уже дают. Очень

характерно, что уже здесь, в первых предложениях, вырисовываются почти все дефекты принципиального значения, устранение которых главным образом и отличает современное обоснование геометрии от того, которое мы получили в наследие от Евклида. В дальнейшем мы будем ограничиваться перечнем предложений, останавливаясь подробно только на тех вопросах, которые имеют существенное, принципиальное значение.

5. Предложения I.9—15. Конструктивные задачи; основные свойства смежных и вертикальных углов. Предложения I.9—12 содержат решения основных задач: деление пополам угла и отрезка, построение перпенди-



Черт. 11.

куляра к данной прямой через точку, лежащую на этой прямой или вне ее; построения, обычно излагаемые в наших элементарных учебниках, повторяют Евклида. Предложения I.13, 14 содержат теорему о сумме смежных углов и обратную ей, предложение I.15 — теорему о равенстве вертикальных углов; доказательства Евклида также воспроизводятся в учебниках.

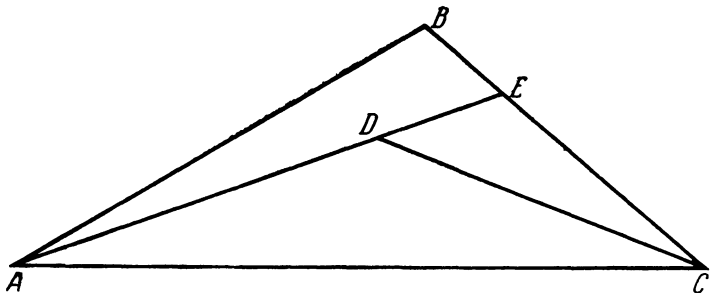
6. Предложения I.16—19. Теорема о внешнем угле треугольника и ее следствия. Предложение I.16 содержит теорему о внешнем угле треугольника в первой формулировке: внешний угол тре-

угольника больше каждого из внутренних с ним не смежных углов; доказательство Евклида также воспроизводят все учебники. Предложение I.17 содержит важное следствие этой теоремы — сумма двух внутренних углов треугольника меньше $2d$. После этих предложений было бы уместно провести классификацию прямоугольных, тупоугольных, как это обычно делают авторы современных учебников, но Евклид этого не делает.

Нет у него и теоремы о единственности перпендикуляра, опущенного из данной точки на данную прямую, которая также есть непосредственное следствие предложения I.16. Этот дефект тем ощутительнее, что построение перпендикуляра, данное в предложении I.12, единственности его не устанавливает. Предложения I.18, 19 содержат теоремы о соотношениях между сторонами и углами одного и того же треугольника (против большей стороны лежит больший угол (I.18) и обратно (I.19).

7. Предложения I.20, 21. Сравнение длин прямой и ломаной, проходящих между теми же двумя конечными точками. Предложение I.20 снова содержит теорему основного значения: сумма двух сторон треугольника больше третьей стороны. Евклид доказывает ее следующим образом. Продолжим сторону BA за точку A на расстояние $AD=AC$ (черт. 11). Тогда $\angle ADC = \angle ACD$, а так как $\angle BCD > \angle ACD$ или, что то же, $\angle BCD > \angle BDC$, то (предл. I.19) $BD = BA + AC > BC$.

Это рассуждение содержит такое же слабое место, как и в аналогичных случаях, указанных выше: не обосновано, что луч CA проходит внутри угла BCD (между лучами CB и CD). На основе этого предположения доказывается (предл. I.24), что объемлющая ломаная ABC , состоящая из двух отрезков, больше объемлемой ломаной ADC , проходящей между теми же точками A и C (черт. 12). Евклид этим ограничивается, но легко



Черт. 12.

видеть, что на основе этого предположения доказывается более общее предположение, что ломаная объемлющая больше всякой объемлемой выпуклой ломаной, проходящей между теми же крайними точками.

8. Предложения I.22, 23. Еще две основные задачи на построение.

Предложение I.22 содержит решение задачи: построить треугольник по данным трем его сторонам. Основываясь на теореме I.21, Евклид устанавливает условие, необходимое для того, чтобы построение было возможно: сумма любых двух заданных отрезков должна быть больше третьего (можно сказать короче—наибольший из трех отрезков должен быть меньше суммы двух других). Достаточности этого условия Евклид не доказывает, потому что он не располагает достаточными условиями пересечения двух окружностей.

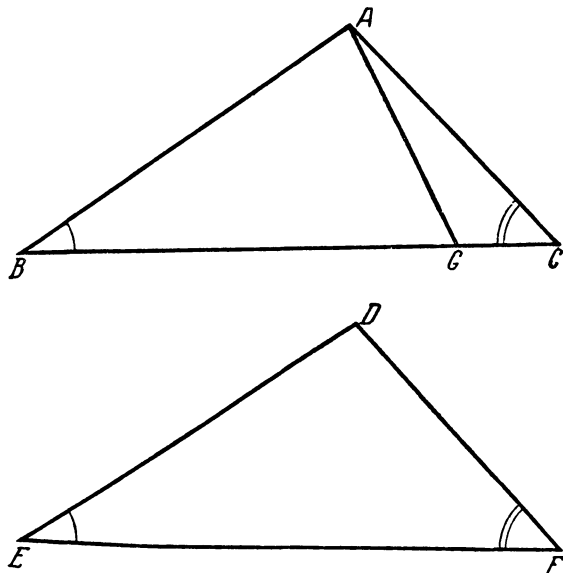
Предложение I.23 содержит построение при данной точке и выходящем из нее луче угла, равного данному.

9. Предложения I.24—26. Соотношения между сторонами и углами в двух треугольниках; третий признак равенства треугольников.

Теоремы—если две стороны одного треугольника равны двум сторонам другого и углы между ними не равны, то против большего угла лежит большая сторона, и обратная ей—составляют содержание предположений I.24, 25; те же доказательства также обычно воспроизводятся в наших учебниках. Предложение I.26 содержит третий признак равенства треугольников: если два угла одного треугольника равны двум углам другого треугольника и одна сторона одного равна стороне другого, а именно: равны либо стороны, соединяющие вершины равных углов, либо стороны, противолежащие двум равным углам,—то треугольники равны. Здесь фактически содержатся две теоремы; первая всегда воспроизводится нашими учебниками; приводим доказательство второй, опирающееся на теорему о внешнем угле.

Пусть в треугольниках ABC и DEF углы ABC , ACB соответственно равны углам DEF , DFE и сторона AB равна стороне DE (черт. 13); дока-

зывается, что сторона BC также равна стороне EF . Допуская противное, примем, что BC больше EF . Откладывая на BC отрезок BG , равный EF , получим треугольник ABG , равный треугольнику DEF (I.4). Вместе с тем $\angle AGB$ равен $\angle DFE$ и потому равен углу ACB , что противоречит предложению I.16.



Черт. 13.

Евклид не рассматривает специальных условий равенства прямоугольных треугольников, хотя они могли бы тут же найти место, так как доказываются на основании установленных теорем. Вообще, в наших учебниках обычно приводится ряд теорем, непосредственно вытекающих из перечисленных предложений первой книги «Начал», которых, однако, у Евклида нет; таковы так называемые соотношения между перпендикуляром и наклонными, между наклонными, одинаково и неодинаково удаленными от основания перпендикуляра, построение треугольника по двум сторонам и углу, противолежащему большей из них, и соответствующее условие равенства треугольников.

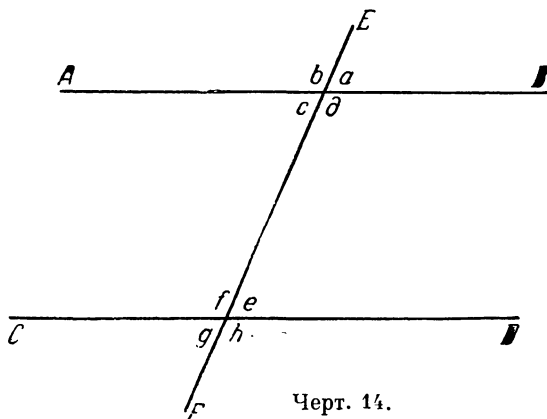
Первые главы всякого руководства по геометрии в большой мере определяют его установки. Читатель видит, какое влияние «Начала» еще по настоящее время оказывают на структуру учебников геометрии в первой их части. Но данное здесь подробное изложение первых 26 предложений I книги «Начал» имеет и другую цель, связанную с тем значением, которое они получают при сопоставлении со второй половиной той же книги.

§ 5. ВТОРАЯ ПОЛОВИНА ПЕРВОЙ КНИГИ «НАЧАЛ». ТЕОРИЯ ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ЛИНИЙ

1. Предложения I.27, 28. Достаточные условия параллельности двух прямых. Вторая половина первой книги «Начал» содержит учение о параллельных линиях и предложения, непосредственно с ним связанные. Изложению Евклида предпослём следующие предварительные, хотя и тривиальные, но очень важные соображения.

Положим, что две прямые AB и CD , расположенные в одной плоскости, пересечены третьей прямой EF (черт. 14). При точках пересечения образуется 8 углов, которые на нашей чертеже обозначены через $a, b, \dots, h$. Напишем следующие 12 равенств:

- 1) $a = e, b = f, c = g, d = h$
(равенство соответственных углов);
- 2) $c = e, d = f$
(равенство внутренних накрест лежащих углов);
- 3) $a = g, b = h$
(равенство внешних накрест лежащих углов);
- 4) $d + e = 2d, c + f = 2d$
(равенство суммы внутренних односторонних углов двум прямым);
- 5) $a + h = 2d, b + g = 2d$
(равенство суммы внешних односторонних углов двум прямым).



Черт. 14.

Очень легко доказать, что каждое из этих равенств, если оно имеет место, влечет за собой все остальные. Эту теорему теперь приводят многие элементарные учебники. Отсюда вытекает основная теорема: если имеет место одно из двенадцати равенств (1—5), то прямые AB и CD не имеют общей точки; в самом деле, если бы они таковую имели, то по одну или по другую сторону секущей образовался бы треугольник, в котором один из внешних углов был бы равен внутреннему, с ним не смежному углу, что противоречит теореме I.16. Так как, согласно определению 23, две прямые, расположенные в одной плоскости и не встречающиеся, называются параллельными, то существование одного из двенадцати равенств (1—5) есть достаточное условие того, чтобы прямые были параллельны. Это и получает выражение в предложениях I.27 и I.28.

Предложение I.27. Если при пересечении двух прямых третьей накрест лежащие углы равны, то прямые параллельны.

Предложение I.28. Если при пересечении двух прямых третьей один из внешних углов равен внутреннему с ним не смежному углу, лежащему по ту же сторону секущей [т. е. соответственному углу], или если внутренние односторонние углы составляют вместе два прямых угла, или если внешние односторонние углы составляют вместе два прямых, то прямые параллельны.

2. Постулат о параллельных линиях. Естественно, возникает вопрос, является ли существование одного из равенств (1—5), а следовательно, и всех двенадцати, необходимым условием параллельности двух прямых, т. е. имеют ли место теоремы, обратные предложениям I.27 и I.28; иначе говоря, если известно, что две прямые параллельны, то можно ли утверждать, что имеют место равенства (1—5). Не подлежит сомнению, что до Евклида уже делались попытки доказать эти обратные предложения, не прибегая к новому постулату. Эти попытки не приводили к цели. Как выходили из этого положения авторы, излагавшие начала геометрии до Евклида, нам не известно. Евклид вводит одно из обратных предложений без доказательства в виде постулата; принадлежит ли ему в этом инициатива или это делалось уже до него, — с уверенностью сказать нельзя. Постулат можно было бы соответственно этому формулировать так: если линии параллельны, то имеет место одно из равенств (1—5); целесообразно остановиться на одной определенной формулировке, например такой: если линии параллельны, то сумма внутренних односторонних углов равна $2d$. Евклид предпочитает эквивалентное этому обратнo-противоположное положение:

Если две прямые, расположенные в одной плоскости, при пересечении с третьей прямой образуют внутренние односторонние углы, сумма которых не равна $2d$, то эти прямые пересекаются.

Это и есть пятый постулат Евклида, на котором мы в своем месте подробно не остановились. Ввиду исключительного значения, которое этот постулат имеет в «Началах» Евклида, его часто называют просто «постулатом Евклида» или «постулатом о параллельных линиях»; часто его называют также одиннадцатой аксиомой, следуя издателям, которые аксиомы и постулаты соединяют воедино; некоторые авторы насчитывают даже тринадцатый аксиом, — постулат о параллельных поэтому иногда называют тринадцатой аксиомой Евклида.

Заметим, впрочем, что в тексте Евклида формулировка постулата содержит дополнение, которое в составе постулата, как такового, излишне. Именно, постулат, как мы знаем, по существу, формулирован так: е с л и при пересечении двух прямых, расположенных в одной плоскости, третьей сумма внутренних односторонних углов не равна $2d$, то эти прямые пересекаются и притом с той стороны, где эта сумма меньше $2d$. Но совершенно ясно, что если эти прямые пересекаются, то пересечение необходимо должно иметь место с той стороны, где сумма внутренних односторонних углов меньше $2d$: если бы пересечение произошло с противоположной стороны, то образовался бы треугольник, в котором сумма двух внутренних углов была бы больше $2d$ (что противоречит предложению I.17).

3. Абсолютная и собственно евклидова геометрия. Предложение I.29. Из предыдущего обзора мы видим, что первые 28 предложений Евклида не опираются на пятый постулат. В то время как ко всем остальным постулатам Евклид прибегает в первых же предложениях, применение постулата о параллельных отодвигается до 29-го предложения. Как мы увидим ниже, имеется еще немало других предложений, которые не зависят от постулата о параллельных линиях в том смысле, что могут быть доказаны без помощи этого постулата. Совокупность предложений геометрии, доказательства которых на постулат о параллельных линиях не опираются, принято называть абсолютной геометрией. Термин этот

введен Иоанном Болъаи (J. Bolyai); его вряд ли можно считать удачным, но он в литературе утвердился.

В противоположность этому, следуя изложению Евклида, мы будем называть совокупность тех предложений, которые в «Началах» доказываются при помощи постулата Евклида, собственно евклидовой геометрией. Таким образом, собственно евклидовой геометрии принадлежат все те предложения, при доказательстве которых в «Началах» Евклид либо непосредственно опирается на постулат о параллельных линиях, либо опирается на предложения, ранее доказанные при помощи этого постулата. Мы увидим ниже, что предложения, которые Евклид доказывает, опираясь на V постулат, за весьма редкими исключениями, которые будут указаны на своем месте, без помощи этого или равносильного ему постулата доказаны быть не могут. В планиметрии, т. е. в книгах I—VI «Начал», которые нас здесь интересуют в первую очередь, есть только одно такое исключение—предложение III.14; это будет выяснено ниже¹⁾. Однако в настоящей главе, излагая содержание «Начал», мы еще в это входить не можем и будем относить предложения к собственно евклидовой геометрии по признаку, установленному выше. Изъямая весьма немногие предложения, которые все будут указаны в своем месте, мы при этом остаемся в полном согласии с классификацией, твердо установившейся в литературе.

Таким образом, первые 28 предложений I книги «Начал» принадлежат абсолютной геометрии; но предложение 29 уже принадлежит собственно евклидовой геометрии; оно гласит:

Предложение I.29. Прямая, пересекающая две параллельные линии, образует с ними равные накрест лежащие углы, равные соответственные углы; внутренние же односторонние углы, как и внешние односторонние углы, составляют вместе два прямых угла.

По существу, это почти перефразировка постулата Евклида. Можно сказать также, что предложения I.27 и I.28 устанавливают ряд условий, достаточных для того, чтобы прямые были параллельны; предложение I.29 устанавливает необходимость этих условий.

4. Предложения I.30—34. Евклидова теория параллельных линий. После этого рассматривается евклидова теория параллельных линий так, как это делается в наших учебниках. Предложение I.30 устанавливает, что две прямые, параллельные третьей, параллельны между собой. Предложение I.31 содержит построение прямой, проходящей через данную точку плоскости, параллельно данной в этой плоскости прямой, и вместе с тем в недостаточно четком выражении устанавливает, что через точку, лежащую вне данной прямой, можно провести одну и только одну параллельную ей прямую. Далее, предложение I.32 содержит теорему о внешнем угле уже в более определенной форме.

Предложение I.32. Внешний угол треугольника равен сумме внутренних углов, с ним не смежных.

Отсюда вытекает, что сумма внутренних углов треугольника равна двум прямым. Эта важная теорема включена в то же предложение; ее открытие приписывают Фалесу.

¹⁾ Стр. 70.

Предложения I.33, 34 содержат учение о параллелограмме; Евклид устанавливает основные свойства противоположных сторон и углов параллелограмма и его диагоналей; из специальных параллелограммов Евклид рассматривает только прямоугольник; свойства ромба добавлены Проклом. Заметим, что самое существование параллелограмма, как четырехугольника, в котором противоположные углы равны, углы же, прилежащие к одной стороне, дополняют друг друга до $2d$, обосновывается средствами собственно евклидовой геометрии. Всякий читатель, хорошо знающий эти предложения, вдумчиво относящийся к их доказательствам, которые в наших учебниках не отличаются от доказательств Евклида, понимает, что эти доказательства опираются на постулат о параллельных линиях—принадлежат собственно евклидовой геометрии.

5. Предложения I.35—45. Учение о равновеликих параллелограммах, треугольниках и многоугольниках. С предложения I.35 начинается учение о равновеликости параллелограммов и треугольников. Здесь и дальше Евклид употребляет в применении к плоским фигурам тот же термин «равны» (*ἴσος*), который он до сих пор употреблял в значении «конгруэнтны», в новом смысле—имеют ту же площадь, равновелики. Он этого не оговаривает; никаких определений или постулатов, устанавливающих, при каких условиях фигуры называются равновеликими, у него нет; это усматривается из самых рассуждений: плоские фигуры равновелики, если их можно получить, отнимая от конгруэнтных фигур конгруэнтные части или присоединяя к конгруэнтным фигурам другие конгруэнтные же фигуры. Именно этим критерием равновеликости Евклид фактически пользуется. Специальный термин «равновеликие фигуры» (по-французски *équivalent*), повидимому, принадлежит Лежандру. Равновеликость параллелограммов, имеющих равные основания и равные высоты, излагается так, как она и сейчас трактуется в наших учебниках (Евклид, впрочем, не говорит о равных высотах, а рассматривает только параллелограммы с равными основаниями, лежащие между теми же параллелями). На этом предложении основывается преобразование всякого параллелограмма в равновеликий ему параллелограмм, имеющий то же основание, но любой заданный угол, в частности, в прямоугольник с тем же основанием. За этим следует преобразование всякой прямолинейной фигуры в равновеликий ей параллелограмм или в прямоугольник—прием, также вошедший во все учебники.

6. Предложения I.46—48. Теорема Пифагора. Первая книга заканчивается теоремой Пифагора. Теорема I.46 предварительно содержит построение квадрата на данном отрезке, как его стороне. Затем следует теорема Пифагора—чисто геометрическое ее содержание; классическое доказательство Евклида повторяется во всех учебниках; вряд ли среди многочисленных доказательств, предложенных позже, есть такое, которое может быть признано бесспорно лучшим. Обращение этого предложения заканчивает книгу.

Ясно, что все эти предложения принадлежат собственно евклидовой геометрии.

7. Общий обзор содержания первой книги «Начал». Материал, который содержится в первой книге «Начал», представляет собой фундамент, на котором строится вся геометрия. Книга эта дает уже некоторое представление, если не о структуре, то об аспекте, в котором строится сочинение. Ознакомление с ее содержанием прежде всего приводит к тому выводу, что общий облик этой части «Начал» наложил отпечаток на все

последующие руководства по геометрии, можно сказать, отпечатлелся, даже сохранился в них. Основные предложения первой книги не только повторяются в первых главах последующих руководств, но доказательства важнейших основных теорем сохранены в этих руководствах в такой чистоте, что они как бы списаны с Евклида (теоремы об условиях равенства треугольников, теорема о внешнем угле, соотношения между сторонами и углами в одном треугольнике или в двух треугольниках, в которых две стороны одного равны двум сторонам другого, теорема о сумме внутренних углов треугольника, основы учения о параллельных линиях, преобразование многоугольника в равновеликий ему треугольник и прямоугольник, теорема Пифагора). Изложение чрезвычайно продумано и явно несет на себе отпечаток продолжительной работы мысли в течение трех слишком веков, которые отделяли эпоху Евклида от эпохи Фалеса. Тенденция Платона и Аристотеля сделать геометрию образцом выводной науки отчетливо видна на всем протяжении этой книги (как и всего сочинения); но от действительного выполнения этого замысла изложение еще чрезвычайно далеко.

Прежде всего, не указаны основные исходные понятия, которыми геометрия оперирует, к которым, как наиболее общим в геометрии, должны быть сведены определения всех остальных ее понятий. В связи с этим определения важнейших понятий носят, как говорят многие авторы, метафизический характер в том смысле, что не содержат никакого материала, которым Евклид мог бы воспользоваться в своем построении геометрии. Недостаточно отчетливо формулированы и основные положения — постулаты и аксиомы, на них нельзя построить геометрию в полном соответствии с требованиями Платона, с теорией научного вывода, как она дана в «Аналитиках» Аристотеля.

Конечно, рассуждения Евклида чрезвычайно далеки от наивных соображений младенческой восточной науки. Но в каждом предложении содержится утверждение, устанавливаемое отнюдь не дедукцией, основанное на наглядных представлениях, в действительности недалеко ушедших от соображений восточной геометрии.

Постараемся дать себе более определенный отчет, в чем заключаются эти дефекты по отношению к требованиям, предъявляемым к выводной науке. Прежде всего, исключительно на наглядности основаны все утверждения и выводы, так или иначе связанные с понятием о расположении точек на прямой и на плоскости (точка лежит между двумя точками, две точки на прямой лежат по одну или по разные стороны третьей точки той же прямой, две точки на плоскости лежат по одну или по разные стороны прямой, точка лежит внутри угла или вне его, внутри треугольника или вне его и т. д.). Совокупность этих вопросов называют в настоящее время проблемой о расположении точек на прямой, плоскости и, далее, в пространстве. Сочинение Евклида производит такое впечатление, что эти вопросы в ту эпоху еще не вызвали никакого интереса, к их обработке не предъявлялось никаких требований. И этот упрек, несомненно, относится не только к Евклиду, но и ко всей его эпохе. Аристотель, сочинения которого изобилуют геометрическими примерами и соображениями, нигде не упоминает о необходимости обоснования этих понятий, нигде в вопросах расположения не восходит от наглядных представлений к четко выраженным понятиям. Между тем без установления этих понятий даже некоторые постулаты Евклида теряют определенное содержание. Что, например, значит «ограниченная прямая может быть продолжена в обе стороны», если не установлено, что, собственно, есть продолжение прямолинейного отрезка?

Второй цикл вопросов, остающихся у Евклида без всякого обоснования, — это учение о движении. Пользуясь движением, как мы видели, весьма ограниченно, Евклид все-таки в своих постулатах не устанавливает, какие движения допустимы, какие могут быть выполнены до того, как положение фигуры вполне определится. Между тем с идеей движения связано понятие о конгруэнтности фигур; это понятие, таким образом, как бы повисает в воздухе, пока не установлено, как нужно понимать в геометрии движение и каковы его законы. И эти вопросы впервые были вполне выяснены только во второй половине прошлого столетия Гельмгольцем, Клейном и Софусом Ли.

Как мы видели, не затронуты Евклидом вопросы о непрерывности прямой, плоскости, пространства. Вследствие этого уже в первом предложении остается необоснованным существенный момент доказательства — пересечение окружностей¹⁾. И это с небольшими модификациями повторяется во многих предложениях первой книги. Разрешение этого вопроса также относится ко второй половине прошлого века, оно выполнено Больцано, Дедекиндом, Кантором и другими. Можно со всей определенностью сказать, что именно выяснение всех этих вопросов, оставленных в эпоху Евклида без внимания, привело к действительному обоснованию геометрии.

Первая книга «Начал» распадается на две части, первая из которых (I.1—28) образует абсолютную геометрию, т. е. ту часть геометрии, которая не зависит от постулата о параллельных линиях; вторая часть составляет собственно евклидову геометрию в том смысле, что каждая ее теорема непосредственно или через предшествующие теоремы, при помощи которых она доказывается, опирается на постулат о параллельных линиях. К этому еще необходимо сделать два замечания. Во-первых, абсолютная геометрия отнюдь не исчерпывается первыми двадцатью восемью предложениями I книги; в дальнейшем мы встретим еще немало теорем, которые также могут быть доказаны без помощи постулата V, хотя некоторые из них обычно доказываются «собственно евклидовыми средствами», т. е. рассуждениями, прямо или косвенно опирающимися на постулат о параллельных. Во-вторых, последующие предложения I книги (I.29—48) доказываются при помощи постулата V или теорем, которые были раньше доказаны при помощи этого постулата. Возникает поэтому вопрос, действительно ли их доказательство неизбежно зависит от постулата о параллельных линиях? К этому важному вопросу, получившему в истории развития учения об основаниях геометрии первостепенное значение, мы возвратимся ниже и обстоятельно его рассмотрим.

§ 6. ВТОРАЯ КНИГА «НАЧАЛ». ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ АЛГЕБРА ЕВКЛИДА

1. Геометрическая алгебра. Вторую книгу «Начал» обыкновенно называют «геометрической алгеброй» Евклида. Если геометрия в эпоху Евклида была уже широко и глубоко развита, то алгебра в это время находилась еще в зачаточном состоянии. Причина этого заключалась в том, что алгебра могла строиться только на базе развитой арифметики, которая в Греции в то время (III столетие до н. э.) была еще очень беспомощна, главным образом вследствие крайне неудовлетворительной системы счисления. Впрочем, учение о целых числах получило уже значительное развитие, и его изложение нашло себе место в так называемых арифметических книгах «Начал» (VII—IX). Но это скорее первые начала современной теории чисел, чем собственно арифметика. Общей же алгебры,

¹⁾ Непрерывность окружностей, конечно, не является необходимым, но служит достаточным условием их пересечения (в условиях задания в предложении I.1).

в частности алгебры тождественных преобразований, тогда не существовало вовсе. Но ряд основных тождеств элементарной алгебры допускает геометрическое толкование; в этой геометрической форме они были Евклиду известны. И нужно иметь в виду, что для Евклида это были именно геометрические теоремы, а не переложённые на геометрический язык алгебраические тождества, которые, как таковые, были Евклиду совершенно чужды. Эти геометрические соотношения дают возможность решать чисто геометрическими средствами такие задачи, которые, будучи переложены на язык чисел, очень просто, механически решаются общими средствами алгебры. Им и посвящена небольшая по объёму вторая книга «Начал». Она содержит десять геометрических тождеств, важнейшие из которых мы здесь приводим. Заметим, что разные геометрические тождества были, несомненно, установлены до Евклида, — и здесь роль Евклида заключалась главным образом в систематизации материала.

Приведенный выше перевод первых предложений «Начал» был сделан так, чтобы он не только точно выражал содержание оригинала, но и давал бы возможно более ясное представление о фразеологии Евклида. В дальнейшем сохраняется точная передача содержания каждого приводимого предложения, но дословный характер перевода не выдерживается столь скрупулезно.

2. Предложения II.1—4. Основные геометрические тождества.

Предложение II.1. Если даны две [конечные] прямые линии и одна из них произвольно разделена на несколько отрезков, то прямоугольники, построенные каждый на одном из этих отрезков и на второй прямой, составляют вместе прямоугольник, построенный на заданных двух прямых.

Под прямоугольником, построенным на заданных двух конечных прямых, нужно понимать прямоугольник, сторонами которого (основанием и высотой) служат эти прямые. Евклид говорит, таким образом, о [конечных] прямых, а под отрезками и разумеет части, на которые эти прямые разрезаны (τέμνω — режу, τμήμα — отрезок). Это отличие сохраняется во всех хороших переводах; мы также его сохраняем, отмечая часто, что речь идет о конечных прямых¹⁾. Теорема явно представляет собой геометрическое выражение алгебраического тождества

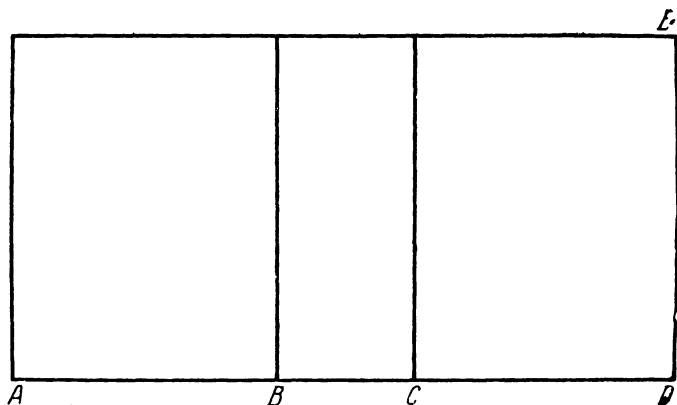
$$(a + b + c + \dots + f)h = ah + bh + ch + \dots + fh. \quad (\alpha)$$

Если бы понимать содержание теоремы в том смысле, что речь идет о площадях соответственных прямоугольников, то алгебраическое тождество (α) было бы точным выражением этого содержания. Но Евклид на этой точке зрения отнюдь не стоит; он имеет в виду прямоугольник, разбитый на несколько составляющих прямоугольников (черт. 15). Следуя многим переводчикам «Начал», будем обозначать прямоугольник, построенный на различных прямых AB и CD , через $AB \times CD$. Евклид этого, конечно, не делает; но даже в латинском тексте издания Гейберга и Менге эти обозначения приняты; рассматриваемое предложение может в этих обозначениях в применении к чертежу 15 выражаться так:

$$AD \times DE = AB \times DE + BC \times DE + CD \times DE,$$

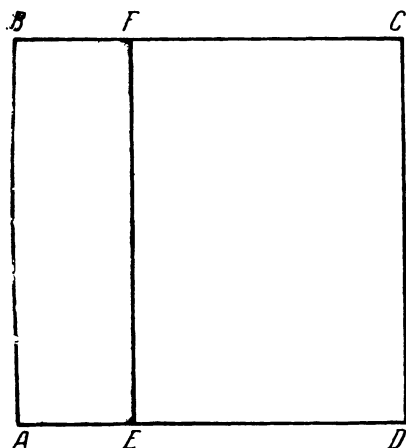
¹⁾ См. также сноску¹⁾ на стр. 46.

при этом знак $\times$ имеет геометрическое, а не арифметическое значение.

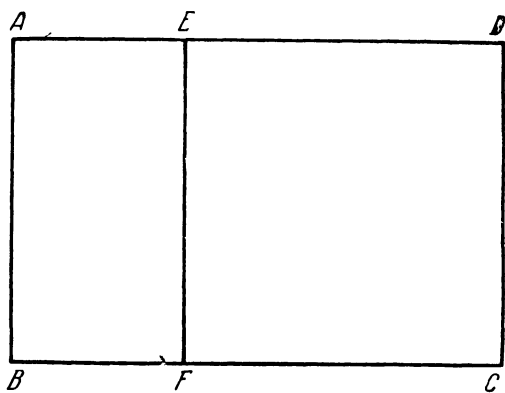


Черт. 15.

Предложение II.2. Если [конечная] прямая произвольно разделена на два отрезка, то два прямоугольника, построенные каждый на одном из этих отрезков и на данной прямой, вместе составляют квадрат, построенный на данной прямой (черт. 16).



Черт. 16.



Черт. 17.

Предложение явно представляет собой частный случай предыдущего и может быть рассматриваемо как геометрическое выражение алгебраического тождества:

$$(a + b)a + (a + b)b = (a + b)^2. \quad (\beta)$$

Предложение II.3. Если [конечная] прямая произвольно разделена на два отрезка, то прямоугольник, построенный на этой прямой и на одном из отрезков, состоит из прямоугольника, построенного на обоих отрезках, и квадрата, построенного на первом отрезке (черт. 17).

И это предложение есть частный случай предложения II.1 и может быть рассматриваемо как геометрическое выражение алгебраического тождества:

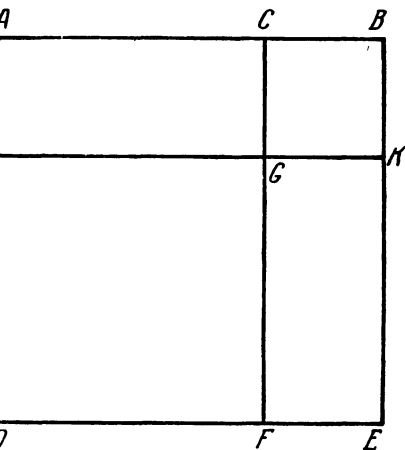
$$(a + b)a = ab + a^2. \quad (\gamma)$$

Предложение II.4. Если прямая произвольно разделена на два отрезка, то построенный на ней квадрат состоит из двух квадратов, построенных на каждом из этих отрезков, и из двух прямоугольников, каждый из которых построен на этих двух отрезках (черт. 18).

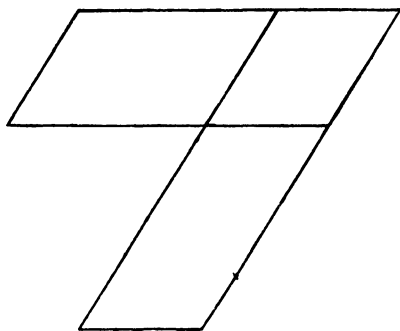
Предложение представляет собой геометрическое выражение тождества:

$$(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab. \quad (\delta)$$

3. Предложение II.5. Гномон. В следующих предложениях Евклид пользуется фигурой, которую называют гномон. Эта фигура составлена из двух параллелограммов, имеющих общий угол (черт. 19). Название, очевидно, вызвано тем, что фигура при прямом общем угле несколько напоминает астрономический инструмент, носивший то же название.



Черт. 18.



Черт. 19.

Предложение II.5. Если

[конечная] прямая линия разделена на равные и неравные отрезки, то прямоугольник, построенный на неравных отрезках,

вместе с квадратом, построенным на прямой, ограниченной точками деления, составляют квадрат, построенный на половине данной прямой.

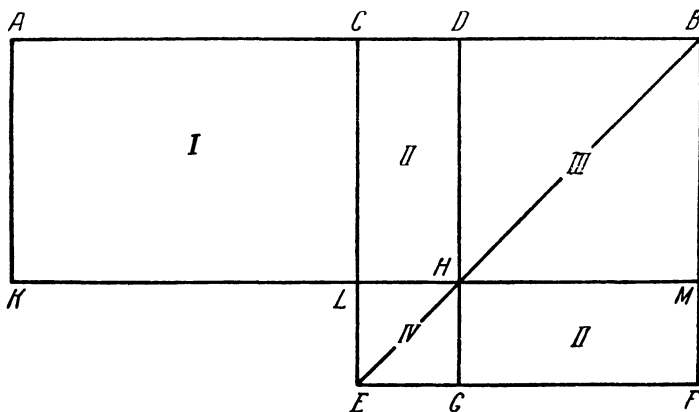
Конечная прямая AB разделена в точке C на равные отрезки (пополам) и в точке D — на неравные отрезки AD и DB (черт. 20). Если на всей прямой AB и отрезке BM , равном одному из отрезков разбиения ($BM = BD$), построим прямоугольник $ABMK$ и на половине данной прямой CB построим квадрат $CBFE$ и дополним чертеж прямой DG , параллельной BF , то получим прямоугольный гномон $ADGELK$, состоящий из прямоугольника $ADHK$ (построенного на отрезках деления AD и $DH = DB$) и квадрата $LHGE$ (построенного на прямой $LH = CD$, которая ограничена точками деления C и D). Теорема заключается в том, что этот гномон равновелик квадрату $CBFE$.

Действительно: гномон $ADGELK$ состоит из прямоугольников I ($ADHK$) и II ($CDHL$) и квадрата IV ($LHGE$); он может быть поэтому обозначен суммой $I + II + IV$; но прямоугольники $ACLK$ (I) и $CLMB$ равны; прямоугольник I может быть поэтому заменен суммой $II + III$, где III

есть квадрат $DBMH$; вместе с тем

$$I + II + IV = III + 2II + IV.$$

Последние же четыре слагаемые, в силу предыдущей теоремы, составляют квадрат, построенный на отрезке CB .



Черт. 20.

Если, переходя к современной терминологии, обозначим длины отрезков AC и CD через a и b , то длины отрезков AD и BD будут $a+b$ и $a-b$, площадь гномона будет $(a+b)(a-b)+b^2$; теорема выражает, что

$$(a+b)(a-b)+b^2=a^2$$

или

$$(a+b)(a-b)=a^2-b^2. \quad (\varepsilon)$$

В установленных выше обозначениях содержание настоящей теоремы может быть выражено так:

$$AD \times DB + \overline{CD}^2 = \overline{AC}^2. \quad (1)$$

Первые пять предложений второй книги, таким образом, выражают геометрически основные тождества элементарной алгебры.

4. Геометрическое решение квадратного уравнения. Комментаторы Евклида обратили внимание на то, что предложение II.5 дает средства для построений, геометрически эквивалентных решению квадратного уравнения; излагаемый прием принадлежит Симсону^[13].

В порядке подготовки остановимся на следующем предварительном соображении. Если при построении, изображенном на черт. 20, сохраняя AB , будем передвигать точку D , приближая ее к C , то правая часть предыдущего равенства (1) будет сохранять свое значение, а $\overline{CD}^2$ будет уменьшаться и обратиться в нуль, когда точка D совпадет с C . Это значит, что прямоугольник, построенный на двух отрезках [конечной] прямой AB , не превышает квадрата, построенного на половине этой прямой, и достигает этого максимума, когда отрезки равны (составляют каждый половину прямой).

Положим теперь, что требуется данную (конечную) прямую $2a$ разделить на два отрезка таким образом, чтобы прямоугольник, построенный на этих отрезках, был равновелик квадрату, построенному на заданной прямой b .

Согласно установленной выше теореме, для осуществимости построения b должно быть меньше a ($b < a$; тривиальный случай $b = a$ оставляем в стороне).

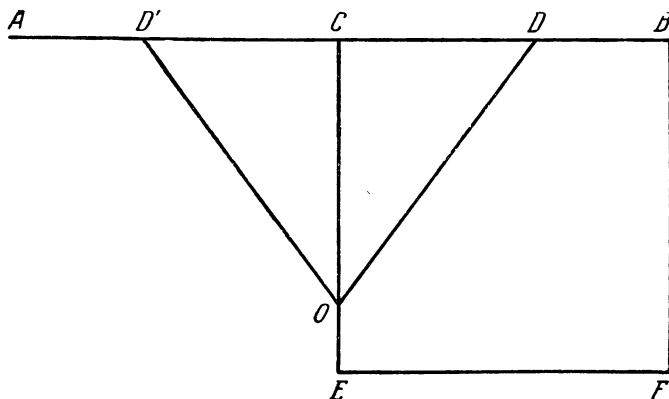
Модернизируем задание, алгебраизируя его; обозначим (в согласии с ранее введенными обозначениями) длины данных двух отрезков следующим образом: через $2a$ — длину первого, через b — длину второго, а длину одного из отрезков, который мы получим, выполняя требуемое деление, — через x ; тогда число x должно удовлетворять уравнению:

$$x(2a - x) = b^2$$

или

$$x^2 - 2ax + b^2 = 0. \quad (2)$$

Геометрическая задача эквивалентна решению квадратного уравнения (2). Опираясь на теорему II.5, требуемое построение можно выпол-



Черт. 21.

нить следующим образом. Пусть C будет середина прямой $AB = 2a$ (черт. 21). На CB строим квадрат $CBEF$. Пусть $OC = b$. Вокруг точки O , как центра, радиусом, равным a , опишем окружность; так как $a > b$, то эта окружность пересечет прямую AB в точках D и D' . Эти две точки производят, по существу, одно и то же деление прямой AB на два отрезка $AD' = BD$, $BD' = AD$; покажем, что это деление удовлетворяет поставленному требованию.

В самом деле, согласно теореме II.5,

$$AD \times DB + \overline{CD}^2 = \overline{CB}^2 = a^2.$$

Но в силу теоремы Пифагора

$$\overline{OC}^2 + \overline{CD}^2 = \overline{OD}^2, \text{ т. е. } b^2 + \overline{CD}^2 = a^2.$$

Отсюда

$$AD \times DB + \overline{CD}^2 = b^2 + \overline{CD}^2, \text{ т. е. } AD \times DB = b^2.$$

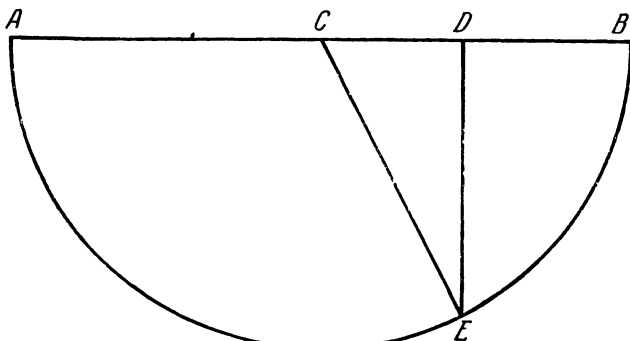
Предложение II.6 содержит другое разложение гномона, которое дает возможность решать задачи, алгебраически сводящиеся к решению уравнения

$$x^2 + 2ax = b^2. \quad (2a)$$

5. Преобразование прямоугольника в равновеликий квадрат. Мы видим, таким образом, что уже первые книги геометрической алгебры Евклида дают возможность делать построения, эквивалентные решению

квадратного уравнения. Евклид, однако, этих построений не дает. Но он дает другое построение, имеющее большое значение, именно — он дает решение задачи: построить квадрат, равновеликий данному прямоугольнику (II.14).

Решение заключается в следующем. Пусть a и b будут стороны данного прямоугольника. Оставляя тривиальный случай $b = a$, предположим $b < a$. Пусть $AD = a$, а на продолжении AD пусть $DB = b$; пусть C будет середина прямой AB (черт. 22). Вокруг точки C , как центра, опишем



Черт. 22.

полуокружность радиусом $AC = CB$; из точки D восставим к прямой AD перпендикуляр, который встретит полуокружность AEB в точке E . Покажем, что DE есть сторона искомого квадрата.

В самом деле, согласно предложению II.5,

$$AD \times DB + \overline{CD}^2 = \overline{CB}^2. \quad (3)$$

Но по теореме Пифагора из прямоугольного треугольника CDE следует:

$$\overline{CE}^2 = \overline{CD}^2 + \overline{DE}^2 \quad \text{или} \quad \overline{CB}^2 = \overline{CD}^2 + \overline{DE}^2.$$

Подставляя в равенство (3) вместо квадрата $\overline{CB}^2$ сумму квадратов $\overline{CD}^2 + \overline{DE}^2$, получаем:

$$AD \times DB = \overline{DE}^2 \quad \text{или} \quad a \times b = \overline{DE}^2.$$

Задача, таким образом, решена. Можно сказать, что простыми средствами своей геометрической алгебры Евклид дает построение средней пропорциональной двух отрезков; это выражение результата дает и Евклид, но позже, когда он уже располагает учением о пропорциях. Вместе с тем мы видим, что уже здесь попутно, не располагая еще учением о пропорциях, Евклид показывает, что полухорда, перпендикулярная к диаметру окружности, есть средняя пропорциональная между отрезками диаметра.

6. Обзор второй книги «Начал». Мы привели первые пять предложений II книги, представляющих геометрические эквиваленты простейших алгебраических тождеств. Книга содержит еще пять предложений, которые выражают также пять алгебраических тождеств, именно, следующие:

$$\begin{aligned} (a+b)^2 &= (2a+b)b + a^2, & (\eta) \\ (a+b)^2 + a^2 &= 2(a+b)a + b^2, & (\vartheta) \\ 4(a+b)a + b^2 &= [(a+b) + a]^2, & (\kappa) \\ (a+b)^2 + (a-b)^2 &= 2(a^2 + b^2), & (\lambda) \\ (2a+b)^2 + b^2 &= 2[a^2 + (a+b)^2]. & (\mu) \end{aligned}$$

Этими предложениями Евклид пользуется для того, чтобы развить теорему Пифагора, т. е. он в геометрической форме дает известное

предложение о квадрате, который построен на стороне треугольника, лежащей против острого или тупого угла.

Теперь совершенно ясно, чего Евклид достигает своей геометрической алгеброй.

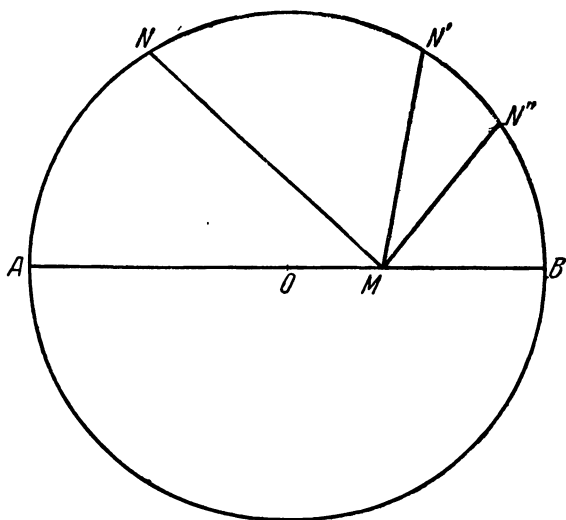
В первой книге он показывает, что всякий многоугольник может быть преобразован в равновеликий прямоугольник; теперь он показывает, как можно прямоугольник (а следовательно, и всякий многоугольник) преобразовать в равновеликий квадрат. Первую книгу Евклид заканчивает теоремой Пифагора; теперь он дает развитие этой теоремы, ее обобщение на всякий треугольник.

В каждом предложении второй книги Евклид оперирует прямоугольником. Самое понятие о прямоугольнике принадлежит собственно евклидовой геометрии; ей принадлежит поэтому все содержание второй книги.

§ 7. ТРЕТЬЯ И ЧЕТВЕРТАЯ КНИГИ «НАЧАЛ». УЧЕНИЕ ОБ ОКРУЖНОСТИ, ВПИСАННЫХ И ОПИСАННЫХ МНОГООУГОЛЬНИКАХ

1. Предложения III.1—19. Окружность, ее хорды, секущие и касательные. Третья книга «Начал» вновь возвращает нас в область абсолютной геометрии. Она начинается с решения задачи о нахождении центра заданного круга. Об этой задаче нам уже приходилось говорить (стр. 36); поскольку

речь идет о заданном круге, его центр, несомненно, существует и находится обычным путем — средствами абсолютной геометрии. Следующие за этим предложения о хордах, секущих и касательных окружности отличаются от того, что воспроизводится в наших учебниках, только более детальной разработкой материала. Доказывается, что все внутренние точки хорды лежат внутри окружности (т. е. расстояния их от центра меньше радиуса), исследуется изменение отрезка хорды и секущей при вра-



Черт. 23.

ращении вокруг точки, лежащей внутри или вне окружности; доказывается, что отрезок хорды MN при вращении вокруг точки M достигает максимума и минимума на диаметре (черт. 23), постоянно возрастаая в пределах полуокружности при вращении в одну сторону и убывая при вращении в другую сторону; аналогично изменяется секущая. Предварительно доказываются тривиальные предложения о том, что перпендикуляр, опущенный из центра окружности на хорду, делит как хорду, так и стягиваемую ею дугу пополам. Доказывается, что две окружности не могут пересекаться более чем в двух точках. Устанавливаются известные свойства касания прямой и окружности и двух окружностей (касательная перпендикулярна к радиусу, проходящему через точку касания и обратно; центры двух касающихся окружностей и точка касания лежат на одной прямой). Показывается, как провести касательную к окружности через

отправления служит предложение III.20, по которому угол, вписанный в окружность, составляет половину центрального угла, опирающегося на ту же дугу. Доказательство основано на том, что внешний угол треугольника равен сумме внутренних углов, с ним не смежных (I.32), т. е. выполняется средствами собственно евклидовой геометрии. За этим следуют теоремы о том, что все вписанные в окружность углы, опирающиеся на одну и ту же дугу или на равные дуги, равны, и, обратно, равные вписанные углы опираются на равные дуги; что угол, вписанный в полуокружность, есть прямой угол и, обратно, вписанный в окружность прямой угол всегда опирается на концы диаметра; что сумма противоположных углов вписанного в окружность четырехугольника равна $2d$. Вместе с тем возникает понятие о дуге, вмещающей данный угол. Так как доказательства всех этих предложений пользуются основным предложением III.20, то они опираются на постулат о параллельных линиях, т. е. принадлежат собственно евклидовой геометрии. На них, в свою очередь, основана теорема о том, что угол, образованный хордой и касательной, равен половине центрального угла, опирающегося на ту же дугу, а с этим связано построение дуги, вмещающей данный угол. Весь этот цикл теорем, составляющих учение об углах, вписанных в окружность и описанных около нее, таким образом, доказывается в «Началах» средствами собственно евклидовой геометрии; эти доказательства почти без изменения перешли в современные нам учебники.

Только предложения III.28, 29 (равные хорды в одном и том же круге стягивают равные дуги, и обратно), а также предложение III.30 (деление дуги окружности пополам), естественно, устанавливаются Евклидом без помощи постулата о параллельных (принадлежат абсолютной геометрии).

3. Предложения III.35—37. Соотношения между отрезками хорд, секущих и касательных, проходящих через общую точку.

Предложение III.35. Если несколько хорд окружности пересекаются в одной точке, то все прямоугольники, построенные каждый на двух отрезках соответствующей хорды, равновелики.

Очень характерно, что Евклид доказывает эту теорему, не пользуясь теорией подобия, которой он здесь еще не располагает; но предложение все же явно принадлежит собственно евклидовой геометрии.

Аналогично доказываются предложения об отрезках секущих, сначала без привлечения касательной, а потом по сопоставлению с ней.

4. Обзор содержания третьей книги «Начал». Мы видим, что третья книга «Начал», так же как и первая, разбивается на две части: первая часть содержит свойства хорд и касательных, принадлежащие абсолютной геометрии (предложения III.1—19); к ним, однако, примыкают еще предложения III.28—30, также принадлежащие абсолютной геометрии. Вторая часть содержит учение об углах, вписанных в окружность, об углах, составленных хордой и касательной, и об отрезках хорд и секущих, пересекающихся в одной точке; эти предложения принадлежат собственно евклидовой геометрии. При чтении этих книг создается впечатление, что Евклид произвел это деление совершенно сознательно, с точными учетом того, в какой мере каждое предложение зависит от пятого постулата; только предложения III.28—30 следовало бы для выдержанности этого деления поместить раньше (после предложения III.19).

5. Четвертая книга «Начал». Следующая, четвертая книга «Начал» посвящена учению о многоугольниках, вписанных в окружность или описанных около окружности. В ней распределение предложений в отношении их принадлежности абсолютной или собственно евклидовой геометрии не столь четко выдержано в том смысле, что предложения той и другой категории следуют друг за другом попеременно. Значительное большинство предложений этой книги явно принадлежит собственно евклидовой геометрии. Так, предложения IV.2, 3 (построение треугольника с заданными углами, вписанного в данную окружность и описанного около нее) принадлежат собственно евклидовой геометрии, потому что их доказательство опирается на теорему I.32 о сумме углов треугольника; предложения IV.6—9 трактуют о квадрате, вписанном в окружность или описанном около окружности; об окружности, вписанной в квадрат или описанной около квадрата. Но самое существование квадрата или прямоугольника Евклид установил попутно, опираясь на пятый постулат. Предложения принадлежат, таким образом, собственно евклидовой геометрии. Точно так же доказательство вспомогательного предложения IV.10 и построение правильного пятиугольника, вписанного в данную окружность или описанного около нее (IV.11, 12), построение правильных многоугольников — шестиугольника, пятинадцатиугольника (а в связи с этим и десятиугольника), — вписанных в данную окружность (IV.15, 16), выполняются средствами собственно евклидовой геометрии.

Главное значение этих предложений заключается в построении правильных многоугольников циркулем и линейкой. Но доказательства предложений IV.13, 14 — в правильный пятиугольник можно вписать окружность и около правильного пятиугольника можно описать окружность — выполняются средствами абсолютной геометрии. Более того, теми же средствами могут быть установлены аналогичные теоремы в применении к любому правильному многоугольнику.

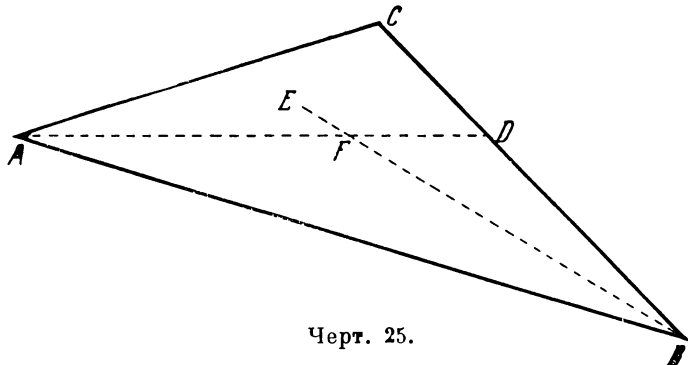
Несколько сложнее обстоит дело в предложениях IV.4, 5 — вписать в любой заданный треугольник окружность и описать окружность около произвольно заданного треугольника. Обычное решение этих задач заимствовано у Евклида. Чтобы вписать в данный треугольник окружность, проводятся биссектрисы двух его углов; чтобы описать окружность около заданного треугольника, восстанавливаются перпендикуляры из середин двух его сторон. Выполнив это, Евклид, как это, следуя ему, часто делают и авторы современных учебников, безоговорочно принимает, что биссектрисы в первом случае и перпендикуляры во втором — пересекаются; точки пересечений служат центрами искомых окружностей. Между тем, существование точки пересечения требует доказательства; и от тех средств, какими это было бы доказано, зависело бы отнесение теоремы к абсолютной или собственно евклидовой геометрии.

В первом случае (когда речь идет о биссектрисах) это доказательство в такой мере напрашивается, что сомнений не остается: биссектриса AD угла CAB входит внутрь треугольника и, выходя из него, встречается сторону BC в точке D (черт. 25). Теперь биссектриса BE угла ABC входит внутрь треугольника ABD и, выходя из него, встречается сторону AD в точке F . Это допущение принадлежит к числу тех, которые Евклид молчаливо принимает, начиная с первого предложения¹⁾. Теорема явно принадлежит абсолютной геометрии. Заметим, что такое же рассуждение

¹⁾ Об этом допущении, связанном с так называемой аксиомой Паша, см. ниже стр. 123.

нужно провести в предложении IV.14 (описать окружность около правильного пятиугольника).

Но несколько сложнее обстоит дело во втором случае—в вопросе о пересечении серединных перпендикуляров. Это — единственное предложение на протяжении всего сочинения, относительно которого на основе установленного выше критерия — по тексту Евклида — остается неясным, в какую группу это предложение надлежит отнести; не ясно потому, что



Черт. 25.

Евклид не доводит доказательство до конца. Мы им займемся несколько ниже¹⁾ и убедимся, что оно принадлежит не абсолютной, а собственно евклидовой геометрии.

§ 8. ПЯТАЯ И ШЕСТАЯ КНИГИ «НАЧАЛ». УЧЕНИЕ О ПРОПОРЦИОНАЛЬНОСТИ И ПОДОБИИ ФИГУР

1. Постановка задачи. Пятая книга «Начал» посвящена теории пропорций. Учение об отношениях и пропорциях было разработано пифагорейцами в применении к числам. Когда греки той эпохи говорили о числах, то они всегда разумели целые числа (конечно, целые положительные — натуральные числа). Повидимому, это учение, быть может в некоторой модификации, воспроизведено в VII книге «Начал». По существу, оно сводится к следующему.

Пусть a и b — два целых числа, p — их общий наибольший делитель, так что

$$a = \alpha p, \quad b = \beta p, \quad (1)$$

где α и β — взаимно простые числа; при этих условиях в то время говорили, что число a содержит α β -х частей числа b ; так говорит и Евклид в VII книге «Начал». Если даны две пары чисел a, b и c, d и если a содержит столько частей числа b , сколько таких же частей числа d содержит число c , то эллинистские математики той эпохи говорили, что эти четыре числа пропорциональны (составляют пропорцию), а именно, что a так относится к b , как c относится к d , т. е. в наших современных обозначениях

$$a : b = c : d. \quad (2)$$

Точнее, пусть рядом с равенствами (1) имеют место равенства

$$c = \gamma q, \quad d = \delta q, \quad (3)$$

¹⁾ См. стр. 156—157.

где q есть общий наибольший делитель чисел c и d ; согласно эллинской терминологии, данные две пары чисел составляют пропорцию (2), если $\alpha = \gamma$ и $\beta = \delta$, т. е. если рядом с равенствами (1) имеют место равенства:

$$c = \alpha q, \quad d = \beta q. \quad (1')$$

Из соотношений (1) и (1') вытекает, что $ad = bc$, а из этого основного свойства вытекает вся теория пропорций.

Таковы начала, на которых строилось учение о пропорциях до Евклида; так ее строит в применении к целым числам и Евклид в седьмой книге «Начал». Ясно, что таким же образом может быть определена и пропорциональность значений геометрической величины, скажем, отрезков, если они соизмеримы; в этом случае в предыдущем рассуждении под p надлежит разуметь наибольшую общую меру отрезков a и b , под q — наибольшую общую меру отрезков c и d . Определение остается то же, развитие теории несколько усложняется, но, по существу, не встречает затруднений. Но по всему своему замыслу это определение пригодно только для соизмеримых значений одной и той же величины или двух различных величин. В том и в другом случае дробь $\frac{\alpha}{\beta}$ есть общее отношение рассматриваемых значений этой величины.

Понятие о дроби отнюдь не было чуждо пифагорейцам; но они все же предпочитали иметь дело с целыми числами; об отношении двух чисел или двух значений величины они, собственно, четко не говорили; они определяли только пропорциональность двух пар чисел или (соизмеримых) значений одной и той же или двух различных величин.

Но те же пифагорейцы обнаружили существование несоизмеримых отрезков. Теория пропорций, построенная для соизмеримых отрезков, не допускала непосредственного применения к несоизмеримым отрезкам, вообще к несоизмеримым значениям величин, — не допускала потому, что она по всему своему замыслу предполагала существование общей меры рассматриваемых значений величины. Между тем геометрия, безусловно, требовала такой теории пропорциональности, которая могла бы получить применение и в том случае, когда сравнению подлежат и несоизмеримые отрезки или другие несоизмеримые геометрические объекты. Необходимо было поэтому дать такое построение учения о пропорциональности, которое было бы основано на совершенно других началах. Более того, это учение требовало такого построения, которое могло бы получить применение не только к числам, но и к значениям любой величины. Такое построение, безукоризненно выполненное, содержится в пятой книге «Начал». Это одно из наиболее замечательных построений, которые мы находим в «Началах». В 1-й схолии (автор которой остается неизвестным) к пятой книге «Начал» указывается, что эта теория построена Евдоксом, учителем Платона. Это очень вероятно, потому что вся теория, как видно из «Второй аналитики», была хорошо известна Аристотелю, но не была известна пифагорейцам. «Теория эта, — говорится в той же схолии, — построена так, что она пригодна и в геометрии, и в арифметике, и во всякой другой математической дисциплине».

2. Замысел теории пропорциональности Евдокса-Евклида. Чтобы выяснить замысел теории Евдокса-Евклида, возвратимся к изложенной выше теории пропорциональности, построенной пифагорейцами для чисел. Если четыре (целых) числа a, b, c, d составляют пропорцию (2), то имеют место равенства (1) и (1'). Если умножим первые равенства (1) и (1') почлен-

но на целое число m , вторые — на целое число n , то получим

$$ma = m\alpha p, \quad nb = n\beta p, \quad (4)$$

$$mc = m\alpha q, \quad nd = n\beta q. \quad (4')$$

Если бы при этом оказалось, что

$$ma = nb,$$

то это означало бы, что $m\alpha = n\beta$, и вследствие этого было бы

$$mc = nd.$$

Если бы оказалось, что $ma > nb$, то это означало бы, что $m\alpha > n\beta$, и потому имело бы место неравенство $mc > nd$. И таким же образом, если бы оказалось, что $ma < nb$, то имело бы место неравенство $mc < nd$; иными словами, какое соотношение равенства или неравенства имеет место между кратными ma и nb первых двух чисел, такое же соотношение имеет место между равнократными им значениями чисел второй пары mc и nd . Иначе говоря, каждое из соотношений между кратными первой пары чисел

$$ma > nb, \quad ma = nb, \quad ma < nb \quad (5)$$

влечет за собой такое же соотношение между равнократными им значениями второй пары чисел, соответственно,

$$mc > nd, \quad mc = nd, \quad mc < nd. \quad (5')$$

Это можно выразить следующей теоремой.

Теорема 1. Если числа a, b и c, d пропорциональны в пифагорейском значении этого слова, т. е. составляют пропорцию (2), то всякое соотношение равенства или неравенства между кратными ma и nb первой пары влечет за собой такое же соотношение между «равнократными им» значениями mc и nd чисел второй пары.

Эта теорема устанавливает, таким образом, некоторый признак, свойственный двум парам пропорциональных чисел; покажем теперь, что это свойство характеризует пропорциональность четырех чисел, т. е. выражает признак не только необходимый, но и достаточный для того, чтобы четыре числа были пропорциональны. Именно, докажем обратную теорему.

Теорема 2. Если четыре (целых) числа a, b и c, d таковы, что каждое из соотношений равенства или неравенства между числами, кратными первых двух из них, влечет за собой такое же соотношение между равнократными чисел второй пары, то эти числа пропорциональны.

В самом деле, каковы бы ни были эти четыре числа, если p есть общий наибольший делитель чисел a и b , а q — общий наибольший делитель чисел c и d , то равенства (1) и (3) всегда имеют место. Чтобы доказать теорему, нужно обнаружить, что при условиях задания $\alpha = \gamma$ и $\beta = \delta$. В самом деле, допустим противное, т. е. допустим, что эти равенства совместно не существуют; так как α, β , как и γ, δ , — числа взаимно простые, то при сделанном допущении произведение $\alpha\delta$ не может быть равно $\beta\gamma$. Положим, что $\alpha\delta > \beta\gamma$, так что $\alpha\delta - \beta\gamma$ есть целое положительное число. В таком случае произведение $m(\alpha\delta - \beta\gamma)$ неограниченно возрастает вместе с m и, следовательно, найдется такое значение m , при котором

$$m\alpha\delta - m\beta\gamma > \beta\delta.$$

Но в таком случае найдется, по крайней мере, одно такое целое число n , что

$$ma\delta > n\beta\delta > m\beta\gamma.$$

Следовательно,

$$ma\alpha > n\beta\alpha, \text{ т. е. } ma > nb,$$

и в то же время

$$m\gamma q < n\delta q, \text{ т. е. } mc < nd,$$

— условие задания не выполнено. Итак, при условии задания имеют место оба равенства: $\alpha = \gamma$ и $\beta = \delta$, т. е. имеет место пропорция (2). Таким образом, доказано, что совместное существование каждого из трех соотношений (5) с соответствующим соотношением (5'), каковы бы ни были целые числа m и n , есть условие, необходимое и достаточное для пропорциональности четырех чисел в теории пифагорейцев; этим свойством пропорциональность четырех чисел вполне характеризуется.

3. Тот же результат с точки зрения современной нам теории пропорций. Предыдущее рассуждение несколько громоздко; оно объясняется естественным желанием сохранить подход греков в рассматриваемую эпоху. Дело в том, что греки, даже пифагорейцы, как уже сказано выше, не были склонны оперировать дробями, хотя понятие дроби, собственно, не было им чуждо. Рассуждение становится проще, если подойдем к этой теореме с современной нам точки зрения. Для нас отношение целого числа a к целому числу b есть число — дробь $\frac{a}{b}$. Если числа a , b и c , d пропорциональны, то имеет место равенство двух дробей:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}; \quad (6)$$

вместе с тем, каковы бы ни были целые числа m и n ,

$$\frac{ma}{nb} = \frac{mc}{nd};$$

и вследствие этого каждое из соотношений (5) влечет за собой соответствующее соотношение (5'). Положим обратно, что каждое из соотношений (5) влечет за собой соответствующее соотношение (5'). В таком случае четыре числа пропорциональны, т. е. имеет место равенство (6). В самом деле, положим, что равенство (6) не имеет места, и скажем $\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$. В таком случае всегда можно найти рациональное число $\frac{n}{m}$, удовлетворяющее неравенствам:

$$\frac{a}{b} > \frac{n}{m} > \frac{c}{d};$$

отсюда

$$\frac{ma}{nb} > 1 > \frac{mc}{nd},$$

т. е. в этом случае существуют два целых числа, при которых

$$ma > nb, \quad mc < nd.$$

4. Определение пропорциональности по Евдоксу-Евклиду. Критерий пропорциональности двух пар чисел, установленный теоремами 1 и 2, имеет ту существенно важную особенность, что он может быть применен к тому случаю, когда мы имеем дело не с числами, а со значениями

величин — одной и той же в каждой паре. Отсюда — следующее определение пропорциональности в пятой книге «Начал». Положим, что мы имеем четыре значения попарно одной и той же величины a, b и c, d ; это значит: a, b — значения одной величины, c, d — значения той же или другой величины. Возьмем кратные значения a и b , т. е. ma и nb с произвольными множителями m и n ; затем возьмем, по терминологии Евклида, равнократные им значения mc и nd . В зависимости от выбора множителей m и n , кратное a (ma) может оказаться большим или меньшим, иногда даже равным кратного b (nb); во всяком случае должно иметь место одно и только одно из соотношений (5); ему всегда сопутствует одно из соотношений (5').

Если при произвольно взятых значениях множителей m и n тому соотношению (5), которое при этих значениях множителей фактически имеет место, неизменно соответствует такое же соотношение (5') (т. е. с тем же знаком равенства или неравенства), то будем говорить, что значения a, b первой величины пропорциональны значениям c, d второй величины, и именно a относится к b , как c относится к d .

Иначе говоря, если кратные первого и второго членов одной пары всегда связаны тем же соотношением равенства или неравенства, каким связаны соответствующие им равнократные членов другой пары, то говорим, что члены (значения величины) одной пары пропорциональны членам другой пары.

Ясно, что это определение пропорциональности не предполагает соизмеримости членов каждой пары; оно предполагает только, что члены каждой пары должны представлять собой значения одной и той же величины и что величины эти таковы, что каждое значение допускает кратное с любым коэффициентом кратности.

На основе этого определения Евклид в пятой книге «Начал» развешивает всю теорию пропорций. Книга состоит из двадцати пяти предложений. Сначала идут чрезвычайно элементарные предложения о кратных значениях величины (Евклид говорит просто о кратных величинах — «μειρέθη»). В известной мере мы здесь имеем развитие геометрической алгебры; так, первые четыре предложения устанавливают следующие тождества:

$$\begin{aligned} m(a + b + c + \dots) &= ma + mb + mc + \dots, \\ ma + na + pa + \dots &= (m + n + p + \dots) a, \\ m \cdot na &= mn \cdot a, \\ m(a - b) &= ma - mb. \end{aligned}$$

Под $a, b, c, \dots$ Евклид разумеет различные значения одной и той же величины (однородные величины), но иллюстрирует их всегда отрезками. На базе этих подготовительных предложений Евклид доказывает, что члены пропорции можно переставлять (в известном порядке), и устанавливает производные пропорции, вытекающие из данной.

5. Отношение двух значений величины. Приведенное выше определение пропорциональности точно передает замысел Евклида, но по формулировке все же с ним не совпадает. Дело в том, что Евклид рассматривает не только пропорциональность двух пар значений величины, но и отношение двух значений одной и той же величины. Это выясняется в следующем порядке. Пятая книга начинается восемнадцатью определениями. Приведем сначала полностью первые шесть из них. Сохраняем термино-

логию Евклида, хотя в соответствии с современной нам терминологией следовало бы говорить не о величинах, а о значениях величины; это не вызовет у читателя недоразумений.

1. Величина есть часть другой величины, меньшая большей, если она измеряет большую.

Слово «часть», таким образом, здесь и в дальнейшем употребляется в специальном значении слова; «меньшая измеряет большую» означает, что она содержится в большей целое число раз.

2. Большая [величина] кратна меньшей, если она измеряется меньшей.

3. Отношение есть некоторое количественное соотношение между двумя однородными величинами ($\mu\epsilon\tau\epsilon\theta\acute{\epsilon}\omega\nu\ \delta\iota\mu\epsilon\tau\epsilon\nu\omega\nu$).

4. Говорят, что две величины имеют отношение одна к другой, если одна по достаточном повторении способна превзойти другую.

5. Говорят, что величины находятся в том же отношении и, первая ко второй и третья к четвертой, если, какие бы равнократные мы бы ни взяли первой и третьей величины и какие бы равнократные мы бы ни взяли второй и четвертой величины, равнократные первых двух в том же порядке равны одна другой, больше или меньше ее, в каком это имеет место во второй паре.

6. Величины, имеющие одно и то же отношение, будем называть пропорциональными.

Ясно, что совокупность определений 5—6 устанавливает понятие о пропорциональности пары значений одной величины другой паре значений той же или другой величины совершенно так же, как это сделано выше, в предыдущей рубрике. Принципиальное различие заключается в том, что Евклид пользуется понятием «отношение», которого мы избегали в предыдущем изложении. Если бы Евклид рассматривал только равные отношения, то он мог бы обойтись без этого понятия, пользуясь только понятием пропорциональности, как это, конечно, по его замыслу изложено в предыдущей рубрике. Но он идет дальше этого, — он рассматривает и неравные отношения. Это получает выражение в следующем определении.

7. Если из равнократных кратное первой величины превосходит кратное второй, между тем как кратное третьей не превосходит кратного четвертой, то говорят, что первая величина имеет ко второй большее отношение, чем третья к четвертой.

Иными словами, если при прежних обозначениях существуют два целых числа m и n таких, что $ma > nb$, тогда как $mc \leq nd$, то отношение a к b признается большим, чем отношение c к d .

6. Анализ определения отношения. Вникнем теперь внимательнее в определение отношения, данное в пятой книге «Начал». Определение 3, устанавливающее понятие об отношении двух величин, снова грешит против аристотелева правила, но в другом смысле, чем определения первой книги. Родовое понятие, которое включает понятие «отношение» ($\lambda\acute{o}\gamma\omicron\varsigma$), есть соотношение ($\sigma\chi\acute{\epsilon}\sigma\iota\varsigma$) — это есть как раз то слово, которым Аристотель называет четвертую свою категорию; Евклид определяет, таким образом, отношение, включая его в одну из аристотелевых категорий; но видовых отличий он не дает. Аристотелева форма определения здесь фигурирует только по видимости, ее в действительности нет;

включение понятия «отношение» не в ближайшее родовое понятие, а в далеко стоящую категорию — соотношение ($\sigma\chi\epsilon\sigma\iota\varsigma$) — без указания каких бы то ни было видовых отличий ничего не дает. Отступление от аристотелева правила здесь как раз идет в противоположном направлении, чем в первой книге. Чем объясняется, что Евклид отводит понятие «отношение» в столь удаленную категорию? Это очень просто: Евклид не располагает более близким родовым понятием, в которое он мог бы его включить. Для нас отношение двух значений величины есть число; для эллинского математика это — не число, ибо отношения имеют и несоизмеримые значения величины; с нашей точки зрения, отношение в этом случае есть иррациональное число, — а иррационального числа эллинский математик не знает, — это совершенно чуждое ему понятие; число ($\alpha\rho\iota\theta\mu\acute{\varsigma}$) есть целое число, с некоторой натяжкой (позднее признанной) это — дробь; иррациональное число — понятие, в сознании греческого геометра той эпохи вовсе не существующее. Такое положение явно привело Евклида (Евдокса) к тому, что ему нет надобности подыскивать более близкое родовое понятие или видовое отличие для определения понятия «отношение»; ему важно только установить, в каком случае два отношения равны, в каком случае два отношения не равны; и это он определяет совершенно безукоризненно. И всюду — на всем протяжении сочинения — Евклид, собственно, никогда не пользуется понятием «отношение», он пользуется двумя понятиями — «равные отношения» (характеризующие пропорциональные значения величины) и «неравные отношения», каковые два понятия у него точно определены.

Однако Евклид хорошо понимает, что определить равные и неравные отношения, установить отличие большего отношения от меньшего нельзя совершенно произвольно, — что самые понятия «равно», «больше», «меньше» следуют некоторым законам, которые нельзя игнорировать. Более того, он хорошо разбирается в том, каковы эти законы. Соответственно этому, предложения V.7—11 и V.13, 14 устанавливают, что равенство и неравенство отношений, как они формулированы в определениях 5 и 7, действительно следуют этим законам. Предложение V.7 устанавливает, что равные величины имеют к одной и той же величине или к двум равным величинам равные отношения. Предложение V.8 гласит, что из двух неравных величин большая имеет к любой третьей величине большее отношение, нежели меньшая, а третья величина имеет к меньшей большее отношение, нежели к большей. Предложения V.9, 10 суть обратные двум предыдущим. Предложение V.11 устанавливает, что два отношения, равных третьему, равны между собой. Наконец, предложение V.13 устанавливает, что если $a : b > c : d$, а $c : d = e : f$, то $a : b > e : f$. И далее, V.14 — если $a : b = c : d$, то, в зависимости от того, какое равенство или неравенство имеет место, $a > c$, $a = c$, $a < c$, — такое же равенство или неравенство связывает члены b и d , т. е., соответственно, $b > d$, $b = d$, $b < d$.

Исчерпываются ли этим те свойства равенства и неравенства, которыми приходится пользоваться в математике, в частности, в геометрии? Нет, следовало бы еще доказать, что неравенства

$$a : b > c : d \text{ и } c : d \geq e : f \quad (7)$$

влекут за собой неравенство $a : b > e : f$.

Это легко сделать; мы проведем здесь доказательство этого предложения для того случая, когда $c : d > e : f$. Из задания (7) тогда следует, что существуют такие числа m , n и m' , n' , что

$$ma > nb \text{ и } mc < nd, \quad (8a)$$

$$m'c > n'd \text{ и } m'e < n'f. \quad (8b)$$

Второе неравенство (8a) и первое (8b) дают:

$$mn'c < nn'd \text{ и } m'nc > nn'd.$$

Отсюда следует, что $mn' < m'n$.

Теперь первое неравенство (8a) и второе (8b) дают:

$$mn'a > nn'b \text{ и } m'ne < nn'f,$$

а так как $mn' < m'n$, то

$$mn'a > nn'b, \quad mn'e < nn'f,$$

т. е.

$$a : b > e : f.$$

Определение Евклида равных и неравных отношений совершенно безукоризненно; это станет еще яснее позже, когда будут попутно точно установлены признаки, характеризующие понятия «больше» и «меньше». Наконец, основываясь на своем определении пропорции, Евклид, как уже сказано, дает правило возможных перестановок членов пропорции, учение о производных пропорциях и даже учение о сложных пропорциях¹⁾.

7. Аксиоматическое определение. Определение отношения, как оно дано у Евклида, имеет для нас большое значение еще с другой точки зрения. Самое понятие «отношение», как мы видим, определением 3 не установлено. Будем поэтому рассматривать его как основное понятие, различным элементам которого (т. е. различным отношениям) свойственны понятия «равно», «больше», «меньше». Будем также считать, что понятия «равно», «больше» и «меньше» установлены раньше для значений рассматриваемой величины. В таком случае евклидовы определения 5 и 7 следует рассматривать не как определения, а как постулаты, которые устанавливают свойства, присущие понятию отношение; именно, мы принимаем постулат: а) если при произвольно взятых значениях множителей m и n тому равенству или неравенству (5), которое при этих множителях фактически имеет место, неизменно сопутствует такое же соотношение (5'), то отношение $a : b$ равно отношению $c : d$; б) если существует такая пара целых чисел m и n , при которых $ma > nb$, а $mc \leq nd$, то отношение $a : b$ больше отношения $c : d$.

Если мы эти два положения примем, то из них возможно будет построить всю теорию отношений и пропорций. Мы можем поэтому сказать, что этими двумя постулатами фактически определяется понятие «отношение», а в связи с определением 6 определяется также и пропорция (пропорциональность четырех величин). Мы приходим, таким образом, к иной форме определения, — отличной от аристотелевой; она сводится к тому, что понятие определяется некоторой совокупностью постулатов, некоторой аксиоматикой, характеризующей это понятие. Такое определение называют **а к с и о м а т и ч е с к и м**. Аксиоматические определения получили в настоящее время очень важное, в некоторых случаях доминирующее значение. В отделе, посвященном аксиоматике геометрии, мы к такого рода определениям придем и очень подробно на них остановимся. Здесь нам было важно выяснить, что Евклид (Евдокс?) с удивительной принципиальностью фактически уже пришел к такого рода опре-

¹⁾ Точное установление всех свойств пропорций нуждается в более подробном изложении, может быть, даже в несколько более подробном, чем это сделано у Евклида. Читатель найдет такое изложение в комментариях Д. Д. Мордухай-Болтовского к книге V «Начал» [23].

делениям, не предусмотренным схемой Аристотеля, и вся теория пропорциональности им построена на базе аксиоматического определения отношения.

8. Добавочное замечание. Однако в части определений, относящихся к понятию «отношение», имеется еще определение 4, которое ограничивает число «величин», допускающих отношение; именно, отношение могут иметь только такие величины, для которых достаточно большое кратное одной из них превзойдет другую. Каков смысл этого дополнительного требования? Прежде всего, оно устанавливает, что отношения могут иметь только «однородные величины», как говорили прежде, — только значения одной и той же величины, как говорят теперь. Некоторые комментаторы, например де-Морган (A. De-Morgan [³¹]), считают, что этим значение рассматриваемого дополнения исчерпывается. Однако нужно ли содержащееся в определении 4 дополнение для этой именно цели, когда в определении 3 понятие «отношение» уже связывается с «однородными величинами»? Вряд ли. Правда, этим признаком как бы характеризуется однородность рассматриваемых величин. Но исчерпывается ли этим цель Евклида? В настоящее время нам совершенно ясна необходимость такого дополнения; оно явно связано с так называемой аксиомой Архимеда ¹⁾. Но совершенно неясно, как пришел к этому указанию Евклид. Нам придется еще к этому вопросу возвратиться.

9. Учение о подобии. Теория пропорциональности, как она изложена в пятой книге Евклида, строго говоря, не есть геометрическое учение. Она может быть применена к любым величинам — геометрическим, физическим, механическим, как это отмечено в упомянутой выше схолии. Нужно только, чтобы члены отношения были значениями одной и той же величины, т. е. чтобы было установлено, при каких условиях одно значение этой величины равно, больше или меньше другого ее значения, и чтобы каждое ее значение могло быть увеличено в любое число раз, чтобы можно было составить кратное *та* каждого значения *a* при любом целом *m*.

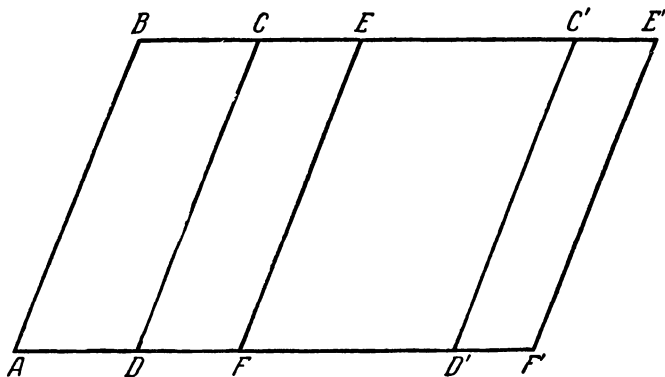
Учение об отношениях и о пропорциях, т. е. пятая книга Евклида, ни в каком случае не может быть отнесено к собственно евклидовой геометрии. Напротив, учение о подобии, составляющее содержание шестой книги, целиком принадлежит собственно евклидовой геометрии. Точкой отправления этого учения служат следующие два предложения.

Предложение VI.1. Параллелограммы и треугольники, имеющие равные высоты, пропорциональны основаниям.

Евклид, конечно, имеет в виду площади параллелограммов и треугольников. Доказательство ведется следующим образом. Так как параллелограммы, имеющие равные основания и равные высоты, равновелики, то мы можем считать, что два данных параллелограмма имеют общий угол и могут быть расположены, как параллелограммы $ABCD$ и $ABEF$ (черт. 26). Пусть теперь $AD' = mAD$, $AF' = nAF$ и пусть $C'D' \parallel CD$ и $E'F' \parallel EF$. Тогда $ABC'D' = m \cdot ABCD$ и $ABE'F' = n \cdot ABEF$. Ясно, если $AF' \leq AD'$, то соответственно $ABE'F' \leq ABC'D'$. А это и означает, что параллелограммы $ABCD$ и $ABEF$ пропорциональны своим основаниям AD и AF .

¹⁾ См. ниже стр. 96.

Нельзя не отметить ту простоту, с которой это предложение доказывается, исходя из евклидова определения пропорциональности; совершенно не приходится отделять случай соизмеримости от случая несоизмеримости. Поэтому мы неоднократно будем пользоваться евклидовым определением пропорциональности.



Черт. 26.

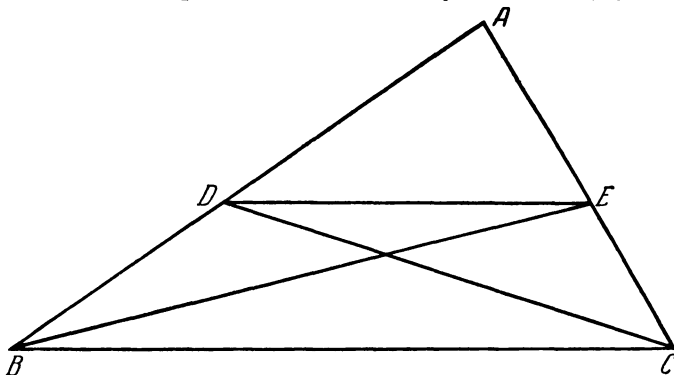
Треугольники составляют каждый половину соответствующего параллелограмма; теорема непосредственно распространяется и на треугольники.

Предложение VI.2. Прямая, параллельная основанию треугольника, делит боковые стороны на пропорциональные части.

Доказательство. Положим, что в треугольнике ABC прямая DE параллельна основанию BC (черт. 27). Тогда, согласно предыдущей теореме

$$ADC : DBC = AD : DB, \quad AEB : ECB = AE : EC. \quad (9)$$

Но треугольники BDE и CDE , имеющие общее основание DE и равные высоты, равновелики; прибавляя к каждому из них треугольник ADE ,



Черт. 27.

приходим к тому, что треугольник AFB равновелик треугольнику ADC . Точно так же треугольники DBC и ECB , имеющие общее основание BC и равные высоты, равновелики. Поэтому в равенствах (9) первые отношения равны, следовательно, равны и вторые отношения.

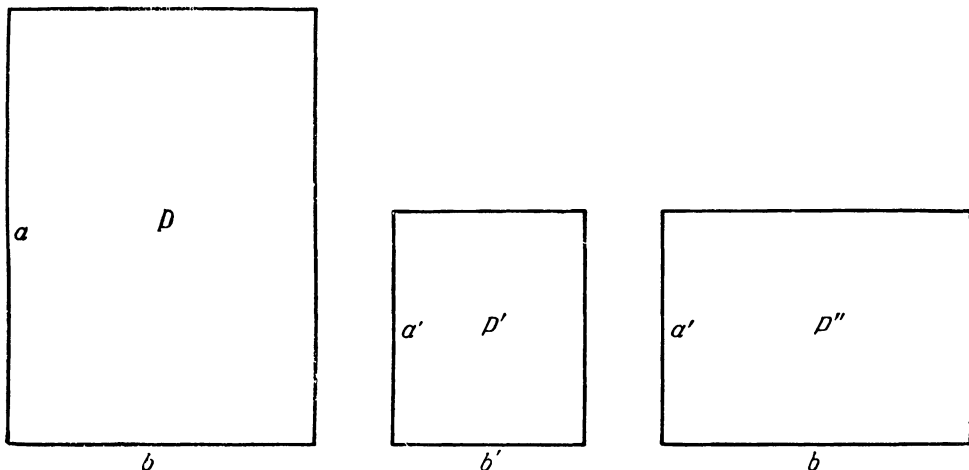
Когда эти основные теоремы доказаны, то вся теория подобия треугольников и многоугольников строится совершенно формально так, как это повторяют наши учебники.

Что эта теория принадлежит собственно евклидовой геометрии, совершенно ясно.

10. Общее учение о площадях параллелограмов и треугольников. Положим, что мы имеем три значения x , y , z одной величины и три значения a , b , c другой величины. Положим, что

$$x : y = a : b, \quad y : z = b : c.$$

Об отношении $x : z$ Евклид говорит, что оно «составлено из отношений $x : y$ и $y : z$ » (по-нашему, оно есть произведение этих отношений); Евклид



Черт. 28.

доказывает, что из равенств $a : b = a' : b'$ и $b : c = b' : c'$ вытекает равенство отношений $a : c = a' : c'$.

Положим теперь, что мы имеем прямоугольники P , P' с основаниями b и b' и высотами a и a' (черт. 28). Составим прямоугольник P'' с основанием b и высотой a' . Согласно предложению VI.1,

$$P : P'' = a : a' \quad \text{и} \quad P'' : P' = b : b'.$$

Но отношение $P : P'$, согласно установленной терминологии, составлено из отношений $P : P''$ и $P'' : P'$. Это приводит к заключению, что отношение двух прямоугольников, составлено из отношения оснований и отношения высот. К этому, по существу, и сводится у Евклида учение о площадях прямоугольников, а затем и многоугольников. Даже формулированная выше теорема об отношении площадей двух прямоугольников или параллелограмов у Евклида в общем виде не дана; он ограничивается случаем двух параллелограмов, имеющих общий угол, из которого общее предложение уже непосредственно вытекает.

Так как Евклид отношение двух значений величины не рассматривает как число, то об измерении площади, о выражении ее числом он не говорит. Геометрию Евклида в этом смысле нельзя назвать метрической в подлинном значении этого слова.

Первыми шестью книгами «Начал» исчерпывается планиметрия.

§ 9. СЕДЬМАЯ — ДЕСЯТАЯ КНИГИ «НАЧАЛ» И УЧЕНИЕ ОБ ИРРАЦИОНАЛЬНЫХ ВЕЛИЧИНАХ. АРИФМЕТИКА ЕВКЛИДА

1. Арифметические книги «Начал». Следующие три книги (седьмая—девятая) составляют так называемую арифметику Евклида, вернее, как мы уже отмечали, — начала теории чисел. Содержание этих книг, несомненно, также было известно до Евклида. Полагают, что в конце V и в начале IV века до нашей эры существовали «Начала арифметики», составленные по такому же образцу, по какому строились и «Начала геометрии». Хис высказывает даже уверенность, что существовало несколько сочинений этого рода. Ни одно из них до нас не дошло, повидимому, по той же причине, по которой не дошли и ранние учебники геометрии; Евклид включил этот материал в свои «Начала». Излагать здесь содержание этих книг столь же подробно, как выше изложено содержание геометрических книг, нет оснований. Во-первых, они прямого отношения к геометрии не имеют; совершенно даже неясно, почему Евклид включил их в свое сочинение, если рассматривать его как «Начала» геометрии. Очень возможно, что Евклид смотрел на свою книгу как на элементы всей математики. Во-вторых, предложения, содержащиеся в этих книгах, в значительной своей части тривиальны и того принципиального значения, какое сохранили геометрические книги «Начал», не имеют. В-третьих, вряд ли справедливо и высказываемое некоторыми авторами предположение, что назначение этих трех книг заключается в их применении к десятой книге. С одной стороны, и сама десятая книга представляет собой в «Началах» довольно чужеродное тело; с другой стороны, в десятой книге находят применение только простейшие арифметические предложения, и потому совершенно невероятно, чтобы ради этих применений Евклид развертывал целый трактат по арифметике, доведенный до учения о совершенных числах.

На всем протяжении арифметических книг Евклид изображает целые числа отрезками. Никакого применения эта геометрическая форма не получает; ни предложения, ни доказательства от этого даже в смысле наглядности ничего не выигрывают. Смотреть поэтому на седьмую — девятую книги как на геометрическую арифметику, подобно тому, как вторая книга представляет собой геометрическую алгебру, нет никаких оснований. Они составляют отдельное сочинение, которое могло бы быть издано совершенно независимо от остальных книг «Начал». Именно поэтому многие издатели и переводчики «Начал» эти книги вовсе опускают. Петрушевский, которому до последнего времени принадлежало лучшее русское издание «Начал» ^[24], выпустил арифметические книги отдельно от остальных ^[25]. Очень ценно, что они сохранились в новом издании «Начал» ^[28].

Общее содержание этих книг можно характеризовать как учение о делимости целых чисел, построенное на основе теории пропорций. Здесь нецелесообразно давать обстоятельное изложение седьмой — девятой книг, хотя сами по себе они представляют очень большой интерес.

2. Краткие сведения о десятой книге «Начал». Десятая книга «Начал» посвящена учению об иррациональных величинах. Это — самая обширная книга во всем сочинении; она содержит сто пятнадцать предложений и составляет около третьей части всего сочинения. По изложению она, несомненно, самая трудная книга и, нужно сказать, безнадежно устаревшая. Но задача, которую себе поставил автор, была настолько трудна, в ее решение вложено столько остроумия, что обойти ее полным молча-

нием в настоящем обзоре «Начал» невозможно. К тому же очень вероятно, что это — наиболее оригинальная часть сочинения в том смысле, что разработка ее принадлежит самому Евклиду в большей мере, чем других книг «Начал».

Десятый книге предшествует обширная схолия неизвестного автора. В ней указывается, что пифагорейцы впервые обнаружили существование несоизмеримых друг с другом величин; к этому присоединяется легенда, что первый, опубликовавший это открытие, погиб при кораблекрушении. Некоторые авторы склонны приписывать этой легенде символическое значение, как указание того, с какой трудностью было сопряжено распространение нового учения. Хорошо известен простейший пример несоизмеримых отрезков: диагональ квадрата несоизмерима с его стороной. Этот факт был уже хорошо известен не только Аристотелю, но и Платону. Древнее его доказательство, которое многие издатели включали в «Начала» (в виде предложения X.117 — несомненно не подлинного¹⁾), заключается в следующем.

Пусть a — сторона квадрата, b — его диагональ. Если допустим, что они соизмеримы, то существуют два целых взаимно простых числа α и β , таких, что

$$b : a = \beta : \alpha,$$

а потому квадраты, построенные на этих отрезках, $\bar{b}^2$ и $\bar{a}^2$, относятся, как $\beta^2 : \alpha^2$:

$$\bar{b}^2 : \bar{a}^2 = \beta^2 : \alpha^2.$$

Но $\bar{b}^2 = 2\bar{a}^2$; следовательно, $\beta^2 = 2\alpha^2$, откуда следует, что β^2 , а потому и β есть число четное, число же α , как взаимно простое с ним — нечетное. Но, полагая $\beta = 2\gamma$, получаем $2\gamma^2 = \alpha^2$; следовательно, α^2 , а вместе с тем и α есть число четное. Противоречие, к которому приводит сделанное допущение, доказывает, что оно неправильно. Характерным для этого доказательства является то, что квадрат $\bar{b}^2$ в два раза больше квадрата $\bar{a}^2$. Располагая понятием о несоизмеримых значениях одной и той же величины (Евклид говорит о несоизмеримых отрезках), Евклид приходит к понятию об иррациональных отрезках. Выбрав какой-либо отрезок за исходный, естественно называть иррациональным такой отрезок, который с этим исходным отрезком несоизмерим. Рациональность или иррациональность отрезка зависит, таким образом, от выбора исходного отрезка (единицы меры). Евклид, однако, определяет иррациональные отрезки несколько иначе; именно, выбрав исходный отрезок e , Евклид считает отрезок a по отношению к нему иррациональным только в том случае, если квадрат, построенный на отрезке a , несоизмерим с квадратом, построенным на отрезке e . Диагональ квадрата при этом определении представляет собой рациональный отрезок (относительно его стороны). Евклид занимается тщательной классификацией отрезков, иррациональных по отношению к данному отрезку e .

По существу, он занимается только квадрато-радикальными отрезками, т. е. такими, длины которых (отношения к исходному отрезку) выражаются так называемыми квадрато-радикальными числами; это — числа, которые получаются из рациональных чисел повторным извлечением квадратного корня и рациональных действий. Знал ли Евклид, что он исследовал только наиболее простые иррациональности — сказать трудно. Однако рассматриваемые им иррациональные величины Евклид

¹⁾ Подробнее об этом см. в русском издании «Начал» в переводе Д. Д. Мордухай-Болтовского [28], т. II, комментарий к книге X № 67, стр. 503.

классифицирует с большим искусством. Цель этой классификации заключается в том, чтобы установить, к какому типу иррациональных отрезков принадлежат стороны правильного восьмиугольника и двенадцатиугольника (по отношению к радиусу описанного круга), а главным образом, — к какому типу принадлежат стороны правильных многогранников по отношению к радиусу описанной сферы. Мы не имеем возможности останавливаться здесь на этой своеобразной классификации. Однако мы приведем здесь предложение, показывающее, как близко Евклид подходил к современной теории пределов.

3. Алгебра соизмеримых и несоизмеримых величин. Первое предложение десятой книги содержит теорему, весьма замечательную для того времени, — теорему, вводящую в правильно построенное учение о пределах. Она заключается в следующем.

Предложение X.1. Если заданы две неравные величины¹⁾ и от большей из них отнимем часть, превышающую ее половину, от остатка отнимем часть, превышающую его половину и это будем постоянно продолжать, то придем к остатку, меньшему, нежели меньшая из заданных величин.

Ниже, в двенадцатой книге, Евклид действительно пользуется этим предложением для доказательств, основанных на предельных переходах. Здесь же Евклид пользуется им для установления критерия несоизмеримости двух величин, содержащегося в следующем предложении X. 2. Быть может, это предложение было бы уместнее поместить после идущего за ним предложения X.3, в котором излагается правило разыскания общей меры двух величин — известный алгоритм Евклида. Этот прием у Евклида изложен в предложении VII.2 в применении к целым числам. Но там этот процесс всегда приводит к цели: два целых числа всегда имеют общий делитель, — в худшем случае это — единица. Когда же речь идет о двух величинах, скажем, об отрезках, то возникают два вопроса: во-первых, всегда ли этот процесс заканчивается и, во-вторых, если он не заканчивается, — т. е. если он не приводит к остатку, содержащемуся целое число раз в предыдущем остатке, сколько бы мы его ни продолжали, — то можно ли из этого заключить, что отрезки несоизмеримы. Предложение X.2 дает ответ на второй вопрос: если последовательное деление не приводит к цели, то отрезки (вообще — величины) несоизмеримы; предложение X.10 дает ответ на первый вопрос: каков бы ни был данный отрезок, всегда можно построить неограниченное число отрезков, несоизмеримых с ним даже в квадратах, т. е. иррациональных по отношению к нему в приведенной выше терминологии Евклида²⁾. Промежуточные предложения устанавливают необходимые для доказательства этого вспомогательные предложения, главное из которых заключается в том, что две величины соизмеримы в том и только в том случае, если они относятся между собой, как два целых числа.

За этим следует так называемая алгебра соизмеримых и несоизмеримых величин. Сюда относятся теоремы: если две величины (значения одной величины) соизмеримы, то сумма и разность их соизмеримы с каждой из них; но если они несоизмеримы, то сумма и разность их несоизмеримы

¹⁾ Сохраняем здесь и ниже терминологию Евклида, хотя следовало бы говорить двух значениях одной и той же величины.

²⁾ Есть, однако, основание сомневаться в подлинности этого предложения.

с каждой из них; если в пропорции два члена одного отношения соизмеримы, то соизмеримы и члены другого отношения, и обратно. Все эти теоремы тривиальны и легко доказываются как нашими средствами, так и теми, которыми располагал Евклид.

§ 10. ОДИННАДЦАТАЯ — ТРИНАДЦАТАЯ КНИГИ «НАЧАЛ».] ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЙ ОБЗОР «НАЧАЛ»

1. **Стереометрические книги «Начал».** Остальные три книги «Начал» (одиннадцатая—тринадцатая) содержат почти исключительно стереометрию, и об этих книгах мы ограничимся лишь немногими указаниями, имея в виду еще возвратиться к ним впоследствии. Материал подразделен в них следующим образом. XI книга излагает общие основы стереометрии и учение о призмах и параллелепипедах; XII книга содержит учение о пирамидах и о круглых телах, т. е. все те отделы, которые требуют применения в той или иной форме теории пределов; наконец, XIII книга посвящена учению о правильных многогранниках.

Материал, содержащийся в одиннадцатой и двенадцатой книгах, может быть, больше, чем какой-либо другой отдел геометрии, воспроизводится нашими учебниками по Евклиду. Эти книги обыкновенно входили в так называемые школьные издания «Начал» и отсюда перешли в новые учебные руководства. И при всем том именно эти книги, больше чем планиметрические, вызывают возражения с различных точек зрения. Это и естественно: материал стереометрии сложнее, строгое его обоснование требует большей подготовки, чем это сделано в планиметрии; возникает необходимость в новых определениях и, главное, в новой, дополнительной аксиоматике. Так, переходя от планиметрии к стереометрии, прежде всего явно необходимо принять, постулировать, что в изучаемом пространстве не все точки лежат в одной плоскости. Иначе говоря, необходимо принять, что какова бы ни была рассматриваемая в том или ином рассуждении плоскость, существует по крайней мере одна точка, вне ее лежащая. Необходимы и другие дополнительные постулаты, к которым мы при изложении содержания этих книг естественно придем. Но Евклид хочет справиться с этой более широкой задачей, опираясь только на те же пять постулатов, которых фактически уже нехватало для логического построения планиметрии; естественно, что он наталкивается на большие затруднения, и дефекты дают себя больше чувствовать.

Впрочем, новых определений Евклид вводит много; одиннадцатой книге предпослано 28 определений, но они фактически относятся ко всем трем стереометрическим книгам в том смысле, что некоторые понятия, здесь устанавливаемые, появляются только в двенадцатой, некоторые — только в тринадцатой книге. И здесь, как и в определениях, предпосланных первой книге, дефекты коренятся главным образом в определениях небольшого числа исходных понятий, при помощи которых остальные уже могут быть определены с достаточной точностью. Первые два определения выражены следующим образом:

1. Телом называется то, что имеет длину, ширину и глубину.
2. Граница же тела есть поверхность.

К этим определениям полностью относятся все замечания, сделанные к определениям 1—3 первой книги¹⁾; они также недостаточно содержа-

¹⁾ См. стр. 41.

тельны и потому на протяжении всего сочинения не находят себе никакого применения. Евклид хочет обойтись без основных понятий, без категорий геометрии и потому впадает в ложный круг, определяет одни понятия другими, которые не только ранее не установлены, но даже зависят от определяемого понятия. Самое определение плоскости, как оно приведено в начале первой книги, не дает Евклиду никаких средств для изучения ее в пространстве, т. е. в порядке сопоставления с прямыми, вне ее лежащими, с другими плоскостями.

Следующее определение одиннадцатой книги гласит:

3. Прямая перпендикулярна к плоскости, если она перпендикулярна ко всем прямым, проведенным в плоскости в точке, в которой она эту плоскость встречает.

Определение требовало бы предварительного доказательства существования такой прямой. Этот дефект восполняется, правда, предложением XI.4, но не вполне.

Этими немногими указаниями, относящимися к введению в стереометрию, мы вынуждены здесь ограничиться. Как мы уже указали, к стереометрии Евклида мы еще возвратимся (§ 49, стр. 404), но на книге двенадцатой «Начал» мы здесь остановимся, так как она содержит не только стереометрический, но и существенный планиметрический материал.

2. Двенадцатая книга «Начал». Применение метода исчерпывания. Мы уже указали выше, что двенадцатая книга «Начал» содержит тот геометрический материал, который устанавливается, выражаясь нашей терминологией, методом пределов. Общей идеей предела древние не владели, хотя предложение X.1 «Начал», несомненно, закладывает первый камень в фундаменте этого учения. Метод, которым пользовались древние и из которого создались метод пределов и интегральное исчисление, позже стали называть методом исчерпывания. В конце настоящего сочинения, в учении об измерении, нам придется говорить о нем подробнее; здесь же ограничимся кратким указанием.

Этот метод в том виде, как им пользуется Евклид, заключается в следующем. Чтобы установить то или иное свойство площади фигуры или объема тела, эта фигура, или, соответственно, тело, разбивается на части U и u таким образом, чтобы рассматриваемое свойство в отношении части U было уже установлено, часть же u могла бы быть сделана сколь угодно малой. В процессе повторного деления, ведущего к неограниченному уменьшению остаточной части u , часть U постепенно охватывает любой участок фигуры или тела, «исчерпывает» их. Свойство, которое часть U сохраняет во всем этом процессе, как бы мала ни была часть u , приписывается всей фигуре или всему телу; правильность же такого заключения доказывается от противного — приведением к абсурду противоположного допущения. Так, при доказательстве основной теоремы XII.5 о том, что трехгранные пирамиды, имеющие равновеликие основания и равные высоты, равновелики, из пирамид выделяются части U и U' , элементами которых служат равновеликие призмы; остаточные части u и u' при неограниченном повторении приема становятся сколь угодно малыми, так что призмами постепенно «исчерпываются» рассматриваемые пирамиды. Экстраполируя равновеликость частей U и U' , т. е. перенося вывод с частей на целое, заключают о равновеликости самих пирамид, — правильность же этого заключения подтверждается доказательством от противного. Открытие этого метода, согласно указанию Архимеда, приписывается Евдоксу, который во всяком случае с успехом его

применял до Евклида. В настоящее время заключительное доказательство приведением к абсурду заменяется общими соображениями теории пределов. В наших элементарных учебниках прием Евдокса-Евклида часто воспроизводится полностью; это освобождает нас от необходимости останавливаться на двенадцатой книге подробно. Отметим только, что Евклид применяет этот метод в двенадцатой книге пятнадцать раз; он начинает с того, что круги (их площади) относятся между собой, как квадраты, построенные на их диаметрах, и кончает предложением, принадлежащим, повидимому, Демокриту, о том, что пирамида и конус (их объемы) составляют каждый третью часть соответственно призм и цилиндра, имеющих равновеликое с ними основание и ту же высоту; шары же (их объемы) относятся между собой, как кубы, построенные на их диаметрах. Формул, выражающих объемы этих тел по определяющим их элементам, у Евклида, согласно общей установке его сочинения, нет.

3. Тринадцатая книга «Начал». Учение о правильных многогранниках. Открытие правильных многогранников, как мы уже упоминали, часто приписывают Платону. В действительности они уже были известны пифагорейцам. В схолии к XIII книге открытие октаэдра и икосаэдра приписывается Тезетету; во всяком случае можно считать достоверным, что Тезетет около 380 г. до н. э. опубликовал первое сочинение, посвященное теории правильных многогранников. В XIII книге Евклид ставит себе двойную цель. Во-первых, он доказывает действительное существование этих тел. Это нужно понимать следующим образом. В наших учебниках, основываясь на теореме о том, что сумма плоских углов выпуклого многогранника не превышает $4d$, показывается, что число правильных многогранников не может превышать пяти. Из них три (тетраэдр, октаэдр и икосаэдр) имеют гранями правильные треугольники, один (куб — гексаэдр) имеет гранями квадраты и один (додекаэдр) — правильные пятиугольники. Однако доказательство того, что эти тела действительно существуют, не приводится; Евклид это доказывает, точнее, он показывает, как вписать в сферу каждый из правильных многогранников. Во-вторых, Евклид выясняет характер той иррациональности, которую представляет собой сторона каждого правильного многогранника по отношению к радиусу сферы. При изложении X книги было указано, что все эти иррациональности относятся к тем типам, которые в ней разобраны.

4. Заключительный обзор «Начал». Мы имеем теперь возможность в заключительном обзоре окинуть беглым взглядом содержание этого большого сочинения, — одного из самых крупных творений греческой науки, — его достоинства и недостатки.

Прежде всего поражает широта замысла, объем его выполнений. «Начала» содержат почти весь массив эллинской математики того времени, в частности, весь тот материал, который составляет фундамент, основу всей геометрии по настоящее время. И весь этот обширный материал приведен в систему и порядок. Цепь умозаключений поражает своей продуманностью; среди четырехсот шестидесяти четырех предложений имеется только весьма небольшое число таких, которые можно в этой системе сдвинуть, поместить в другом месте. Совершенно ясно, что это результат работы поколений; но грандиозна и роль автора, завершившего это построение. Оно сохранило свою структуру в течение двух тысячелетий; энтузиасты утверждали, что другой структуры и быть не может. Английский геометр де-Морган писал^[31]: «Никогда не было системы геометрии, которая в существенных чертах отличалась бы от плана

Евклида; и до тех пор, пока я этого не увижу собственными глазами, я не поверю, что такая система может существовать». И в этом есть много правды. Если рассмотрим новейшие сочинения, упомянутые выше¹⁾, то нужно признать, что общий скелет «Начал» они сохраняют, хотя и связывают его существенно измененной мускулатурой. Источник устойчивости системы коренится в ее фактической убедительности, настолько овладевшей нашим сознанием, что какое бы то ни было недоверие к устанавливаемым ею истинам кажется лишенным всякого здравого смысла. И это доверие покоится отчасти на силе логических рассуждений, средствами которых система построена, отчасти на полном совпадении предложений, выведенных в «Началах», с нашими наглядными представлениями и с результатами многовекового опыта, с какой бы точностью он ни проверялся.

В отношении логического своего построения «Начала» составлены в общем по схеме Аристотеля. И сила логической аргументации так велика, что она пережила тысячелетия, и в огромном большинстве случаев рассуждения Евклида воспроизводятся нашими учебниками почти без изменений. Некоторые отделы поражают своей логической выдержанностью, — таковы теория пропорций, арифметические книги. И при всем том схема Аристотеля в этом сочинении полностью далеко не выдержана, как это уже не раз отмечалось. Прежде всего, не установлены основные понятия, геометрические категории, в которые укладывались бы все понятия геометрии. Вместо этого Евклид пытается определить все понятия геометрии, не опираясь на какие-либо определенные категории более общего характера. При таких условиях основные определения Евклида не только не следуют аристотелеву правилу, но часто противоречат ему, имеют дефекты, Аристотелем даже предусмотренные; этими определениями Евклид на всем протяжении сочинения вовсе не пользуется. Это — основной грех, который отрицательно отразился на логической выдержанности всего сочинения.

За определениями следуют постулаты и аксиомы. При этом нельзя сказать, чтобы между теми и другими исходными положениями была проведена совершенно точная грань. Дело, однако, не в этом. Постулаты могли бы восполнить недостатки определений, если бы устанавливали свойства основных геометрических понятий, достаточно их характеризующие, — если бы исходные понятия геометрии были определены аксиоматически. Это ни в какой мере не выполнено. Постулаты Евклида безусловно недостаточны для действительного логического построения геометрии; а в то же время среди постулатов «Начал» есть такие, необходимость которых вряд ли возможно поддерживать. Совокупность аксиом и постулатов Евклида в целом не может быть признана ни необходимой, ни достаточной для логического обоснования геометрии.

При этих условиях Евклид в ходе развития своей системы геометрии вынужден прибегать к иным средствам доказательства, не несущим сколько-нибудь выраженного логического характера. Этими средствами служат наглядные представления, которыми «Начала» Евклида проникнуты почти на всем своем протяжении. «Начала» представляют собой соединение логических выводов с соображениями, основанными на наглядных представлениях. Это соединение можно наблюдать в подавляющем большинстве предложений.

Беглый обзор «Начал» дает уже возможность до некоторой степени характеризовать ту совокупность понятий и заключений, которые

¹⁾ См. стр. 13.

лишены логического обоснования и на которых мы частично уже останавливались; мы здесь сделаем их сводку.

Сюда, в первую очередь, как уже было указано, относятся понятия, совокупность которых теперь называют «учением о расположении». Эти понятия выражаются словами «между», «внутри», «вне», «по одну и по другую сторону» в многообразных случаях, в которых они употребляются.

Далее, пользуясь движением (хотя и редко), Евклид не опирается ни на какие положения, которые позволяли бы судить о том, какие движения возможны, какие невозможны; не установлены «законы движения». А так как движением определяется конгруэнтность геометрических образов, то выдержанных средств для установления конгруэнтности Евклид не дает. Евклид не дает общих критериев, посредством которых было бы всегда возможно устанавливать существование точек пересечения линий, поверхностей, линий с поверхностями. Этот недостаток сказывается уже в первых предложениях «Начал» и в дальнейшем проявляется весьма часто. Обычно его возможно устранить, опираясь на непрерывность геометрических образов, прежде всего прямой; но Евклид еще чрезвычайно далек от того, чтобы установить и характеризовать понятие о непрерывности. К тому же точки пересечения, о которых идет речь, иногда существуют и при отсутствии непрерывности прямой и других образов. Евклид не дает точных критериев, устанавливающих элементы, которыми определяются геометрические образы, — прежде всего, прямая и плоскость.

Особенную роль в «Началах» играет пятый постулат Евклида; он содержит критерий, дающий возможность весь заключающийся в «Началах» материал разбить на две части — на абсолютную и собственно евклидову геометрию. Такое подразделение в предыдущем изложении еще недостаточно обосновано; это предстоит сделать в дальнейшем. В отношении стереометрии весь вопрос об этой классификации целесообразно рассмотреть значительно ниже¹⁾.

Дефекты «Начал» выявлены и установлены преимущественно продолжателями и комментаторами Евклида. И как ни абстрактны эти изыскания, они привели к глубокому изменению точки зрения на геометрию и к далеко идущему ее развитию.

§ 11. ПРОДОЛЖАТЕЛИ ЕВКЛИДА

1. **Четырнадцатая и пятнадцатая книги «Начал».** Во многих изданиях «Начал», как уже упомянуто выше, к тринадцати книгам Евклида присоединены четырнадцатая и пятнадцатая. Обе книги посвящены развитию учения о правильных многогранниках. Продолжительное время обе книги приписывались Евклиду. Они воспроизведены в пятом томе сочинений Евклида в издании Гейберга и Менге [5] на греческом и латинском языках. В обстоятельном предисловии изложены изыскания, установившие, что эти книги Евклиду не принадлежат. Книга четырнадцатая составлена Гипсиклесом, учеником Евклида. Что касается пятнадцатой книги, то она имеет гораздо более позднее происхождение; ее содержание разбивается на три части, которые, повидимому, принадлежат разным авторам. В конце третьего тома издания «Начал» Хиса [19] содержание обеих книг приведено в извлечении на английском языке; в русском издании «Начал» Ващенко-Захарченко [28] они помещены полностью. Мы не будем на них останавливаться, так как они не имеют значения вообще и не имеют никакого отношения к обоснованию геометрии.

¹⁾ См. § 49, стр. 405—406.

2. Архимед. Немногим моложе Евклида были три математика, поднявшие эллиническую геометрию до апогея ее процветания. Это были Архимед Сиракузский (287—212 до н. э.), Эратосфен Киренский (276—194 до н. э.) и Аполлоний Пергский (265—170 до н. э.); указанные даты установлены на основе ряда сопоставлений и не могут претендовать на полную точность.

Архимед занимает среди греческих математиков исключительное место. Во время своего пребывания в Александрии Архимед, несомненно, был близок к школе Евклида, был многим ей обязан; но в истории науки он занимает во всех отношениях гораздо более высокое место, чем Евклид. Архимед был в гораздо большей мере творцом, чем Евклид. Особенности, отличающие творчество Архимеда, заключаются в следующем.

В противоположность Евклиду, творчество Архимеда имело преимущественно прикладное направление. Впрочем, по рассказу Плутарха, Архимед сам от такой установки отрекался; он считал искусство всякого рода, направленное к пользе и выгоде, «неблагородным и низким»; повидимому, это была дань, которую он платил идеалистической школе Платона. Но это находится в противоречии как с тем несомненным фактом, что он посвятил много сил технике военного дела, так и с содержанием дошедших до нас его сочинений: большая часть их посвящена статике и, в частности, гидростатике, причем основы этих дисциплин он сам установил; некоторые из сочинений Архимеда по механике до нас не дошли.

Объяснение противоречия между содержанием творчества Архимеда и его теоретическими тенденциями заключается, повидимому, в том, что сочинения Архимеда по механике составлены также по схеме Аристотеля, по образцу «Начал» Евклида. Они начинаются с определений важнейших понятий, за ними следуют постулаты (аксиомы), а потом предложения — выводы¹⁾; сочинения эти по форме производят впечатление теоретического исследования. Но читая их, обозревая всю совокупность работ Архимеда, читатель отчетливо видит, что они имеют гораздо более прикладное направление. В связи с этим геометрические сочинения Архимеда носят преимущественно метрический характер. Собственно говоря, и Архимед, как Евклид, большею частью оперирует только отношениями, т. е. устанавливает только отношения одних поверхностей или объемов к другим, но результаты он часто доводит до их выражения в числах. При средствах счисления того времени это требовало большого искусства в производстве вычислений. Некоторые из вычислений Архимеда поражают своеобразием и неожиданностью приема; пути, приведшие его к некоторым частным результатам, остаются невыясненными до настоящего времени; имеется целая литература «догадок» по вопросу о том, каким образом Архимед получил приближенные значения $\sqrt{3}$:

$$\frac{1351}{780} > \sqrt{3} > \frac{265}{153},$$

приведенные им без всякого указания того, как он к ним пришел («Об измерении круга» [32], предложение 3). Средства счисления были ограничены даже в смысле составления и наименования чисел, превышающих «мириаду» (10 000). Сочинение Архимеда «Исчисление песка» [33] посвящено счислению очень «больших чисел»: способ, к которому Архимед

¹⁾ Очень любопытно, что ту же схему почти через 2000 лет выдерживает и Ньютон в своем знаменитом сочинении «*Philosophiae naturalis principia mathematica*».

для этого прибегает, в сущности, есть десятиричное счисление со второй единицей 10^8 .

Архимед значительно углубил метод исчерпывания, которым пользовался уже Евклид, и в некоторой мере приблизил его к началам современного нам интегрального исчисления. Так как он рассматривает не только площади плоских фигур и объемы тел, но и длины кривых, площади поверхностей, получающихся вращением конических сечений, то непосредственное «исчерпывание», как его проводил Евклид, здесь не получает прямого применения. Архимед поэтому модифицирует этот прием: он заключает определяемую величину между двумя переменными величинами, которые в надлежаще проведенном процессе имеют общий предел; этот предел Архимед устанавливает, все же пользуясь в конечном счете доказательством от противного. Рассматриваемая величина определяется всегда как общий предел двух переменных сумм, в этом — приближение к методу интегрального исчисления; при более детальном рассмотрении оказывается, что часто Архимед, по существу, выполняет прямое интегрирование. С особой отчетливостью это обнаруживается в сравнительно недавно найденном (1906 г.) Гейбергом сочинении Архимеда, оформленном в виде письма к Эратосфену; оно опубликовано в русском переводе [34]. Эту работу в литературе часто называют «Methodus» — метод обработки механических проблем. Чрезвычайно любопытен своеобразный механический прием, которым Архимед систематически пользуется для суммирования элементов разложения вычисляемой величины. В наиболее простом виде этот прием находит применение в работе «О квадратуре параболы», очень доступной по изложению.

3. Текст сочинений Архимеда. Все дошедшие до нас манускрипты, содержащие сочинения Архимеда (кроме упомянутого выше манускрипта Гейберга), представляют собой списки с одного манускрипта, составленного во всяком случае не позднее X века. Этот манускрипт до нас не дошел; в XVI веке он находился во владении кардинала Рудольфа Пия, после чего его следы утеряны. Но до нас дошли три хорошо выполненных списка с этой рукописи, по которым составлены как старые (XVI, XVII и XVIII вв.) издания, так и новые. Эти последние выпущены в свет теми же издателями-комментаторами, которым мы обязаны лучшими изданиями «Начал» Евклида. Наиболее ценным признается издание Гейберга [35]. С него сделан английский перевод Хиса [36], обработанный им так же тщательно, как и «Начала» Евклида. Это издание со всеми примечаниями и вводными статьями переведено на немецкий язык [37]. Важнейшие сочинения Архимеда в различное время выпущены на русском языке. Повидимому, большая часть сочинений Архимеда до нас не дошла; из указанных различных авторов можно заключить, что Архимед также составил сочинение о правильных многогранниках, хотя такие понимал шире, чем Евклид. Очень интересно было бы видеть недошедшие до нас «Начала» (*ἀρχαί*) арифметики Архимеда; это сочинение, повидимому, связано с его «Исчислением песка» [33]. Несколько недошедших до нас сочинений Архимеда было посвящено механике, оптике, астрономии.

4. Содержание геометрических сочинений Архимеда. Мы остановимся несколько подробнее на важнейших геометрических сочинениях Архимеда. Из них хронологически первыми, по указаниям самого Архимеда (в письмах, которые он предпосылает своим работам), являются две книги сочинения «О шаре и цилиндре» [38].

Первая книга состоит из сорока четырех предложений, устанавливающих, собственно, только шесть теорем; остальные предложения по-

сят подготовительный, вообще вспомогательный характер. Эти шесть теорем следующие:

1) Боковая поверхность прямого цилиндра равна площади круга, радиус которого есть средняя пропорциональная между образующей цилиндра и диаметром его основания.

2) Боковая поверхность [прямого] круглого конуса равна площади круга, радиус которого есть средняя пропорциональная между образующей конуса и радиусом его основания.

3) Боковая поверхность [прямого] круглого конуса относится к площади его основания, как образующая конуса к радиусу основания.

4) Поверхность шара равна учетверенной площади его большого круга.

5) Объем шара равен учетверенному объему круглого конуса, основанием которого служит большой круг шара, а высотой — его радиус.

6) Объем шарового сектора равен объему круглого конуса, основанием которого служит поверхность содержащегося в секторе шарового сегмента, а высотой — радиус шара.

Выдержанная последовательность и точность, с которой эти теоремы устанавливаются, совершенно изумительны.

Вторая книга содержит ряд задач, которые решаются на основе перечисленных теорем, например: разделить шар плоскостью таким образом, чтобы поверхности двух сегментов, которые она отсекает, имели данное отношение, — или чтобы данное отношение имели объемы этих двух частей шара. Сам Архимед особенно высоко ценил эту свою работу. По его завещанию, цилиндр со вписанным в него шаром высечен на его гробнице. По этому признаку могила Архимеда была найдена в Сиракузах Цицероном, когда он прибыл туда в качестве квестора Сицилии.

Можно сказать, что в работе «О шаре и цилиндре» вычисление поверхностей и объемов круглых тел сведено к определению длины окружности и площади круга. Это вычисление и выполнено в небольшом, но замечательном сочинении «Об измерении круга»^[32]. Оно содержит только два предложения, достоверно в его состав входящих. Первое из них представляет собою строгое доказательство теоремы, которое индусский математик Ганези обосновывал одним только словом «смотри»¹⁾: площадь круга равна площади прямоугольника, основанием которого служит полуокружность, а высотой — радиус этого круга. Вторая теорема заключается в том, что отношение длины окружности к ее диаметру содержится между $3\frac{1}{7}$ и $3\frac{10}{71}$. Этого не следует понимать так, что Архимед рассматривает отношение двух несоизмеримых длин как число, т. е. владеет понятием об иррациональном числе. Евклид в пятой книге определяет, в каком случае он будет считать одно отношение большим или меньшим другого. Теорема Архимеда заключается в том, что отношение длины окружности к ее диаметру меньше отношения чисел 22 : 7 и больше отношения 223 : 71. Нужно все же сказать, что, по существу, эта установка очень близка к точке зрения более поздней, которая рассматривает это отношение как число.

Мы видим, таким образом, что эти два сочинения Архимеда дополняют книгу Евклида, доводят начала геометрии до того объема, который

¹⁾ См. выше, стр. 15.

в настоящее время относят к элементарной геометрии. Остальные геометрические сочинения Архимеда «О коноидах и сфероидах», «О спиралях», «О квадратуре параболы» содержат результаты, которые мы в настоящее время устанавливаем средствами исчисления бесконечно малых; мы здесь ограничимся теми общими указаниями, которые сделаны в предыдущих рубриках. Подробные сведения об Архимеде и его работах можно найти в очень интересной книге С. Я. Лурье [39].

5. Аксиоматика Архимеда. В доказательствах устанавливаемых им новых теорем Архимед пользуется материалом, содержащимся в «Началах» Евклида. Как уже было указано, он проводит доказательства с выдержанной точностью, и эта установка имела в дальнейшем обосновании геометрии существенное значение. Но именно в метрических целях Архимед в начале сочинения «О шаре и цилиндре» устанавливает пять аксиом, перевод которых мы здесь полностью приводим.

1) Из всех линий, проходящих между теми же двумя точками, прямая есть кратчайшая.

2) Из других линий, расположенных в одной и той же плоскости и имеющих те же концы, две такие линии не равны, если они обращены вогнутостью в одну и ту же сторону, и одна из них целиком объемлется другой и прямой, соединяющей ее концы; и объемлемая меньше объемлющей.

3) Подобно этому из поверхностей, которые имеют общую границу, расположенную в одной плоскости, плоскость есть наименьшая [имеет наименьшую площадь].

4) Из других же поверхностей, имеющих ту же плоскую границу, любые две не равны, если они обращены вогнутостью в ту же сторону и одна из них объемлется другой и плоскостью, проходящей через общую границу; и объемлемая меньше объемлющей.

5) Далее, из неравных линий, поверхностей или тел, большая превышает меньшую на такую величину, которая, будучи прибавлена к себе [достаточное число раз], может быть сделана больше любой заданной величины, которая допускает с ними сравнение.

Первую из этих аксиом в некоторой перефразировке комментаторы часто принимали за определение прямой; иногда даже такую именно точку зрения приписывали самому Архимеду. Во всяком случае вплоть до недавнего времени в некоторых учебниках прямая определяется как «кратчайшее расстояние между двумя точками». Между тем, если станем на нашу современную точку зрения, то аксиомы 1) и 2) совершенно не нужны. Предложение I.20 Начал Евклида устанавливает, что две стороны треугольника всегда больше третьей, или, иначе: прямая (конечная прямая, отрезок), проходящая между двумя точками, короче ломаной, состоящей из двух сторон (отрезков) и проходящей между теми же двумя точками. При помощи индукции в отношении к числу сторон ломаной, после этого, опираясь на то же предложение I.20, уже очень просто доказывается, что прямая короче всякой ломаной, проходящей между ее концами. Определяя же длину кривой как предел длины вписанной в нее ломаной, когда все стороны последней неограниченно убывают (в случае, если этот предел существует), можно доказать также утверждения, содержащиеся в первой и второй аксиомах Архимеда. Но Архимед далек от такого общего определения длины кривой; длина кривой играет для него роль основного геометрического понятия, и он характеризует ее аксиомами 1) и 2). Он пользуется ими,

когда утверждает, что периметр выпуклого многоугольника, вписанного в окружность, меньше длины окружности, а периметр описанного многоугольника больше ее. Точно так же он пользуется аксиомами 3) и 4), когда устанавливает, что боковая поверхность призмы, вписанной в цилиндр, меньше боковой поверхности цилиндра, а боковая поверхность призмы, описанной около цилиндра, больше боковой поверхности цилиндра, — и в других аналогичных случаях. Но при надлежащем определении того, что мы разумеем под поверхностью цилиндра, конуса, шара, все утверждения этого рода доказываются, — аксиомы становятся излишними.

Итак, аксиомы 1)—4) Архимеду необходимы, поскольку он не дает определения длины кривой, величины поверхности шара, цилиндра, конуса. Но, как уже сказано, при надлежащем построении метрики, при котором все эти понятия строго устанавливаются, эти аксиомы не нужны, — они и не приводятся в хороших современных курсах геометрии. Более того, аксиомы Архимеда не могут и заменить полностью точные определения этих понятий.

Несколько иначе обстоит дело с пятой аксиомой. Если для простоты будем относить ее к отрезкам, то два отрезка, о которых идет речь, можно выбрать так, чтобы один из них и разность между ними были произвольны. Ее можно поэтому формулировать так:

5) Каковы бы ни были два отрезка, меньший из них, будучи повторен достаточное число раз, превзойдет больший.

В этом виде аксиома известна в литературе под названием пятой аксиомы Архимеда или просто аксиомы Архимеда; Архимед сам указывает, что многие авторы ею уже пользовались. Известный алгоритм Евклида для нахождения наибольшей общей меры двух соизмеримых отрезков (X.3), конечно, опирается на эту аксиому. Вопрос о том, необходима ли эта аксиома, должна ли она быть сохранена или может быть выведена из других предпосланных аксиом, решается различно, в зависимости от того, каковы эти предпосланные аксиомы. По почину Гильберта этот вопрос в текущем столетии очень занимал геометров и будет обстоятельно рассмотрен ниже. Здесь мы только отметили эту аксиому как одну из введенных эллинской школой.

6. Аполлоний Пергский (265—170 до н. э.). Архимед, завершив тот геометрический материал, который в настоящее время называют элементарной геометрией (в самом узком значении этого слова), перешел к метрическим изысканиям, требующим применения метода бесконечно-малых. Аполлоний раздвинул этот материал в другую сторону — в сторону синтетической теории конических сечений, которую и в настоящее время часто относят к элементарной геометрии в более широком понимании этого слова. Впрочем, конические сечения были уже известны до Аполлония: первыми разрозненными сведениями о них уже располагал Менехм, ученик Евдокса; первое сочинение о них, повидимому, принадлежит Аристею, который был старше Евклида; мы уже указывали, что Евклид составил недошедшее до нас сочинение о конических сечениях в четырех книгах. Папп Александрийский говорит: «четыре книги Евклида о конических сечениях были дополнены Аполлонием, который многое к ним прибавил и дал нам восемь книг о конических сечениях». Из этих восьми книг в греческом оригинале до нас дошли первые четыре, следующие три книги известны по арабскому переводу, восьмая утеряна. Первые четыре книги опубликованы Гейбергом на греческом языке и в латинском переводе [40], а также Хисом на английском языке с обстоятельными коммента-

риями [41]. Тракта́т Аполлония составлен с таким мастерством, что его выполнение еще в древности сопоставлялось с мастерством Архимеда, который, повидимому, тоже писал о конических сечениях.

До Аполлония конические сечения определялись как сечения прямого круглого конуса плоскостью, перпендикулярной к образующей; в зависимости от того, имеет ли осевое сечение конуса при вершине острый, прямой или тупой угол, получаются три типа конических сечений. Аполлоний показал, что на любом конусе с круговой направляющей, — прямом или наклонном, — существуют кривые всех трех типов, которые он и называет эллипсом, параболой или гиперболой; он глубоко изучил их метрические свойства, асимптоты, сопряженные диаметры; он установил известные метрические инварианты, до сих пор носящие его имя. Для нас здесь Аполлоний представляет большой интерес, главным образом, в двух отношениях: во-первых, тем развитием, которое в его сочинениях получили синтетические методы древних; во-вторых, углублением геометрической алгебры Евклида. Это соответствует тем двум методам, с помощью которых Аполлоний разворачивает свое исследование. В первых двух книгах он остается верным чистому синтезу Евклида, в третьей книге он становится на путь, в котором можно видеть зародыши аналитической геометрии. По существу, он оперирует декартовыми координатами, оси которых выходят из точки на кривой и направлены одна по диаметру, другая — по сопряженной с ним касательной. Фактически он составляет уравнение кривой в этих координатах, пользуясь для этого частью пропорциями, частью другими алгебраическими соотношениями в геометрической форме второй книги «Начал». Так, парабола характеризуется тем, что ордината ее точки есть средняя пропорциональная между абсциссой и постоянным отрезком (удвоенным параметром); Аполлоний вводит даже особые названия для этих специальных координат. Он тщательно исследует, в скольких точках могут пересекаться два конических сечения, и в связи с этим останавливается на их касании. Особенно замечательна пятая книга, в которой Аполлоний разыскивает наименьшее и наибольшее расстояния точки от конического сечения; он пользуется при этом «диоризмом», т. е. фактически установлением условий, при которых квадратное уравнение дает «возможные» (действительные) решения. Шестая книга содержит учение о подобии конических сечений, а седьмая и восьмая (повидимому тесно с ней связанная) содержат решение ряда отдельных задач, относящихся к коническим сечениям. Были сделаны даже попытки на основании подготовительного материала и отдельных указаний различных авторов восстановить восьмую книгу; предполагаемый текст содержится в первом печатном издании «Конических сечений», выполненном Галлеем (E. Halley [42]). «Конические сечения» Аполлония, несомненно, служили прообразом для Ньютона в его исследовании конических сечений, проведенном в «*Philosophiae naturalis principia mathematica*» и связанном с изучением движения точки по коническому сечению.

7. Эратосфен Киренский (276—194? до н. э.). Заканчивая этот обзор, нельзя не уделить несколько слов Эратосфену, последнему великому представителю золотого века греческой математики, хотя от задач настоящего сочинения он стоит далеко. Эратосфен был немногим моложе Архимеда, родился в греческой колонии Кирене в северной Африке, в ранней молодости переехал в Александрию и там провел большую часть своей жизни. Он был неоплатоником, математике учился в школе Евклида. Эратосфен был очень разносторонним ученым, главным образом астрономом. Он сделал первую попытку определить величину земного радиуса

и выполнил это с ошибкой около 13%. Эратосфен измерил наклонение эклиптики к экватору. Эти измерения явно требовали глубоких геометрических познаний; но они требовали также углубления средств арифметики. Эратосфен сделал это в двух направлениях — в смысле чисто арифметического усовершенствования средств вычислений и в направлении начал теории чисел: он дал первый элементарный метод выделения простых чисел («эратосфеново решето»). В области геометрии Эратосфен много занимался задачей об удвоении куба; он, повидимому, первый уяснил себе, что этого построения нельзя выполнить циркулем и линейкой, и придумал для решения задачи особый прибор.

§ 12. КОММЕНТАТОРЫ ЕВКЛИДА

1. Греческие комментаторы Евклида. «Евклид, Архимед, Эратосфен и Аполлоний, — говорит М. Кантор (M. Cantor), — довели математику до такой высоты, что дальнейшее ее поднятие средствами, которыми располагали древние, уже не было возможно». Было необходимо внимательно остановиться на достигнутых результатах, придать им кристаллически точную форму. Это делалось в различных направлениях; комментаторы «Начал» Евклида занимали в этих работах важное место. Такие комментаторы стали появляться очень рано, как об этом свидетельствуют указания более поздних издателей «Начал». Но их труды в подлинниках до нас не дошли. Единственным сочинением этого рода, которым мы располагаем, являются комментарии Прокла к первой книге «Начал» Евклида. Не будет преувеличением сказать, что ни одному из комментаторов Евклида не приписывалось такое значение, как Проклу.

Прокл жил в V столетии н. э. (410—485 г.). К английскому изданию сочинений Прокла приложена довольно обстоятельная биография, составленная его учеником Маринусом, заместившим его впоследствии в афинской школе. Хотя биография изобилует чрезмерными восхвалениями, не остается все же сомнения, что Прокл был человеком очень большого образования, пользовался большим уважением и среди философов V столетия, не примкнувших к христианам, занимал одно из первых, если не первое место. Он родился в Ликии, небольшой провинции в юго-западной части Малой Азии. В раннем возрасте он приехал в Александрию; здесь, следуя традициям отца, он обучался сначала риторике, а потом перешел к занятиям философией и приобрел друзей среди видных александрийских ученых. С одним из последних (Леоном) он отправился в Византию; здесь, и затем в других центрах интеллектуальной мысли того времени, в общении с последователями Платона, он тщательно занимался изучением Платона и Аристотеля; по словам биографа, он безустали предавался этому делу днем и ночью. Он решительно отвергал учение христиан (которые с легким сердцем отвергают все самое святое) и сделался твердым последователем Платона и Аристотеля в области науки, общего мирозерцания и морали. Поселившись окончательно в Афинах, он основал здесь школу, которая пользовалась большой известностью. Как все философы платоновой школы различных эпох, Прокл глубоко изучил геометрию, преподавал ее; в результате лекций, которые он читал об Евклиде, и возникли его «Комментарии»; в различных местах текст их формулирован в виде обращения к аудитории. Комментарии Прокла относятся к первой книге «Начал». Он, несомненно, имел намерение составить комментарии и к дальнейшим книгам; на это имеются прямые указания в некоторых его примечаниях. Но вряд ли может быть сомнение в том, что этого намерения он не осуществил: нигде в литературе

нет указаний на какие-либо соображения Прокла, относящиеся к дальнейшим книгам «Начал». Греческий оригинал «Комментариев» Прокла к первой книге «Начал», тщательно проверенный, издан Фридлейном (G. Fridlein [4]). Имеется латинский перевод, изданный гораздо раньше [43], и собрание сочинений Прокла на английском языке [44].

Прокл располагал многими сочинениями как исторического, так и собственно геометрического содержания, которые до нас не дошли. Он цитирует «Историю геометрии» Евдема Родосского, сочинение Гемина Родосского, точное название которого не установлено, но которое, несомненно, было посвящено общим теоретическим вопросам математики; эти сочинения и известны нам главным образом по выдержкам, которые воспроизводят Прокл и позже Анариций. Вообще сведения по истории математики, которые содержатся в книге Прокла и заимствованы им из различных до нас недошедших источников, имеют очень большую ценность. Прокл цитирует прямых, наиболее значительных комментаторов Евклида: Герона Александрийского (I столетие до н. э.—I столетие н. э.), Порфирия Сирийского и Паппа Александрийского (оба в III столетии н. э.); он приводит многие их комментарии частью в подлиннике, частью в своей передаче; воспроизводит соображения и комментарии других авторов, иногда вовсе их не называя.

Комментарии даны почти ко всем определениям, аксиомам, постулатам и предложениям Евклида. Некоторые из них, особенно те, которые имеют принципиальное значение, мы уже указали при изложении содержания «Начал». Комментарии к предложениям обыкновенно начинаются разъяснением текста Евклида; затем излагаются соображения, высказанные по тому же предложению различными другими авторами; разбираются случаи, не предусмотренные Евклидом при доказательстве, однако только тогда, когда эти случаи существенно отличаются от рассмотренного Евклидом. Далее указываются дефекты доказательства, обыкновенно вместе с попыткой их исправить; часто излагаются другие варианты доказательств. Иногда Прокл парирует возражения других комментаторов, иногда превозносит искусство и тонкую мысль самого Евклида. Аполлоний дал свои решения основных конструктивных задач Евклида (I.10, 11, 23); Прокл утверждает, что они уступают евклидовым.

«Комментарии» Прокла разбиты на четыре книги. Первая книга посвящена философским вопросам о значении математики, о ее происхождении, о месте, занимаемом ею среди других наук; вторая книга посвящена тем же вопросам в применении к геометрии. Эти рассуждения, утратившие в настоящее время значение, обнаруживают, что весь тот ряд вопросов, который интересовал математиков и позже, вплоть до наших дней, — о практическом и логическом характере математики, о возникновении ее начал, о характере ее основных положений и их отношении к действительным протяженным объектам, — живо занимал уже древних геометров. Однако все эти рассуждения носят в такой мере идеалистический, иногда прямо метафизический характер, что издатель английского издания Т. Тейлор (Th. Taylor), приобщив к комментариям трактат Прокла о теории Платона, утверждает, что не так уже слаба связь между этими сочинениями. Вторая книга «Комментариев», как уже сказано, останавливается на тех же вопросах в отношении геометрии; особенно любопытно то, что в то время, как указывает Прокл, уже существовали противники логической геометрии (эллинические предшественники Шопенгауэра), в том числе известный философ Зенон; неоплатоники же были настойчивыми ее защитниками. Во второй же книге Прокл обращается к исходным положениям Евклида, прежде всего к его определениям. Замечания Прокла

очень многословны, часто тривиальны даже для того времени; но некоторые из них имеют существенное значение. Так, в комментариях к определению прямой линии Прокл, останавливаясь на «движении», указывает, что существует три типа движений: прямолинейные (переносные), круговые (вращения) и смешанные (составленные из переносных движений и вращений); это — первая попытка подойти к законам движения, которые были точно установлены лишь гораздо позже. Во-вторых, Прокл уже указывает, что определению Евклида отвечает не только прямая, но и окружность и даже винтовая линия. Прокл излагает поэтому точку зрения Платона, которую мы приводили выше (стр. 41). Это, повидимому, наиболее существенные из замечаний Прокла к определениям Евклида. При этом Прокл вовсе не останавливается на том, что эти определения по всей своей структуре не соответствуют правилу Аристотеля; некоторые авторы объясняют это тем, что Прокл вообще знал Аристотеля хуже, нежели Платона.

В третьей книге Прокл обращается к аксиомам и постулатам Евклида. В специальном вступлении Прокл занимается выяснением различия между аксиомами и постулатами. Он указывает три точки зрения, которые по этому вопросу высказывались. Первая точка зрения заключается в том, что постулаты устанавливают основные положения, на которых основываются геометрические построения подобно тому, как на аксиомах основываются доказательства теорем. К этой точке зрения примыкает и сам Прокл. Правда, такой точке зрения могут удовлетворить только первые три постулата; но Прокл находит, что третий и четвертый постулаты в действительности представляют собой предложения, которые могут быть доказаны. Он действительно приводит доказательство равенства всех прямых углов (постулат IV), мало отличающееся от того, которое помещается в современных нам учебниках. Что касается пятого постулата, то он, по мнению Прокла, тоже требует доказательства. «Разве может быть постулатом, — замечает он, — обращение доказанной теоремы?»¹⁾ Он и пытается дать его доказательство; мы будем об этом подробно говорить ниже²⁾.

Другая точка зрения заключается в том, что аксиомы суть общенаучные допущения, тогда как постулаты суть допущения чисто геометрические. Однако этой точке зрения удовлетворяют только первые три аксиомы Евклида. Прокл, как и некоторые его предшественники, считает, что только эти три аксиомы действительно подлинные, остальные (мы это уже указывали), повидимому, присоединены позже.

Наконец, третья точка зрения заключается в том, что постулаты — это требования, предъявляемые учителем к ученику или руководителем диспута к другим диспутантам, требования, вызываемые тем, что они могут казаться не столь ясными, не столь бесспорными. Этим и объясняется их название — постулаты, требования. Эти споры о различии между аксиомами и постулатами продолжают, можно сказать, до нашего времени. Мы придем к ним в главе, посвященной аксиоматике. Здесь укажем только, что различие во взглядах на этот предмет выявляется уже в различных переводах слова «ἀξίωμα» на другие языки; так, в переводах на латинский язык слово постулат передается то словом *petitio*, то словом *postulatum*, которое единственно точно передает его.

Третья книга «Комментариев» заканчивается предложением I.26, т. е. последней теоремой об условиях равенства треугольников.

¹⁾ Пятый постулат, конечно, можно рассматривать как обращение предложений I.27 или I.28. Любопытно, что на той же точке зрения стоит и М. Кантор. «Разве это постулат, — говорит он, — это есть просто обращение предложения I.27».

²⁾ Стр. 116—118.

Четвертая книга посвящена теории параллельных линий и связанной с ней собственно евклидовой геометрией. Во введении к этой книге Прокл выясняет значение постулата о параллельных линиях и, как уже указано, настаивает на необходимости дать его доказательство. Комментарий к предложению I.29 действительно содержит попытку дать такое доказательство, которую мы изложим ниже, в своем месте¹⁾.

Мы вынуждены ограничиться этими краткими сведениями о «Комментариях» Прокла; они дают некоторое представление о характере этих «Комментариев». Излагать же их содержание более подробно вряд ли было бы целесообразно. Многие комментарии чрезмерно многословны, в них есть немало лишнего и тривиального, есть много далеко идущих философских, обычно метафизических рассуждений. Но много дефектов, содержащихся в «Началах», Прокл все же вскрывает. В этом заключается то ценное, что есть в его комментариях к этому сочинению.

Оценивая всю совокупность комментариев к «Началам» эллинской эпохи, нужно повторить, что они, несомненно, вскрыли много дефектов в системе Евклида — как в его основных положениях, так и в доказательствах предложений; но большинство указанных ими дефектов в доказательствах мало существенны, легко устраняются; трудностей же, глубоко лежащих, эллинские комментаторы либо вовсе не усматривают, либо оставляют их без достаточного внимания. Так, необоснованность тех соображений, которые относятся к порядку и расположению точек и прямых, не отмечается никем из них; не отмечается необходимость точно установить законы движения и совершенно не возникает идея о непрерывности. Оставлены без внимания именно те дефекты, которые мы отметили выше, устранение которых представило наибольшие трудности и сыграло наиболее важную роль в ходе построения современной системы геометрии. И только постулат о параллельных линиях действительно сосредоточил на себе всеобщее внимание.

2. Средневековые комментаторы Евклида. Средневековыми издателями и комментаторами «Начал», как мы уже знаем, были преимущественно арабы. Их было много, но немногие из этих комментариев до нас дошли. Очень важное значение для истории арабской науки имеет арабский памятник «Фихрист». Он содержит перечень математических сочинений, который воспроизведен в статье Зутера (H. Suter [⁴⁵]) в немецком переводе. Руководствуясь, главным образом, этим, а также немногими другими историческими сочинениями, Хис приводит список свыше тридцати арабских сочинений, содержащих комментарии к «Началам». Из них значительное большинство относится к эпохе расцвета арабской культуры, к IX—X столетиям, другие составлены позднее. Однако немногие из этих сочинений доступны. Одни из них до нас вовсе не дошли, другие сохранились в арабских рукописях и не переведены на новые языки. Общая их характеристика, которую находим у М. Кантора, у Зутера и Хиса, такова, что они не прибавляют чего-либо существенного к тому, что дано эллинскими комментаторами. Чаще всего они передают только комментарии эллинских авторов, пополняя, таким образом, то, что до нас дошло через Прокла. Укажем здесь только двух арабских комментаторов.

Один в русской математической литературе известен под именем Анариция (an-Nairizi, в латинской транскрипции — Anaritius, IX—X столетие н. э.), его комментарии в латинском переводе изданы Куртце (M. Curtze [⁴⁶]) в виде дополнения к гейбергскому изданию «Начал»

¹⁾ Стр. 116—118.

Евклида. Прокл составил комментарии к одной только первой книге «Начал»; Анариций дает комментарии к первым десяти книгам. И все же это сочинение носит более компилятивный характер, нежели комментарии Прокла. Анариций преимущественно передает комментарии Герона и Симплиция. Об этом последнем авторе, расцвет деятельности которого приходится на начало VI столетия н. э., мы не имеем сведений помимо Анариция; он приводит комментарии Симплиция к определениям, постулатам и аксиомам Евклида. Анариций сообщает также замечания к V постулату греческого автора Аганиса, личность которого остается недостаточно выясненной; нам придется говорить о нем ниже¹⁾. Подробнее и содержательнее других его комментарии к десятой книге «Начал».

Другой арабский комментатор — Насир-Эддин ат Туси (Nasir addin at Tusi) (1201—1274) — перевел «Начала» на арабский язык и написал особое сочинение о постулате Евклида; оно сохранилось в оригинальном манускрипте, но на европейских языках не опубликовано. Очень любопытные его соображения о пятом постулате будут изложены ниже²⁾, они принадлежат к числу лучших работ того времени по этому вопросу.

3. Комментарии к Евклиду в эпоху Возрождения и после нее. Как было указано выше, первое печатное издание «Начал» появилось в 1482 г. В следующем, XVI столетии, в связи с успехами книгопечатания и с быстрым ростом образования, число печатных изданий «Начал» быстро возрастает. Многие из них претендуют на существенное улучшение общепризнанного текста «Начал» либо в порядке восстановления — Борелли (Borelli, 1658) «Восстановленный Евклид» (Euclides restitutus), либо в порядке переработки — Маркетти (Marchetti, 1709) «Переработанный Евклид» (Euclides reformatus); к такого рода изданиям относится и сочинение Саккери (G. Saccheri, 1733) «Евклид освобожденный от всякого пятна» (Euclides ab omni naevo vindicatus)³⁾. Однако обещания, содержащиеся в этих заголовках, мало выполняются. Разобраться во всем большом множестве критических замечаний и предложений нового времени становится очень трудным даже для тех, кто специально этим занимался (Хис, Энриквес). Есть лишь немного соображений, которые запечатлелись в литературе и оказали влияние на развитие учения об обосновании геометрии.

В 1756 г. появилось издание «Начал» Симсона [13], которое в качестве школьного руководства приобрело признание и широкое распространение; оно имело большое влияние на дальнейшие попытки обоснования геометрии. Существенную роль сыграло предложенное Симсоном определение плоскости: «плоскость есть поверхность, обладающая тем свойством, что с ней совмещается всякая прямая, имеющая с нею две общие точки». Есть основание думать, что это определение, может быть, в несколько измененном виде есть уже у Герона Александрийского. Так или иначе, после Симсона это положение, то в качестве определения плоскости, то в качестве постулата, появляется во всех изданиях «Начал» и во всех руководствах по элементарной геометрии; его называют обыкновенно (Крелль, Хис) постулатом Симсона. Уже Анариций отметил, что две плоскости, имеющие общую точку, necessarily имеют общую прямую. Симсон, повидимому, первый указал важное значение этого положения, которое он рассматривает, как особый постулат.

Много размышлял над вопросами, относящимися к началам геометрии, Лейбниц (G. W. Leibniz [47]). Он дал следующее своеобразное опреде-

¹⁾ См. стр. 127.

²⁾ См. стр. 118.

³⁾ О сочинении Саккери речь будет ниже (стр. 145).

ление плоскости и прямой: «Плоскость есть поверхность, которая делит пространство на две конгруэнтные части»; «прямая есть линия, которая делит плоскость на две конгруэнтные части». В таком виде это определение неправильно: синусоида также делит плоскость на две конгруэнтные части. Определение нуждается в исправлении: две части, на которые прямая делит плоскость, могут быть совмещены движением, оставляющим произвольную точку этой прямой в покое. Но самое деление на две части плоскости — прямой линией, пространства — плоскостью в несколько ином развитии приобрело большое значение в учении о расположении точек прямой, плоскости и пространства. Его зачатки заложены в этих определениях Лейбница, которые, несомненно, представляют шаг вперед в деле установления исходных положений Евклида. Мы ограничимся этими немногими указаниями; разбираться в многочисленных предложенных вариантах определений и постулатов, в спорах между комментаторами, часто очень острых, чаще всего беспредметных, было бы совершенно бесполезно.

4. Общий обзор комментариев к «Началам» Евклида. Соображения, критические замечания, предложенные варианты к «Началам», частью в связи с содержанием «Начал», частью в беглом обзоре комментариев к ним, приводят к следующим выводам.

«Начала», высокие достоинства которых уже достаточно отмечены, вызвали все же очень большое число возражений, обстоятельную критику. Если во многих случаях эта критика относится к незначительным дефектам, то она все же вскрывает и существенные недостатки, коренящиеся прежде всего в исходных положениях; эти дефекты настолько значительны, что они лишают Евклида возможности действительно выполнить задачу, которую он себе ставил, следуя установкам Платона и Аристотеля. При всей последовательности структуры, при огромной роли, которую в «Началах» играют логические выводы, сочинение Евклида все же не представляет выдержанной дедуктивной системы, как того требует схема Аристотеля. Напротив, рассуждения представляют собой пеструю смесь логических выводов и соображений, основанных на наглядных представлениях, смесь логики и интуиции. Слишком четко были выражены требования Аристотеля, чтобы это расхождение можно было игнорировать. Вследствие этого, вскоре после того, как «Начала» получили признание и распространение, начинается систематическая критика их. Эта критика выясняет многие дефекты, сосредоточивает на них внимание, вносит предложения для их устранения. Но, с одной стороны, очень существенные дефекты этой критикой не охватываются; целый ряд наглядных представлений признается как бы законным, естественным, может быть неизбежным, поскольку речь идет о геометрии и пространственных образах. Сюда, как уже неоднократно отмечалось, в первую очередь относятся соображения о расположении точек, прямых, плоскостей (лежит «между», «по одну» или «по разные стороны», «внутри» или «вне» образа); сюда же относится представление о движении, о возможных и невозможных движениях, а также предложения о непрерывности прямой, плоскости, пространства, отдельных образов. И так как этими наглядными представлениями проникнуто, можно сказать, каждое предложение, каждый вывод, то никаких принципиальных указаний на то, какими путями возможно устранить эти дефекты, как перейти к действительному выполнению требований Аристотеля, комментаторы не дают. Их соображения состоят из разрозненных критических замечаний, не выясняющих общего источника дефектов, не проливающих достаточного света на те пути, которые могут привести к действительному их устранению. Предложения

которые в этом направлении делаются, часто только заменяют одни наглядные представления другими, одни дефекты другими, чаще всего вовсе обходят существенные трудности, как бы закрывают на них глаза.

В таком состоянии признания высокой ценности и в то же время не прекращающейся критики «Начала» к концу XVIII века заканчивают второе тысячелетие своего существования. Критика, в общем, вскрывает менее важные дефекты и часто вовсе не отмечает более существенные, совершенно беспомощна в деле их устранения.

Постулат о параллельных линиях сосредоточивает на себе особенное внимание комментаторов; размышления над ним, как мы увидим, вскрывают слабые места всего сочинения, которые помимо него не были усмотрены, и приводят к существенно новым идеям в учении об обосновании геометрии.

«Нет того автора по началам геометрии,—замечает Даламбер (J. d'Alembert [⁴⁸]),—который в предисловии к своей книге не хулил бы своих предшественников. Сочинение такого рода, которое могло бы удовлетворить, еще нужно составить».

§ 13. РУКОВОДСТВА ПО ГЕОМЕТРИИ, СОСТАВЛЕННЫЕ ПО ПЛАНУ ДАЛАМБЕРА

1. План Даламбера по реформированию учебной книги по геометрии. Как было указано выше ¹⁾, в интересах преподавания геометрии в XVIII столетии стали выпускать так называемые школьные издания Евклида. Такие издания действительно получили широкое распространение в Англии (Симсон [¹³], Плэйфер [¹⁴]), в Германии (Лоренц [¹⁵]).

Во Франции дело обстояло несколько иначе. С середины XVIII века во Франции нарастали настроения, знаменовавшие глубокий переворот во взглядах на все социальные, экономические и классовые отношения в стране; назревала революция. В области народного образования эти течения, отражавшие тенденции сложившегося нового класса — буржуазии,—требовали большого его расширения и придания ему более живого и конкретного характера. Это, естественно, не могло не отразиться и на взглядах на преподавание математики. Как известно, идеология новых настроений того времени в большой мере получила выражение у «энциклопедистов», которые в значительной степени и творили ее. «Энциклопедия» [⁴⁸] стала выходить в 1751 г. Математическим ее разделом руководил Даламбер в сотрудничестве с Боссю (Ch. Bossut). В 1757 г. появился VII том «Энциклопедии», в котором была помещена статья Даламбера «Géométrie» [⁴⁹]; значительная часть этой статьи (раздел «Éléments de géométrie») была посвящена вопросу о том, как надлежит составлять начала геометрии. По существу, эта часть статьи только подробнее развивала в применении к геометрии идеи, уже изложенные в статье более общего характера «Éléments des sciences» [⁵⁰].

К этим же вопросам Даламбер возвращается позже, в статье, посвященной геометрии, в сборнике эскизов по различным философским вопросам [⁵¹]. Речь идет о том, как надлежит излагать в учебных целях начала науки вообще, начала геометрии в частности. Читатель, знакомящийся с этими статьями в настоящее время, легко может получить впечатление, что автор часто говорит совершенно тривиальные вещи. Это только означает, что идеи Даламбера, в общем, несомненно, получили такое признание и такое распространение, что сейчас представляются тривиальными. Не так обстояло дело почти 200 лет тому назад, когда статьи Даламбера

¹⁾ Стр. 32.

были опубликованы. Отчетливо высказанные идеи Даламбера были не только новыми, но даже революционными. Как известно, «Энциклопедия» получила широкое распространение, внимательно читалась даже врагами новых течений; на математические круги педагогов статья Даламбера имела огромное влияние.

Изложим те основные положения, в которых содержалось существо новых воззрений на составление учебной книги по геометрии и на обоснование этой науки. Той и другой задаче Даламбер придает чрезвычайно большое значение. «Нет такого геометра, — замечает он, — который стоял бы выше такой задачи: Декарты, Ньютоны, Лейбницы отнюдь не были бы чрезмерно высоки для ее выполнения».

Даламбер относится к Евклиду чрезвычайно сдержанно; он посвящает ему только следующие строки в начале статьи: «Евклид, живший приблизительно на 50 лет позже Платона, ... собрал то, что его предшественники открыли в области начал геометрии; он составил дошедшее до нас произведение, которое многие из современных геометров считают лучшим из сочинений этого рода».

Отметим, что еще осторожнее высказываются относительно «Начал» Евклида Лагранж и Даламбр в докладе Академии о переводе «Начал», сделанном Пейраром: «Еще в настоящее время находятся некоторые ученые, которые, может быть, по праву, а может быть, благодаря слишком уже исключительному вкусу к методам древних утверждают, что «Начала» Евклида, несмотря на дарования и достижения современных авторов, остаются лучшим сочинением этого рода, за исключением разве нескольких отдельных мест книги». Доклад помещен в указанном выше издании «Начал» Пейрара [1⁰].

Даламбер отнюдь не считает, что начала геометрии должны и в его время составляться по плану и по методу Евклида. Он вообще не считает полезным следовать в учебной книге традициям, освященным веками, или излагать все перипетии исторического генезиса руководящих идей; необходимо только сохранить внутреннюю концепцию понятий.

Изложение начал геометрии по плану Даламбера должно быть, прежде всего, сообразовано с тем, для какой цели книга предназначается: для начального ли обучения, имеющего узко практические цели, для более серьезного изучения геометрии или для подготовки людей, которые имеют склонность к специальным занятиям этой наукой; каждой из этих трех основных задач должна соответствовать учебная книга особого типа.

С этим должна быть сообразована и степень точности построения системы геометрии; во всяком случае нужно избегать той «химерической» точности, которая, оставаясь сомнительной в научном отношении, в учебной книге, несомненно, вредна и часто даже переходит в софистику. Даламбер, повидимому, имеет в виду химерическую точность, на которую претендуют многие комментаторы Евклида и на которой часто сосредоточивалось внимание преподавателя. В соответствии с этим Даламбер считает, что начала геометрии не следует начинать с аксиом, так как построение учебной книги на предпосланных аксиомах есть претензия именно на такого рода химерическую точность. Как мы уже не раз указывали, попытки построения геометрии на выдержанной аксиоматике, даже в целях научного изложения предмета, несомненно, в то время носили еще «химерический» характер в том отношении, что логическая строгость, которую хотели в это дело внести, была кажущейся и при сколько-нибудь внимательном анализе оказывалась иллюзорной, не выдерживала критики.

«Какая польза в том, — замечает Лакруа (С. F. Lacroix [52^a]), — чтобы нагромождать аксиомы в начале книги..., когда мы все равно не можем воспользоваться ими при доказательствах?».

Попытки строить учебную книгу по элементарной геометрии на основе выдержанной аксиоматики, несомненно, обречены на неудачу даже в настоящее время. Но от точности фактической, и притом доступной учащемуся, при серьезном изложении геометрии ни в каком случае не следует отказываться. Более того, вот что сказано Даламбером в статье «*Éléments*»^[49]: «Спрашивается, какому из двух качеств следует отдать предпочтение при составлении «Начал»: доступности или строгой точности? Очевидно, что самый вопрос содержит неправильное предположение: он предполагает, что строгая точность может быть лишена доступности; но имеет место противоположное: чем строже дедукция, тем доступнее она для восприятия, ибо точность заключается в сведении всего к наиболее простым принципам. Отсюда следует также, что строгость в собственном смысле этого слова необходимо влечет за собой наиболее естественный и наиболее прямой метод». Итак, точность отчетливая и доступная, свободная от всякой метафизики и схоластики, часто скрывающейся в нагромождении аксиом, — таково основное требование, которое Даламбер предъявляет к составителям «Начал». И в этом смысле дедукция заключается не в выводе всей системы из небольшого числа аксиом и определений (по отношению к которым Даламбер тоже рекомендует большую осторожность), а в сведении сложных истин к простым, доступным и очевидным, не считаясь с их числом, без попытки дать сколько бы то ни было полный их перечень. Совершенно ясно, что эта точка зрения глубоко расходилась с тенденциями Евклида.

Далее, опять в противоположность Евклиду, в «Началах», по мнению Даламбера, преобладающее значение должна иметь метрическая геометрия. Сообразно этому, учебную книгу по геометрии следует делить не на учение о прямой, плоскости и пространстве (т. е. на лонгиметрию, планиметрию и стереометрию, как эти термины часто понимаются в настоящее время), а на три отдела, посвященные соответственно измерению длин, площадей и объемов. Даламбер дает подробные указания, как следует строить учение об измерении. Все учение об измерении основано на пропорциональности одних величин другим; Даламбер подробно останавливается на том, какого рода пропорциональности должны быть устанавливаемы. Эти указания в такой мере выполняются современными учебниками, что вряд ли нужно на этом останавливаться; достаточно будет сказать, что вся эта схема идет от Даламбера.

Евклид, как указано, очень осторожно пользуется движением; он непосредственно к нему прибегает только два раза. Даламбер рекомендует пользоваться движением систематически, выясняя, однако, что речь идет здесь не о грубом механическом движении, а о геометрическом выяснении того, какие точки, линии и фигуры могут друг друга покрывать.

Что касается самого установления пропорциональности, то узловым пунктом здесь является случай несоизмеримых отношений. Даламбер считает, что их равенство должно устанавливаться доказательством от противного; он решительно отклоняет евклидову теорию пропорций.

Наконец, в учении об измерении длины окружности, площади круга, объема пирамиды, поверхностей круглых тел нельзя обойтись без учения о бесконечно-малых; по существу, конечно, они содержатся уже в теории несоизмеримых отношений. Нельзя сказать, чтобы статья Даламбера содержала достаточно точные указания о том, как, по его мнению, следует строить учение о бесконечно-малых. Он во всяком случае считает необходимым ввести понятие о пределе и основных его свойствах; хотя Даламбер допускает и применение метода исчерпывания в различных его формах, он предлагает все же пути, Евклиду совершенно чуждые.

Отметим еще одну особенность, в которой Даламбер стоит к Евклиду ближе, чем его последователи. Он — противник алгебраизации геометрии, т. е. прямого введения алгебры в построение элементов геометрии.

В этом свободном изложении статьи Даламбера мы далеко не исчерпали идей, в ней содержащихся; в других статьях, на которые в ней имеются многочисленные ссылки, эти идеи получают значительное развитие. Быть может, далеко не всё, что Даламбер предлагает, действительно должно быть проведено в учебной книге по геометрии; многое в настоящее время перекристаллизовалось, многое отпало. Но существенно то, что во всем комплексе статей по геометрии, помещенных в «Энциклопедии» и в «Эскизах»^[51], Даламбер дал обстоятельно разработанный план построения «Начал» геометрии как учебной книги, который почти во всех основных своих частях глубоко отличается от системы Евклида; он был проникнут новизной, стремлением отбросить старый шаблон, исканием новых путей в деле преподавания геометрии.

Статьи Даламбера получили широкое распространение как во Франции, так и вне ее; с ними считались при составлении новых «Начал» геометрии, часто они ложились в основу построения новой книги. Нужно сказать, что в то время учебная книга по геометрии, как и в эпоху господства Евклида, была в то же время носительницей идей обоснования геометрии.

Три сочинения, относящихся к концу XVIII и началу XIX вв., получили при этом преобладающее значение: «Курс» Безу, «Начала» Лежандра и «Начала» Лакруа. Эти сочинения в различной степени выдерживают план Даламбера, они имеют различное назначение и разную структуру; но все эти три руководства отражают тенденцию Даламбера оторвать преподавание геометрии от традиционной, тяжелой схемы Евклида. Все три книги написаны выдающимися математиками и талантливыми педагогами; они повысили уровень преподавания геометрии, сделав ее гораздо более доступной. Эти три учебника геометрии получили чрезвычайно широкое распространение во всех культурных странах и знаменуют новую эпоху в деле преподавания геометрии. И это не случайно: они представляют собой именно те три типа учебной книги, которые предусматривал Даламбер.

2. «Начала» геометрии Безу, Лежандра и Лакруа. Книга Безу (Е. Bezout^[52]) была предназначена для артиллерийских морских учебных заведений. Курс написан в очень доступном изложении, носит отчетливо выраженный отпечаток установок Даламбера; он явно предназначен для первой из трех категорий читателей, о которых тот говорит: изложение носит до некоторой степени повествовательный характер и не претендует на выдержанную точность; задачи и правила измерительной геометрии составляют почти исключительное содержание курса; приведены приложения к морским измерениям и приборам. Учебник предназначен для начинающих учащихся и как пропедевтический курс геометрии получил очень широкое распространение; даже англичане перевели его для своих начальных школ.

Но именно потому, что учебник Безу можно рассматривать только как пропедевтическое руководство, была необходима более серьезная учебная книга, предназначенная для школ повышенного типа — для средних учебных заведений, как мы бы сказали в настоящее время, — для второй категории читателей, по Даламберу. Такую книгу составил Лежандр. Его «Начала»^[18] действительно сменили Евклида на школьной скамье. Правда, следуя тенденции Даламбера реорганизовать преподавание геометрии, Лежандр все же отнюдь не относился к Евклиду пренебрежи-

тельно. «Методу древних, — говорит он в предисловии, — обыкновенно считают наиболее целесообразной, наиболее приспособленной для отчетливого выяснения геометрических истин. Она не только приучает учащихся к большой точности рассуждения, что представляет драгоценное преимущество, но и дает в то же время своеобразный тип упражнения мысли, по своему характеру отличный от анализа; это может в важных математических изысканиях сильно содействовать разысканию наиболее простых и наиболее изящных решений». В соответствии с этим взглядом Лежандр сохранил общий остов «Начал» Евклида и его выдержанное синтетическое изложение; де-Морган^[31] имел все основания смотреть на новые «Начала», как на переработку книги Евклида. Но это была очень глубокая переработка.

Прежде всего, Лежандр изменил самый стиль «Начал»; он заменил формально-эпический язык греческого геометра живым французским изложением. Он опустил все, что не укладывается в рамки первого ознакомления юношей с геометрией, а доступно лишь людям с высоким общим развитием; он превратил «Начала» в курс элементарной геометрии. Этой элементарной геометрии он придал метрический характер по общей идее Даламбера. Однако, отступая от прямых указаний Даламбера, Лежандр ввел элементы алгебры, и вторая книга Евклида отпала, так как в ней уже не было нужды; она могла только иллюстрировать общие алгебраические соотношения. Лежандр арифметизировал учение об отношениях и пропорциях, — и отпала трудная пятая книга. Извлечение квадратного корня, введение радикалов освобождают геометрию от совершенно недоступной десятой книги. В теории пропорций, на которой Лежандр строит учение об измерении по плану Даламбера, он всегда обрабатывает случай несоизмеримых отношений общим приемом приведения к абсурду; евклидова теория пропорций становится ненужной. Тем же методом доказательства от противного он заменяет и теорию пределов — прием, несомненно, составляющий слабую сторону книги. Лежандр выдерживает строгость геометрического рассуждения и лишь изредка впадает в ту иллюзорную точность, от которой предостерегает Даламбер¹⁾.

Лежандр, как уже сказано, превратил «Начала» в современный курс элементарной геометрии. Влияние его книги было огромно. Но нехватало третьего типа учебной книги, нехватало руководства, предназначенного для учащихся, которые подготовляются к углубленному изучению математики. Такое руководство составил в начале XIX века Лакруа²⁾. Этот выдающийся математик-педагог написал серию руководств «чистой и прикладной» математики, начиная с арифметики и кончая дифференциальным и интегральным исчислениями. Третью книгу этой серии составили «Начала геометрии»^[52b]. Свои взгляды на преподавание вообще, и на преподавание математики в частности, Лакруа подробно развил в особом сочинении^[52a]; в нем подробно изложены также принципы, на кото-

1) Таким примером «химерической» точности служит, например, предложение третьей книги, в котором Лежандр пытается доказать, что при совпадении двух точек одной прямой с двумя точками другой, совпадут не только определяемые этими точками прямолинейные отрезки, но и их продолжения.

2) Как указано выше в тексте, Даламбер считал еще необходимым составление книги, предназначенной для «более углубленного изучения геометрии». Книга Лакруа не вполне удовлетворяет этому требованию; это все же еще довольно элементарный учебник. Книги, действительно удовлетворяющие требованию Даламбера, появились уже значительно позже. Наиболее совершенное из них в XIX веке — известное сочинение Руше и Комберуса (E. Rouché et Ch. Comberousse^[54]). В настоящее время ему пришли на смену книга Адамара (J. Hadamard^[55]), выдержавшая уже одиннадцать изданий (с последнего издания сделан русский перевод), и книга Д. И. Перепелкина^[56].

рых построены его «Начала геометрии». Книга предназначалась для так называемой «Центральной школы», в которой преподавание математики было поставлено на высокую ступень со дня ее основания. По своему строению и изложению книга Лакруа, может быть, не так глубоко отличалась от «Начал» Лежандра; она даже несколько меньше по объему, но составлена более компактно; в ней более тщательно обработаны детали, в ней действительно видна подготовка к изучению высшей математики. Книга начинается с дополнения к курсу арифметики, необходимого для непосредственного перехода к изучению «Начал геометрии». Это уже в большой мере характеризует установку книги в ту пору, когда спор между *geometria* *geometrica* и *geometria* *algebraica* был особенно интенсивен. Однако это не значит, что Лакруа совершенно оставил синтетический стиль Евклида и Лежандра; напротив, общее строение книги синтетическое; но во многих местах алгебраические вычисления упрощают и значительно углубляют материал. Например, в отделе о правильных многоугольниках вычисления проведены так систематично и глубоко, как ни в каком руководстве того времени. Калькуляционных выражений в книге очень много. Вообще аналитический метод здесь систематически приходит на помощь синтетическому, иногда выдвигается даже на первый план. Вряд ли здесь целесообразно останавливаться подробно на различии между «Началами» Лежандра и Лакруа, которое не носит принципиального характера; может быть, будет лучше выяснить это различие на одном примере — на учении о длине окружности.

Безу поясняет, что на окружность можно смотреть как на многоугольник с бесконечным числом сторон; мы приближаемся поэтому к длине окружности, вычисляя периметры правильных вписанных многоугольников с возрастающим числом сторон. Лежандр рассматривает окружность уже как предел периметров вписанных и описанных правильных многоугольников, но почти этого не обосновывает. Лакруа доводит обоснование почти до полной точности: доказывает, что периметры вписанных многоугольников постоянно возрастают, описанных — убывают, что периметры описанных многоугольников остаются больше периметров вписанных, что разность между теми и другими стремится к нулю, что они, таким образом, имеют общий предел. Оставалось бы только определить длину окружности как общий предел тех и других периметров. К этому в начале XIX столетия близко подошел академик С. Е. Гурьев^[57] и еще ближе в 1823 г. Н. И. Лобачевский в своем учебнике геометрии^[58].

3. Определения и аксиомы Лежандра. Из рассмотренных трех сочинений (Безу, Лежандра и Лакруа) книга Лежандра получила наиболее широкое распространение; ее часто рассматривают как первое руководство по элементарной геометрии, фактически сменившее «Начала» Евклида. И это действительно так, если смотреть на «Начала» Лежандра, как на учебную книгу. Но слишком часто на книгу Лежандра смотрели также, как на существенный шаг вперед в деле обоснования геометрии. Этой задаче, строго говоря, не ставил план Даламбера; это, во всяком случае, не было главной целью ни у Лежандра, ни у Лакруа, хотя кое-что они в это дело внесли, как видно уже из приведенного обзора содержания их книг. Но, может быть, со своей педагогической точки зрения, Лакруа был даже более прав, чем Лежандр, обойдя вовсе основные исходные положения. Лежандр начинает с определений. Определение 1 гласит: «Геометрия есть наука, имеющая целью измерение протяжения; протяжение имеет три измерения: длину, ширину и высоту». Лежандр, таким образом, следуя аламберу, твердо становится на точку зрения метрической геометрии.

Очень существенно отметить три измерения пространства; но у Лежандра нет даже попытки указать действительное содержание этого утверждения; выяснение же его впоследствии потребовало больших усилий. Что такое длина, ширина, высота? Не вызывают ли эти термины еще более серьезные недоумения, чем исходные понятия Евклида? Определение 2 в точности повторяет Евклида: «Линия есть длина без ширины». Определение 3: «Прямая есть кратчайшее расстояние между двумя точками». Это определение дефектно, потому что не устанавливает тех свойств прямой, которые предусматриваются аксиоматикой; а при надлежащей аксиоматике и надлежащем определении длины линии может быть доказано, что из всех (спрямляемых) линий, проходящих между двумя точками, прямая имеет наименьшую длину. Существуют большие разделы геометрии (проективная, аффинная), в которых понятие о длине кривой вовсе отсутствует. Между тем, это определение прямой при авторитете Лежандра долго фигурировало в руководствах по геометрии. Определение поверхности повторяет Евклида; в качестве же определения плоскости Лежандр принимает определение Симсона: «Плоской называется такая поверхность, что прямая, проходящая через любые две ее точки, лежит на ней целиком». Это определение имеет несомненные достоинства; но Гауссу представило немало труда оправдать его закономерность. «*Plani possibilitatem demonstravi*» («Я доказал возможность плоскости»), — записал он в 1897 г. в своем дневнике. В общем, определения Лежандра не имеют преимуществ перед евклидовыми.

Не лучше обстоит и с аксиомами. Лежандр не отличает аксиом от постулатов и приводит следующие пять аксиом: 1) величины равные третьей, равны между собой; 2) целое больше части; 3) целое равно сумме частей, из которых оно состоит; 4) от одной точки к другой можно провести только одну прямую линию; 5) две величины — линии, поверхности, тела — равны, если при наложении одной на другую они совмещаются на всем своем протяжении.

Эти аксиомы вызывают немало возражений и во всяком случае недостаточны для синтетического построения геометрии.

Прошло две тысячи лет после того, как появились «Начала» Евклида. Они подверглись всесторонней критике, разъяснялись и комментировались; были выяснены многообразные их недостатки — педагогические, математические, логические. Но в начале XIX столетия один из самых известных геометров того времени выпускает «Начала», которые в дело самого обоснования геометрии не вносят ничего, что можно было бы считать существенным улучшением системы Евклида.

Впрочем, именно о Лежандре все же нельзя сказать, чтобы он, следуя Даламберу, вовсе игнорировал в своей книге вопросы обоснования геометрии. Читатель, вероятно, заметил, что постулата о параллельных линиях в исходных положениях нет. Над этим вопросом Лежандр много размышлял, и существенная заслуга в его выяснении Лежандру принадлежит. Мы уже указывали, что именно исследования, относящиеся к постулату о параллельных линиях, пролили свет на все стороны учения об основаниях геометрии. К этим исследованиям мы теперь и обращаемся.

ГЛАВА ВТОРАЯ

ПРЕДИСТОРИЯ НЕЕВКЛИДОВОЙ ГЕОМЕТРИИ

§ 14. ПОПЫТКИ ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ПОСТУЛАТА О ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ЛИНИЯХ

1. Постулат о параллельных линиях (V постулат Евклида). При обзоре содержания «Начал» Евклида был формулирован постулат о параллельных линиях¹⁾ и была отмечена его своеобразная роль в системе Евклида. Было указано, что этот постулат существенно отличается от остальных. Он сложнее других, содержит уже больший комплекс понятий, необходимых для его усвоения. В то время как ко всем остальным постулатам Евклид прибегает в первых же своих предложениях, V постулат получает первое применение только в 29 предложении. Более того, «Начала» как бы разбиваются на две части; первая часть — так называемая абсолютная геометрия — от V постулата не зависит, т. е. ее предложения устанавливаются без его помощи; вторая часть — собственно евклидова геометрия — вся основана на V постулате в том смысле, что доказательство каждого ее предложения опирается либо непосредственно на этот постулат, либо на предложения, уже ранее доказанные при его помощи. Собственно евклидова геометрия содержит большую часть предложений геометрии, — в частности, в планиметрии: теорему о сумме углов треугольника, учение о параллелограммах, о равновеликости многоугольников, о подобии треугольников и многоугольников, а следовательно, и всю метрику, основанную на учении о подобии.

Естественно возникает вопрос, в какой мере это деление, так отчетливо проявляющееся в «Началах», обусловливается существом дела. Не могут ли те предложения, которые Евклид доказывает, опираясь на постулат о параллельных линиях, быть доказаны без помощи этого постулата? Мы уже упоминали (стр. 70), что в планиметрии предложение III.14, доказательство которого в «Началах» основывается на V постулате, естественно доказывается без его помощи — средствами абсолютной геометрии. Нельзя ли и остальные предложения, которые Евклид устанавливает, опираясь на постулат о параллельных линиях, доказать без его помощи? Иными словами, нужен ли самый постулат? Нельзя ли исключить V постулат из числа положений, принимаемых без доказательства, нельзя ли логически вывести его из остальных постулатов и аксиом?

Этот вопрос возник очень рано. Не подлежит сомнению, что греческие геометры немало размышляли над ним еще до Евклида, стремились в учении о параллельных линиях обойтись без нового постулата. Рассуждения о параллельных линиях, правда довольно сбивчивые, можно найти

¹⁾ См. стр. 58.

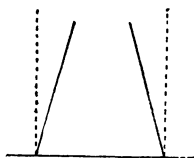
Уже в «Аналитике» Аристотеля¹⁾. Евклид решил, так сказать, разрубить Гордиев узел, связанный с V постулатом, принять содержащееся в нем утверждение без доказательства, включить его в число постулатов. Вопрос, однако, возник снова очень скоро после появления «Начал». Комментаторы Евклида занимались им очень усердно. При обзоре комментариев (§ 12) мы не останавливались на тех из них, которые относятся к теории параллельных линий, так как эти последние, по своей важности, требуют особого внимания; мы теперь ими займемся.

2. Общие соображения о V постулате. Так как почти все сведения об эллинских комментариях к Евклиду дошли до нас через Прокла, то естественно начать с общих соображений Прокла по этому вопросу. Вслед за текстом V постулата мы находим у Прокла следующие слова.

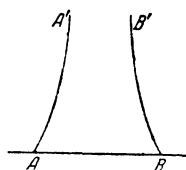
«Это положение должно быть совершенно изъято из числа постулатов, потому что это — теорема, вызывающая много сомнений, которые Птолемей пытался устранить в одной из своих книг; однако, его доказательство требует многих определений и теорем; и сам Евклид дает обращение этого предложения в качестве теоремы. Но, может быть, некоторые вследствие ошибочных воззрений подумают, что это положение действительно следовало поместить среди постулатов; само по себе оно вызывает доверие, если принять во внимание наклонение прямых линий, образующих с секущей углы, сумма которых меньше двух прямых. Этого рода людям Гемин справедливо отвечает, что у творцов науки мы научились не относиться в геометрических рассуждениях с полным доверием к наглядным представлениям нашего воображения; как говорит по этому поводу Аристотель, это было бы подобно тому, чтобы требовать доказательств от автора риторики и в то же время терпеливо выслушивать геометра, исходящего от наглядных представлений. И Симмиас в платоновом „Федоне“ говорит: „Я знаю, что те, которые ведут доказательство, исходя от очевидности, поступают тщетно“. Конечно, совершенно необходимо признать, что прямые линии наклоняются одна к другой, когда прямые углы заменяются острыми²⁾. Однако, что эти наклонные при продолжении сойдутся, это остается не достоверным, а лишь вероятным до тех пор, пока этому не будет дано логическое доказательство: ибо существуют бесконечные наклонные линии, которые никогда не сходятся; и, хотя это представляется мало вероятным и удивительным, но совершенно достоверно, что при других формах линий это может иметь место³⁾. Что же,

¹⁾ Вторая аналитика, кн. I, гл. 5; Первая аналитика, кн. II, гл. 17. У Хиса [19] I, стр. 308—309) читатель найдет подробный разбор этих мало вразумительных рассуждений.

²⁾ То-есть когда перпендикуляры к секущей заменяются наклонными, образующими с ней острые внутренние односторонние углы (черт. 29).



Черт. 29.



Черт. 30.

³⁾ Например, ветви AA' и BB' двух гипербол могут асимптотически приближаться одна к другой, образуя острые углы с секущей AB при точках A и B (черт. 30).

в случае прямых линий не может иметь место то, что бывает в случае других линий? До тех пор пока мы этого не обнгурили путем доказательства, свойства, которые могут проявляться при неограниченном продолжении других линий, тяготеют над нашим воображением. Но если появляется сомнение в том, произойдет ли пересечение линий, то каким образом должны мы изгнать из нашей доктрины это мало вероятное и иррациональное предположение? Совершенно ясно, что должно быть найдено доказательство настоящей теоремы; а такое требование природе постулатов совершенно чуждо¹⁾. Каким образом это предположение может быть доказано — это мы увидим ниже, придя к нему, когда элементы геометрии нас этому уже научат. Ибо необходимо обнаружить его справедливость, но не как нечто представляющееся нам очевидным без доказательства, а как предположение, становящееся таковым благодаря доказательству».

Это — знаменательные строки. Прокл, как мы видим, идет так далеко, что он, по крайней мере а priori, не исключает даже некоторого сомнения в истинности самого предложения. Во всяком случае он делает вывод, что постулат о параллельных линиях нужно из геометрии изъять, ее нужно освободить от этого «темного пятна», надо найти его доказательство.

Это — лейтмотив, который проходит почти через всю литературу, относящуюся к обоснованию геометрии. Эти мысли занимали уже Птолемея за 400 лет до Прокла; Птолемей, по свидетельству Прокла, написал об этом предмете целую книгу. Эти мысли систематически повторяются выдающимися геометрами вплоть до XIX в. Правда, доказательством постулата о параллельных линиях занимались и многие люди, лишенные не только таланта, но и достаточных познаний; но вместе с тем трудно назвать какого-либо из выдающихся геометров, кто не отдал бы дани этой проблеме, кто не посвятил бы ей времени и мысли.

В литературе накопилось много попыток доказательства евклидова постулата. В 1763 г. Клюгель (G. S. Klügel), ученик известного геометра Кестнера (A. G. Kaestner), занимавшего в Гёттингенском университете кафедру Евклида, представил диссертацию на тему «Обзор важнейших попыток доказательства теоремы о параллельных линиях» [69]. В этом сочинении автор рассматривает около тридцати доказательств V постулата Евклида и приходит к иному выводу, нежели Прокл.

Приведем вступление к диссертации Клюгеля, в котором его вывод отчетливо выражен.

«Среди истин, которые прилежно изучали выдающиеся умы, не последнее место занимает теорема элементарной геометрии о параллельных линиях. Все науки хранят в себе загадочные вещи: неудивительно, что наш ум, заключенный в определенные пределы, многого не постигает и не в состоянии раскрыть источники и причины многих фактов. При всем том я не знаю, коренится ли больше в слабости нашего ума или в характере самых истин вина того, что в пределах геометрии существуют препятствия, которые не дают возможности овладеть подступами к ней в такой степени, как это было бы желательно.

Немногочисленны истины, которые в геометрии могут быть доказаны без пособия теоремы о параллельных линиях; но еще мало-

¹⁾ Прокл, очевидно, хочет сказать, что к постулату мы не предъявляем требования, чтобы он был доказан; поэтому V постулат Евклида, к которому такое требование предъявляется, должен быть рассматриваем не как постулат, а как теорема.

численное те истины, которые можно использовать для ее доказательства. Вследствие этого, не располагая отчетливыми сведениями о прямых и кривых линиях, мы не можем выполнить это доказательство на основе их определения. При этих условиях нельзя поставить геометрии в вину, если она вносит в основные свои положения такое предложение, истинность которого не устанавливается отчетливым рассуждением, а усматривается непосредственно благодаря нашим наглядным представлениям о прямой линии. Такова XI аксиома Евклида, согласно которой две прямые на плоскости, пересекающиеся третью под углами, сумма которых меньше двух прямых, при неограниченном продолжении неизбежно должны пересечься.

Многие, опытные в геометрических доказательствах, пытались устранить эту истину из числа аксиом; но все доказательства, которыми они старались эту истину строго установить, оказались порочными. Другие предлагали заменить ее иными аксиомами, которые, однако, не могут считаться более ясными, нежели постулат Евклида.

Таким образом, если обозреть все попытки, то окажется совершенно правильным, что Евклид поместил это предложение среди аксиом.

Клюгель, конечно, не исчерпал всех предложенных до него доказательств; многие доказательства были опубликованы и после него. Но вывод, к которому он пришел, был совершенно правилен: ни одно из предложенных доказательств постулата о параллельных линиях не оказалось достаточным. Одни из них содержали прямую погрешность, другие, явно или неявно, заменяли в своих рассуждениях постулат эквивалентным ему допущением.

Мы приведем здесь некоторые доказательства, именно те, на которых в литературе этого вопроса было сосредоточено внимание и которые содействовали выяснению содержащихся в нем трудностей. При этом мы будем давать не свое изложение доказательств, а подлинные тексты авторов. При их обзоре мы будем пользоваться не столько работой Клюгеля, сколько русским сочинением, посвященным тому же предмету, но вышедшим почти через 100 лет после книги Клюгеля, — именно, сочинением академика В. Я. Буняковского «Параллельные линии» [60].

Предварительно заметим, однако, что постулат о параллельных линиях допускает различные формулировки, точнее, постулат может быть многообразно заменен другими положениями, эквивалентными ему. Авторы, занимающиеся доказательством постулата Евклида, обычно исходят из формулировок его, отличных от формулировки Евклида.

Мы приведем несколько таких формулировок постулата о параллельных линиях.

3. Постулаты, явно эквивалентные V постулату Евклида. Уже в § 5, рубр. 3 (стр. 59) было отмечено, что теоремы, содержащиеся в предложении «Начал» I.29, по существу, эквивалентны постулату о параллельных: если любое из содержащихся там утверждений принять без доказательства, то оно вполне заменяет V постулат Евклида. Точнее, в качестве постулата о параллельных линиях можно принять любое из условий, необходимых для параллельности двух прямых линий и выражаемых соотношениями (1—5) в § 5 на стр. 57.

Таким образом, постулат Евклида можно заменить одним из следующих:

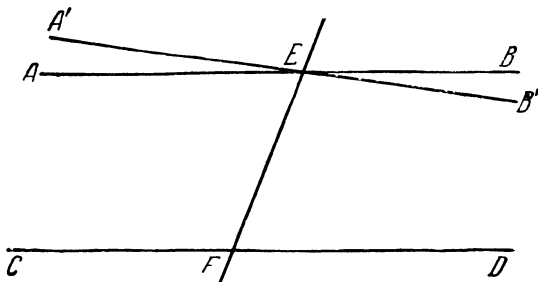
а) Если прямые параллельны, то при пересечении их третьей соответственные углы равны.

б) Если прямые параллельны, то при пересечении их третьей внутренние (или внешние) накрест лежащие углы равны.

Предложение «Начал» I.31 содержит решение задачи: через данную точку провести прямую, параллельную данной. Из его изложения видно, что Евклид разумеет единственное решение. Но так как он этого достаточно четко не формулирует, то Прокл в своем примечании указывает, что из предложения I.29 вытекает единственность решения: через точку вне прямой можно провести только одну прямую, параллельную данной. Но, если это утверждение принять в качестве допущения, то оно влечет за собой V постулат. Поэтому постулат о параллельных линиях можно дать следующее выражение.

с) Через точку, лежащую вне данной прямой, можно провести только одну прямую, параллельную данной.

В самом деле, если это утверждение принять, и параллельные линии AB и CD пересечь секущей EF (черт. 31), то сумма внутренних односторонних углов $AEF + EFC$ должна быть равна $2d$; если бы это не имело места, то через точку E можно было бы провести другую прямую $A'B'$ таким образом, что сумма внутренних односторонних углов $A'EF + EFC$ была бы равна $2d$. Эта прямая была бы по теореме I.28 параллельна CD , и, следовательно, через точку E проходили бы две прямые, параллельные прямой CD , что противоречит допущению.



Черт. 31.

В таком виде постулат в новой литературе, повидимому, впервые точно формулирован в школьном издании «Начал», выпущенном Плэйфером [14]; его поэтому часто связывают с именем Плэйфера. Между тем, именно в таком виде он, собственно, уже формулирован в примечании Прокла к предложению I.31; мы будем поэтому называть его постулатом Прокла-Плэйфера.

Вместо V постулата достаточно принять положение, составляющее его частный случай; его формулируют обыкновенно так:

д) Перпендикуляр и наклонная к одной и той же прямой, расположенные в одной плоскости, пересекаются (конечно, со стороны острого угла).

Совершенно ясно, что из этого допущения вытекает постулат Прокла-Плэйфера, а следовательно, и постулат Евклида.

Эту последнюю формулировку постулата Евклида обыкновенно связывают с именем Лежандра. О взглядах Лежандра на постулат о параллельных линиях нам придется подробно говорить ниже (§ 15, рубр. 2, стр. 132). В большей части изданий своих «Начал» [18] Лежандр, как это подробнее указано ниже, вовсе не приводит постулата о параллельных линиях, а предлагает его доказательство. Но в IX—XI изданиях Лежандр помещает постулат именно в формулировке, указанной литерой d).

Правда, в своих колебаниях Лежандр называет его не постулатом, а леммой. Он приводит ряд соображений, которые эту «лемму» выясняют,

которые имеют целью убедить читателя в ее справедливости; но к этому он присоединяет следующую «схолию»:

«Предыдущее пояснение, основанное на отношении, которое не выведено чистым рассуждением, для которого мы прибегли к измерениям на фигуре, точно построенной, не имеет той же строгости, что другие доказательства элементарной геометрии. Мы здесь его приводим только как простое средство убедиться в истинности предложения; для точного доказательства мы отсылаем читателя ко второй из двух нот, присоединенных к элементам»¹⁾.

Формулировку d) постулата обыкновенно называют *лежандровой*. Однако мы находим ее уже у арабского математика Насир-Эддина ат Туси в его комментариях к «Началам». Мы будем поэтому называть эту формулировку *постулатом Туси-Лежандра*.

После смерти Лежандра (1833 г.) издания его «Начал» выходили в обработке Бланше (М. А. Blanchet [⁶¹]). В этом виде книга Лежандра еще много раз переиздавалась; постулат о параллельных называется в ней уже не леммой, а допущением.

Нам придется ниже познакомиться с различными другими формулировками постулата и эквивалентными ему допущениями. Мы привели здесь только важнейшие, с которыми нам придется чаще всего встречаться.

4. Ошибочные доказательства постулата о параллельных. В. Я. Бунаковский в упомянутой выше книге делит доказательства постулата о параллельных на четыре категории. Однако, предварительно нужно сказать несколько слов о доказательствах, в которых содержатся прямые ошибки. Об этих доказательствах, собственно, не приходилось бы говорить. Задача о доказательстве постулата о параллельных привлекала многих математиков, а наряду с ними и любителей, не только не имевших настоящего геометрического образования, но часто не отдававших себе даже ясного отчета в самом содержании проблемы. Нередко такие любители занимались этой задачей много лет, доходили до утраты рассудка, иногда запутывались в сложных, совершенно ненужных построениях и, таким образом, впадали в грубые ошибки. Однако иногда в такие ошибки впадали и люди, не лишенные математического образования, даже до некоторой степени владевшие неевклидовой геометрией.

В 1893 г. в журнале Крелля была помещена статья Г. Шмидта (H. Schmidt [⁶²]), заканчивавшаяся выводом, что при пересечении двух параллельных линий третьей внутренние накрест лежащие углы равны. Автор претендовал на то, что его доказательство не опирается на постулат о параллельных линиях. Появление статьи в первоклассном журнале, который тогда редактировал Фукс (L. Fuchs), вызвало до некоторой степени сенсацию. Между тем при кажущейся научности геометрических рассуждений весьма общего характера автор все же впадает в грубую ошибку, которую мы будем иметь возможность выяснить ниже (§ 32, рубр. 3, стр. 253).

5. Доказательство Прокла. Теперь обратимся к доказательствам, которые входят в классификацию В. Я. Бунаковского. Первую и основную категорию доказательств постулата о параллельных линиях по Бунаковскому образуют те, которые непосредственно или после ряда предвари-

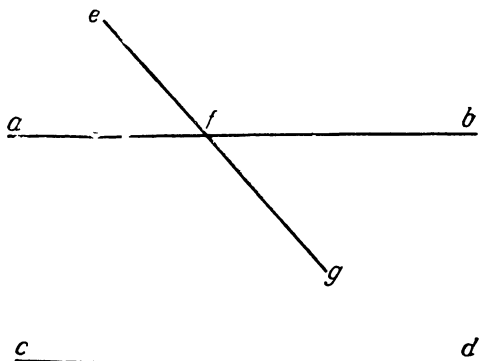
¹⁾ В этой ноте Лежандр приводит одно из тех рассуждений, о которых рассказано ниже, на стр. 134 — 138.

тельных построений явно или неявно делают допущение, эквивалентное постулату Евклида. К этой категории принадлежит значительное большинство доказательств постулата. Мы начнем с доказательства Прокла¹⁾.

Комментируя предложение 1.29 «Начал», Прокл прежде всего излагает доказательство этого предложения, принадлежащее Птолемею и не опирающееся на V постулат. Это доказательство в такой мере наивно, что и сам Прокл не относится к нему серьезно; мы не будем его здесь приводить. Свои собственные соображения Прокл начинает с рассуждений, не лишенных некоторого остроумия, но фактически прямо к делу не относящихся; мы их уже приводили выше (стр. 112). То, что он, собственно, считает доказательством постулата, изложено следующим образом:

«Те, которые желают получить доказательство, должны быть осведомлены, что оно предполагает аксиому, которой пользовался Аристотель в своем доказательстве конечности мира; именно, если

из одной точки выходят две прямые, то при неограниченном их продолжении расстояние между ними становится больше любой конечной величины. Он [Аристотель] указывает, что при продолжении бесконечных **прямых** линий от центра [от точки их пересечения] к периферии расстояние между ними также будет бесконечно; ибо если бы оно было только конечным, то оно все же могло бы быть увеличено, прямые же линий не были бы бесконечны²⁾. Итак [пересекающиеся] прямые линии при неограниченном продолжении удаляются одна от другой на расстояние, которое становится больше любой конечной величины. Принимая это, я утверждаю, что прямая, пересекающая одну из двух параллельных линий, пересекает также и другую.



Черт. 32.

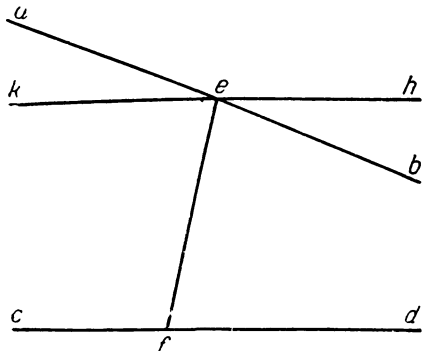
В самом деле, пусть ab и cd будут параллельные прямые и пусть прямая efg пересекает ab (черт. 32); утверждаю, что она пересечет также cd . В самом деле, так как мы здесь имеем две прямые линии, которые могут быть неограниченно продолжены от точки f , именно fb и fg , то расстояние между ними превзойдет любую конечную величину. Следовательно, оно превзойдет величину расстояния между заданными параллельными прямыми линиями. Так как их расстояние становится, таким образом, больше расстояния между параллельными, то fg пересечет cd .

Установив это, мы можем последовательно провести доказательство постулата.

¹⁾ Помещаемые ниже подлинные рассуждения авторов, предлагавших различные доказательства постулата о параллельных линиях, были нами помещены также в I томе Полного собрания сочинений Н. И. Лобачевского [63], в предисловии к его «Геометрическим исследованиям».

²⁾ Эти соображения, конечно, очень сбивчивы и даже вовсе непонятны; но самая аксиома, которую формулировал Аристотель и которую Прокл применяет в следующем предложении, выражена совершенно отчетливо.

Пусть ab и cd будут две прямые, которые при пересечении с прямой ef образуют с ней углы bef и dfe (черт. 33), составляющие меньше двух прямых. Утверждаю, что прямые пересекутся с той стороны, с которой сумма углов меньше двух прямых. В самом деле, так как углы bef и dfe составляют меньше двух прямых, то пусть heb будет угол, дополняющий их сумму до двух прямых; продолжим he до точки k . Так как теперь прямая ef пересекает линии hk и cd и образует с ними внутренние односторонние углы, составляющие два прямых, именно hef и dfe , то прямые hk и cd параллельны; ab пересекает kh , следовательно, в силу установленного выше предложения, она пересекает также и cd .



Черт. 33.

Следовательно, прямые ab и cd встречаются с той стороны,

о которой расположены углы, составляющие меньше двух прямых. Поставленная цель, таким образом, достигнута).

Приведенное рассуждение Прокла состоит из трех частей. В первой части Прокл четко оговаривает, что он допускает добавочную аксиому, ведущую свое начало от Аристотеля. Во второй части он при помощи этой добавочной аксиомы доказывает вспомогательное предложение, заключающееся в том, что прямая, расположенная в плоскости двух параллельных прямых и пересекающая одну из них, пересекает также вторую¹). Наконец, третья часть посвящена доказательству постулата о параллельных линиях в том виде, в каком он формулирован в «Началах» у Евклида.

Рассуждение Прокла содержит двойную ошибку. Положение, которое он называет «аристотелевой аксиомой» и которое заключается в том, что точки, расположенные на одной стороне угла, по мере удаления от вершины неограниченно удаляются от другой стороны угла, отнюдь не должно быть причислено к аксиомам. Оно допускает строгое доказательство, не опирающееся на постулат о параллельных линиях; это доказательство дано Лобачевским в сочинении «Новые начала геометрии» ([⁶⁴], статья 106), но встречается еще раньше в сочинении Саккери (см. ниже, стр. 121).

Во второй части, при доказательстве вспомогательного предложения, Прокл принимает, что расстояние между двумя параллельными линиями на всем их протяжении остается конечным (можно даже думать, что он считает это расстояние постоянным); это есть допущение, вполне эквивалентное постулату о параллельных линиях. Рассуждение Прокла и сохраняет свое значение потому, что оно устанавливает эквивалентность этих обоих положений.

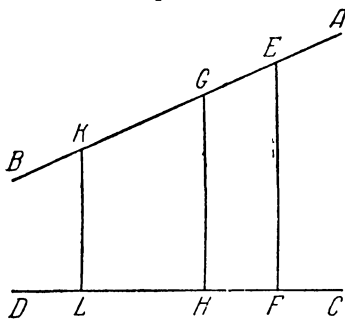
6. Доказательство Насир-Эддина. В XIII веке арабский математик Насир-Эддин ат Туси сделал перевод на арабский язык «Начал» Евклида и сопроводил их многочисленными примечаниями и комментариями. Это сочинение свыше трехсот лет сохранялось в рукописи, а в 1594 г. было

¹) Заметим, что это вспомогательное предложение, по существу, совпадает с плейферовой формулировкой постулата о параллельных линиях (см. стр. 115).

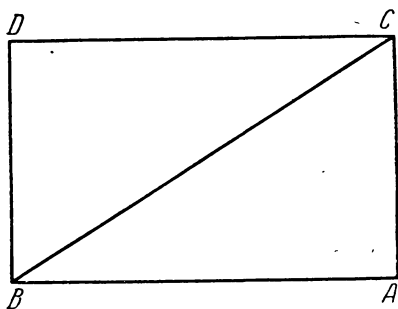
выпущено в свет в печатном виде в Риме [65]. В 1901 г. в Бомбее оно было опубликовано в переводе на санскритский язык. Сочинение это мало доступно, потому что перевода его на европейские языки не существует. Английский математик XVII века Дж. Валлис (J. Wallis, 1616—1703), занимавший в Оксфордском университете кафедру Евклида, хорошо известный также своими трудами по алгебре и анализу, в своих лекциях по геометрии излагает доказательство постулата о параллельных линиях, предложенное Насир-Эддином. Это доказательство замечательно в том отношении, что в нем впервые постулат о параллельных линиях поставлен в связь с учением о сумме углов треугольника. Мы воспроизводим здесь доказательство Насир-Эддина в передаче Валлиса, помещенное во втором томе полного собрания его сочинений [66a].

«Насир-Эддин предпосылает доказательству постулата три леммы, первую из которых он принимает без доказательства. Содержание их, по существу, заключается в следующем:

Лемма I. а) Если AB и CD (черт. 34) суть две прямые линии, расположенные таким образом, что пер-



Черт. 34.



Черт. 35.

пендикуляры EF , GH , KL , опущенные из точек прямой AB на CD , всегда образуют с прямой AB неравные углы¹⁾, которые все время остаются острыми со стороны B и тупыми со стороны A , то прямые AB и CD , до тех пор, пока они не пересекаются, постоянно сближаются со стороны острых углов и расходятся со стороны тупых углов, т. е. перпендикуляры уменьшаются в сторону точек B и D и возрастают в сторону точек A и C .

б) Обратно, если проведенные таким образом перпендикуляры становятся короче в направлении к точкам B , D и длиннее в направлении к A , C , так что прямые AB и CD постоянно сближаются в сторону B , D и расходятся в противоположную сторону, то каждый перпендикуляр образует с прямой AB два угла, один из которых острый, а другой тупой; при этом все острые углы обращены в сторону точек B , D , а тупые — в противоположную сторону.

Лемма II. Если из концов отрезка AB восставим к нему перпендикуляры AC , BD (черт. 35) и на них

¹⁾ То-есть неравны смежные углы, которые каждый перпендикуляр образует с прямой AB , например, AEF и BEF .

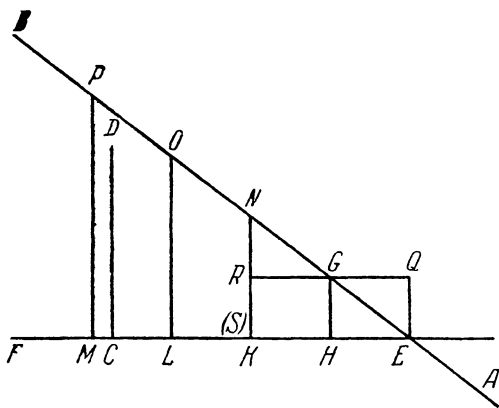
отложим равные отрезки AC, BD и проведем прямую DC , то каждый из углов ACD и BDC будет прямым, а отрезок CD будет равен AB .

Доказательство последней леммы ведется от противного на основе предыдущей леммы. Если, например, ACD не прямой угол, то он либо острый, либо тупой; предположим, что он острый; тогда, согласно лемме I, AC больше BD , что противно условию; и т. д.¹⁾

Доказав, что углы ACD, BDC прямые, уже нетрудно обнаружить, что отрезки AB и CD равны.

Лемма III. В каждом треугольнике три угла составляют вместе два прямых. Для прямоугольного треугольника это доказывается на основании предыдущей леммы. В самом деле, если дан прямоугольный треугольник BAC (черт. 35), то мы строим, как это сделано выше, четырехугольник $ABDC$, все углы которого, в силу предыдущей леммы, прямые. Диагональ BC делит этот четырехугольник на два равных треугольника, в каждом из которых внутренние углы составляют, таким образом, вместе два прямых. Вместе с тем теорема справедлива и для любого треугольника, так как всякий треугольник может быть разбит на два прямоугольных треугольника.

Теперь Насир-Эддин переходит к окончательному доказательству V постулата. Здесь возможны три случая: 1) когда один из



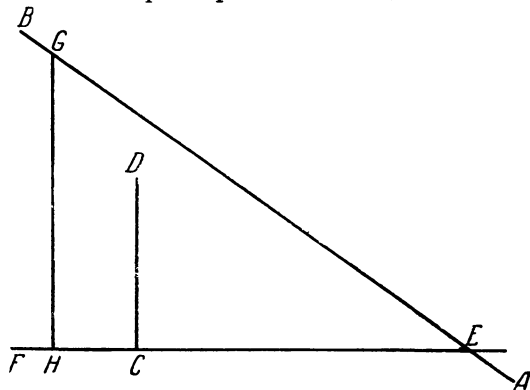
Черт. 36.

внутренних односторонних углов, составляющих вместе менее $2d$, прямой, 2) когда они оба острые и 3) когда один из них тупой. Насир-Эддин обнаруживает, что два последних случая могут быть приведены к первому, и обращается к доказательству теоремы: если одна из двух прямых образует с секущей прямой угол, а другая — острый угол, то эти прямые встречаются со стороны острого угла. Предположим, что прямые AB и CD (черт. 36) встречаются прямую FCE , образуя с ней прямой угол ECD и острый угол CEB . Возьмем на EB произвольную точку G и из нее опустим перпендикуляр GH на EC . Так как угол CEG острый, то перпендикуляр упадет со стороны точки C ; при этом он либо совпадет с перпендикуляром DC , либо не совпадет с ним. В первом случае предложение доказано.

¹⁾ Заметим, что это заключение даже не вытекает из предыдущей леммы, ибо рассуждение молчаливо допускает, что в том случае, если ACD есть острый угол, BLC есть тупой угол; не исключена возможность, что оба угла острые, и тогда лемма не может получить применения; см. ниже рассуждение Саккери (стр. 121—122). Лемма вообще предполагает, что рассматриваемый угол в сторону CD все время остается острым. Поэтому о том, что происходит в рассматриваемом случае, когда автор допускает только, что один угол ACD острый, на основании леммы I нельзя сделать никакого вывода. Очень жаль, конечно, что мы не располагаем подлинным текстом Насир-Эддина.

Если GH не совпадет с DC и упадет со стороны точки F [черт. 37¹⁾], то прямая CD , входя внутрь треугольника, составленного перпендикуляром и прямыми AB и EF , должна пересечь EG ²⁾. Пусть, наконец, GH ³⁾ падает со стороны точки E от прямой CD . Вдоль HC [черт. 36] откладываем ряд отрезков HK , KL и т. д., равных EH , до тех пор пока точка деления M не упадет за точку C . Вдоль AB отметим отрезки GN , NO и т. д., равные EG , до тех пор пока отрезок EP не станет таким же относительно отрезка EG , каким EM является относительно EH , т. е. во столько же раз превзойдет GE , во сколько раз ME превосходит HE . Тогда можно доказать, что перпендикуляры, опущенные из точек N , O , ..., P на прямую EF , падают соответственно в точки K , L , ..., M .

В самом деле, проведем первый из этих перпендикуляров из точки N и обозначим его через NS . Проведем далее отрезок EQ , перпендикулярный к EH и равный GH , и на SN отложим отрезок SR , также равный GH . Прове-



Черт. 37.

дем, наконец, прямые GQ и GR . Тогда, в силу леммы II, углы EQG и QGH будут прямыми и $QG = EH$. Таким же образом и углы SRG и RGH прямые и $RG = SH$; следовательно, отрезки RG и GQ лежат на одной прямой и углы, противоположные при вершине, NGR и EGQ равны. Углы NRG и GQE прямые, а $NG = GE$ по построению. Поэтому $RG = GQ$ и вместе с тем $SH = HE$; а так как по построению $HE = HK$, то $SH = KH$, и точка S совпадает с K . Совершенно такое же рассуждение можно провести и относительно остальных перпендикуляров. Следовательно, прямая PM перпендикулярна к FE ; поэтому прямая CD , будучи параллельна MP и проходя внутри треугольника PME , должна при достаточном продолжении пересечь EP .

В 1733 г. итальянский математик, иезуит Иероним Саккери (G. Saccheri), выпустил в свет «Начала» Евклида с весьма замечательными комментариями [97], о которых нам придется говорить ниже (§ 16, стр. 145). В обширных рассуждениях, относящихся к V постулату, Саккери посвящает доказательству Насир-Эддина следующие соображения, отчетливо выясняющие несостоятельность этого доказательства. Приводим перевод этих рассуждений Саккери:

«Насир-Эддин требует признания двух положений. Во-первых, что две прямые, расположенные в одной плоскости и встречающиеся

¹⁾ Соответствующего чертежа (черт. 37) нет в тексте Насир-Эддина; он присоединен нами.

²⁾ Это утверждение основано на следующей аксиоме: если прямая, пересекающая сторону треугольника, входит внутрь его, то она должна из него выйти, т. е. должна встретить периферию треугольника еще в одной точке. Эта аксиома в том или ином выражении необходима для обоснования абсолютной геометрии. Ее неправильно называют «аксиомой Паша», см. об этом ниже, на стр. 123.

³⁾ Возвращаемся к оригинальному чертежу автора (черт. 36).

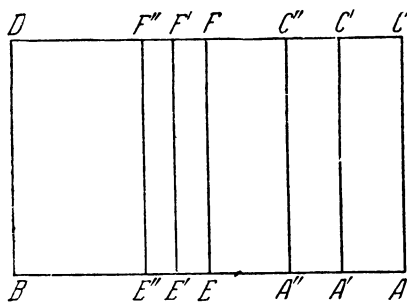
ряд других прямых линий таким образом, что последние постоянно перпендикулярны к одной из них, а другую постоянно пересекают под неравными углами, и именно, по одну сторону под острыми углами, а по другую под тупыми углами,—что такие две прямые, говорю я, до тех пор пока они не пересекаются, постоянно приближаются одна к другой в сторону острых углов и, наоборот, в сторону тупых углов постоянно расходятся.

Если других трудностей на его пути нет, я, со своей стороны, охотно признаю это требование Насир-Эддина, ибо как раз то, что у него остается недоказанным, я самым строгим образом доказал во II приложении к III предложению¹⁾.

Второе требование Насир-Эддина представляет собой обращение первого; оно заключается в том, что угол должен в ту сторону, с которой упомянутые перпендикуляры по условию уменьшаются, постоянно оставаться острым, а с противоположной стороны, с которой перпендикуляры возрастают, должен оставаться тупым.

В этом кроется недоразумение. Почему углы (считая от некоторого перпендикуляра, принимаемого за первый), будучи первоначально по одну сторону острыми, не могли бы постоянно возрастать, пока мы не дойдем до прямого угла, т. е. до перпендикуляра, который служит общим перпендикуляром обеих названных прямых; и если это наступит, то хитрые построения Насир-Эддина, при помощи которых он весьма остроумно, хотя и с большими усилиями, доказывает евклидову аксиому, сводятся на-нет).

Эти соображения Саккери безусловно правильны. Поясним их еще несколько на самом ходе доказательства Насир-Эддина. Леммой I Насир-



Черт. 38.

Эддин пользуется лишь для доказательства следующей леммы II. Здесь ему нужно показать, что при сделанном им построении в четырехугольнике $ABDC$ (черт. 38) внутренние углы C и D прямые. Доказывая это от противного, он принимает, что угол C острый, и утверждает, что тогда, согласно принятой лемме, перпендикуляры $C'A'$, $C''A''$, ..., идущие к D , должны с той же стороны составлять с CD острые углы C' , C'' , ... и вместе с тем убывать; поэтому BD не может оказаться равным AC .

Однако, как уже замечено выше, это утверждение из леммы I Насир-Эддина вовсе не вытекает. Согласно точному смыслу леммы, перпендикуляры $C'A'$, $C''A''$, ... убывают, если углы C' , C'' , ... остаются острыми. Между тем, как указывает Саккери, не исключена возможность, что эти углы возрастают, дорастая в некотором положении перпендикуляра FE до прямого; тогда FE (общий перпендикуляр) будет наименьшим расстоянием между прямыми AB и CD ; дальнейшие перпендикуляры $F'E'$, $F''E''$, ... могут возрастать и вновь дорасти до $BD = AC$. Более того, при развитии своих идей Саккери показывает, что отрезок FE , соединяющий середины верхней и нижней сторон такого четырехугольника, непременно представ-

¹⁾ Это первое допущение Насир-Эддина, по существу, представляет собой только некоторое расширение того положения, которое Прокл называет «аристотелевой аксиомой», о которой мы уже упоминали выше, и именно в этом расширенном виде оно действительно было доказано как Саккером, так и, независимо от него, Лобачевским.

ляет собой общий перпендикуляр; чтобы в этом убедиться, достаточно наложить четырехугольник $ABDC$ на самого себя обратной стороной, т. е. так, чтобы точки A и B , а также перпендикуляры AC и BD , заместили друг друга: точки E и F при этом не изменят своих положений. Поэтому углы D и C равны, а прямая EF перпендикулярна к обоим «основаниям» AB и CD ¹⁾.

Продолжая анализ доказательства Насир-Эддина, заметим, что леммой III он для доказательства постулата вовсе не пользуется, ему нужна только лемма II. Какую же роль играет в его рассуждениях лемма III? Она выясняет, что лемма II вполне равносильна тому, что сумма углов треугольника равна $2d$; из леммы II Насир-Эддин выводит, что сумма углов треугольника равна $2d$, разрезывая четырехугольник на два прямоугольных треугольника; обратно, если принять, что сумма углов в треугольнике равна $2d$ и, следовательно, в четырехугольнике она равна $4d$, то в четырехугольнике $ABDC$, который Насир-Эддин рассматривает, углы C и D , будучи равны между собой, должны быть прямыми. Это приводит к следующему выводу.

Основываясь на постулате о параллельных линиях, Евклид доказывает, что сумма углов в треугольнике равна $2d$; если же предварительно принять, что сумма углов треугольника равна $2d$, то отсюда вытекает лемма II Насир-Эддина и основанное на ней безукоризненное доказательство V постулата. Следовательно, допущение, что сумма внутренних углов треугольника равна $2d$, эквивалентно постулату Евклида. Таков действительный вывод из рассуждений Насир-Эддина. Этот вывод имеет большое значение; его отчетливо усвоил и формулировал Саккери; к нему возвращается Лежандр (см. ниже, § 15, стр. 131). Это сыграло большую роль в дальнейшей эволюции учения о параллельных линиях.

Мы отметим еще два существенных момента в доказательстве Насир-Эддина. Во-первых, его утверждение, что, откладывая на EF равные отрезки EH , NK , KL (черт. 36), мы неизбежно придем к точке M , лежащей за точкой C , основывается на аксиоме Архимеда; доказательство, таким образом, существенно опирается на эту аксиому. Во-вторых, Насир-Эддин делает еще одно допущение. Он утверждает, что прямая CD , входя внутрь треугольника EMP , должна из него выйти, т. е. должна встретить еще одну его сторону. Это утверждение основано на постулате, который обычно неправильно связывают с именем Паша (M. Pasch). Этот постулат в том или ином выражении (как уже отмечено выше, стр. 121) необходим для обоснования абсолютной геометрии. Со всей определенностью его впервые действительно отметил Паш в сочинении [69], но не формулируя его четко, как необходимый постулат; им до Паша пользовались, повидимому, впервые Насир-Эддин, а после него — Саккери и Лобачевский. Мы к этому постулату в своем месте еще возвратимся. Здесь отметим только, что этот постулат нужно приобщить к постулатам абсолютной геометрии. Мы будем его называть постулатом Туси-Паша.

7. Доказательство Валлиса. Дж. Валлис пользовался весьма большим авторитетом не только в Англии, но и во всех странах, в которых в ту пору культивировалась математика. 11 июля 1663 г. он прочитал в Оксфорде лекцию, содержащую доказательство постулата о параллельных; эта лекция тем более интересна, что она содержит также и изложение взгля-

¹⁾ См. «Геометрические исследования» Н. И. Лобачевского [68], предложение 24. Вообще читатель вполне уяснит себе положение дела, когда усвоит содержание § 21, в частности рубр. 6 этого параграфа (стр. 186).

дов этого выдающегося математика на существо проблемы о параллельных линиях. Лекция эта опубликована в полном собрании сочинений Валлиса [66b]. Она начинается следующими вводными словами, отчетливо выявляющими взгляды Валлиса:

«Как известно, некоторые как древние, так и новые авторы делали Евклиду упрек, что он принял V постулат или (как говорили другие) XI аксиому, или даже (по исчислению Клавия) XIII аксиому без доказательства, между тем как он должен был бы ее доказать. Именно, порицали, что он принял для прямых линий за очевидное нечто такое, что для линий вообще несправедливо» ¹⁾.

Формулировав постулат о параллельных линиях, Валлис продолжает:

«Между тем большинство этих обвинителей Евклида (по крайней мере, поскольку я их до сих пор изучил) основывают свои доказательства на других допущениях, которые, как мне кажется, ни в коем случае не будут признаны более легкими, чем то, что требует Евклид. Нередко они впадают даже в ту самую ошибку, которой они желают избежать; именно, они принимают для прямых линий за истинное нечто такое, что для линий вообще несправедливо, как я это показал в другом месте.

Со своей стороны, я без колебаний принимаю то, что требует Евклид, и это не потому, что доказательства, предложенные другими, страдают тем же недостатком, который они порицают у Евклида, или что требования их вовсе не более очевидны; дело в том, что, как мне кажется, совершенно необходимо либо принять этот постулат, либо заменить его другим; и, наконец, если даже признать доказуемость этого постулата, то нужно сказать, что в качестве основного положения обыкновенно принимают не только то, что совершенно недоказуемо, но и то, что само по себе настолько очевидно, что не нуждается ни в каком доказательстве; ибо, несомненно, некоторые из других аксиом могут быть доказаны, и это было бы нетрудно обнаружить, если бы в этом была нужда ²⁾.

Но видя, как многие до настоящего времени пытались дать доказательство упомянутого постулата в убеждении, что он в таком нуждается, а также сделать некоторый вклад в это дело, я попытался дать доказательство, которое вызывало бы меньше возражений, чем доказательства, предложенные до сего времени».

Как и другие авторы, Валлис предпосылает своему доказательству ряд вспомогательных предложений. Одни из них совершенно тривиальны, другие бы нуждались не столько в доказательстве, сколько в уточнении тех понятий, которыми автор оперирует; во всяком случае, первые семь его предложений, по существу, не встречают возражений и здесь не требуют воспроизведения.

Мы ограничимся поэтому только двумя предложениями Валлиса — восьмым и девятым.

«VIII. Наконец, я приму (считая уже известными учение об отношении и понятие о подобных фигурах) следующее положение: для каждой фигуры всегда существует другая подобная ей фигура произвольной величины.

¹⁾ Явное указание на соображения Прокла.

²⁾ Очень многие комментаторы Евклида указывали, что II и IV постулаты допускают доказательства.

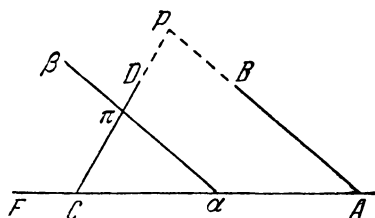
Кажется, что это допущение (способность к бесконечному делению и пропорциональному увеличению) вытекает из существования пространственных отношений; именно, ясно, что каждую фигуру можно неограниченно уменьшать и увеличивать (сохраняя форму)».

За этим следует длинный абзац, в котором Валлис старается еще убедительнее обнаружить допустимость вводимого им основного положения. Далее идет предложение IX, которое и содержит, собственно, доказательство V постулата.

«IX. Пусть AB и CD (черт. 39) будут прямые, пересекающие неограниченную прямую ACF и образующие с нею по одну сторону внутренние углы BAC и DCA , которые вместе составляют меньше двух прямых.

Я утверждаю, что прямые AB и CD при неограниченном продолжении встречаются и именно с той стороны прямой AF , с которой лежат эти два угла.

В самом деле, представим себе, что прямая AC^1), расположенная между ними на неограниченной прямой ACF , прямолинейно по ней передвигается²⁾). Положим, далее, что прямая AB , опирающаяся на AC , движется вместе с этим отрезком, сохраняя угол BAC , до тех пор пока $\alpha\beta$, т. е. движущаяся прямая AB , встретит прямую CD (согласно лемме VII) в некоторой точке π . Тогда $\pi C\alpha$ есть треугольник³⁾), и (согласно предложению VIII) существует другой подобный ему треугольник любой величины. Поэтому на отрезке CA (как на основании) можно построить треугольник, подобный треугольнику $\pi C\alpha$, с основанием CA . Пусть это выполнено и PCA есть этот треугольник».



Черт. 39.

Авторы доказательства постулата о параллельных линиях естественно стараются обеспечить себя от возможных возражений; при этом они очень часто входят в пространственные рассуждения о совершенно тривиальных вещах, которыми правильность вывода совершенно не нарушается. Мы опускаем такого рода тривиальные соображения Валлиса и воспроизводим продолжение доказательства.

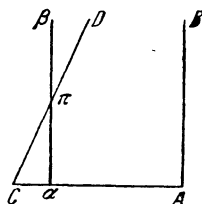
«Так как PCA есть треугольник, то стороны CP и AP (по определению треугольника) встречаются в точке $P^4)$; а так как

¹⁾ Собственно, отрезок AC .

²⁾ Возможность такого передвижения прямолинейного отрезка по прямой, на которой он лежит, подробно обосновывается Валлисом в лемме I.

³⁾ Доказательству того, что такой треугольник действительно образуется, посвящены предпосланные леммы. Эти подготовительные теоремы были бы излишними, если бы Валлис ограничился тем случаем, когда $AB \perp AC$ (черт. 40), а угол DCA острый (этим случаем весь вопрос исчерпывается). Опустив из любой точки π на стороне CD угла ACD перпендикуляр $\pi\alpha$, получаем треугольник $\pi C\alpha$. Вообще все рассуждение Валлиса при этом могло бы быть изложено короче.

⁴⁾ И эта фраза характерна в смысле попытки обоснования тривиального утверждения, что стороны треугольника имеют общую точку — вершину.



Черт. 40.

треугольник $РСА$ подобен треугольнику $\pi C\alpha$ (по построению), то каждый угол одного треугольника равен соответствующему углу другого треугольника (согласно определению подобных прямолинейных фигур). В соответствии с этим угол $РСА$ равен углу $\pi C\alpha$, т. е. углу DCA , и прямая CP лежит на продолжении прямой CD , ибо, если бы прямая CD лежала по одну или другую сторону [от CP], то угол $РСА$ был бы больше или меньше угла DCA , между тем как равенство их доказано.

Точно так же угол PAC равен углу $\pi\alpha C$. Но тому же углу $\pi\alpha C$, т. е. углу $\beta\alpha F$, равен угол BAF или BAC , а потому угол BAC равен углу PAC . Следовательно, прямая AP лежит на продолжении прямой AB (если бы она лежала по одну или другую сторону ее, то углы BAC и PAC не были бы равны, между тем как равенство их доказано).

Таким образом, прямая AP совпадает с продолжением прямой AB . Совершенно так же CP и продолжение CD образуют прямую. Но, как уже было показано, AP и CP встречаются в точке P ; поэтому встречаются и продолжения прямых AB и CD и именно в этой точке P , т. е. с той стороны прямой ACF , с которой лежат два угла, составляющие меньше двух прямых, что и требовалось доказать.

Это доказательство я провел по самым строгим правилам, по образцу Евклида, чтоб даже и строгий судья не мог мне сделать упрека в его неполноценности. Однако, я совершенно не порицаю Евклида за то, что он не дал доказательства: напротив, я не имел бы ничего против того, чтобы он ввел еще большее число недоказанных постулатов, например, если бы он (вместе с Архимедом) постулировал, что прямая линия короче всех линий, проходящих между теми же концами; ему бы тогда не пришлось излагать 19 предложений, раньше чем доказать, что две стороны треугольника, вместе взятые, больше третьей, и многое другое, что само по себе очевидно».

Существенная заслуга Валлиса заключается в том, что он четко формулирует то допущение, которое в его рассуждении заменяет постулат о параллельных линиях. В отличие от многих других авторов, которые делают то или иное допущение молчаливо, скрывая это от себя и от читателя, Валлис высказывает убеждение, что без специального постулата учение о параллельных линиях обойтись не может. Валлис обнаружил, что допущение существования подобных фигур эквивалентно постулату Евклида; в этом — значение его рассуждений. Саккери, анализируя доказательство Валлиса, уточнил этот результат; он показал, что достаточно принять существование двух подобных неравных треугольников, т. е. одной пары треугольников, которые имеют соответственно равные углы, но неравные стороны, чтобы доказать евклидов постулат.

8. Доказательства, основанные на другом определении параллельных линий. К первой, наиболее важной категории Буняковский относит также те доказательства, которые основаны на другом определении параллельных линий (отличном от евклидова). Число таких доказательств значительно больше, чем это считал Буняковский; некоторые из них даже приняты в учебниках нашего времени. В основном существуют три

попытки дать определение параллельных линий, отличное от того, которое дано в «Началах» (определение 23) и которое нужно считать установившимся. Первое из них связывают с Посидонием, греческим философом школы стоиков и геометром, деятельность которого падает на середину I столетия до н. э. По свидетельству Прокла Посидоний определяет параллельные линии следующим образом: «Параллельными называются такие прямые, которые, находясь в одной плоскости, не сближаются и не удаляются одна от другой, так что все перпендикуляры, проведенные из точек одной из них к другой, равны между собой». Аналогичное определение, по свидетельству Анариция, было дано Симплицием и Аганисом¹⁾. Аганису Анариций приписывает также доказательство постулата, основанное на этом определении. Но самое определение явно предполагает, что геометрическое место точек, отстоящих от данной прямой на одно и то же расстояние (по одну сторону ее), есть прямая линия. Между тем эта теорема доказывается при помощи V постулата. Как мы увидим ниже, достаточно допустить, что на плоскости по одну сторону какой-либо прямой существуют три точки, одинаково от нее отстоящие и, в свою очередь, расположенные на одной прямой, чтобы отсюда уже вытекал постулат о параллельных линиях. Таким образом, самое определение впадает в ложный круг в том смысле, что оно уже предполагает V постулат. Между тем это определение параллельных линий в новое время принимают комментаторы Евклида: Клавий (Chr. Clavius, 1574 г.), Борелли (G. Borelli, 1658 г.) и другие; оно вошло в некоторые современные учебники геометрии, но особенным распространением пользовалось в XVII и XVIII столетиях.

Другое определение параллельных линий, отличное от евклидова, заключается в том, что параллельные прямые определяются как такие, которые встречаются в бесконечно удаленной точке. Первым, кто стоял на этой точке зрения, был Кеплер (1604 г.). Гаусс [70] в письме к Шумахеру от 12 июля 1831 г. говорит: «Человек не может претендовать на то, чтобы рассматривать бесконечное, как нечто, доступное его восприятию обыкновенными средствами наблюдения». По почину Дезарга (G. Desargues [71]), пучку параллельных прямых на плоскости присваивается общая бесконечно удаленная точка; но, чтобы это чисто условно устанавливаемое понятие не приводило к противоречию, должны быть четко сформулированы требования (постулаты), к нему предъявляемые, и обычно они уже предполагают евклидову теорию параллельных линий. Это делается в интересах проективной геометрии, которая, однако, в настоящее время строится на базе своей собственной аксиоматики и вовсе не отличает бесконечно удаленных точек от обыкновенных. Во всяком случае, геометрии, которая строится в «Началах», это понятие совершенно чуждо.

Наконец, третье определение параллельных линий, отличное от обычного, заключается в том, что параллельными называются линии, расположенные в одной плоскости и имеющие одно и то же направление. При анализе того, что разумеют авторы, исходящие из такого определения параллельных, под прямыми одного и того же направления, оказывается, что под этим

¹⁾ Относительно философа Аганиса (которого называет только Анариций) до настоящего времени не выяснено, кого Анариций под этим именем разумеет; некоторые авторы считают, что это — Гемин Родосский.

подразумеваются прямые, образующие с секущей одинаковые углы наклонения (соответственные углы). Но «если так, — замечает Гаусс ¹⁾, — то где гарантия того, что прямые, образующие равные углы наклонения с одной секущей, образуют также равные углы с другой секущей?» Допущение это эквивалентно постулату о параллельных линиях.

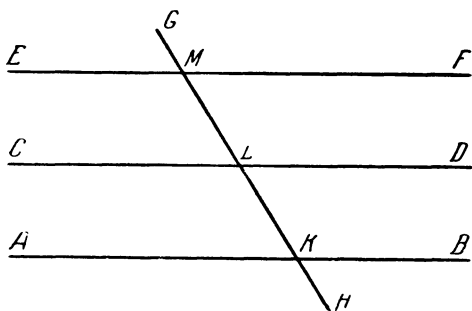
9. Доказательство Л. Бертрана. Мы видим, что доказательства Прокла, Насир-Эддина и Валлиса принадлежат к первой (основной) категории классификации Буяковского. Нужно сказать, что эта категория наиболее обильная; мы привели только те доказательства, которые получили существенное значение в деле развития этого вопроса.

Ко второй категории ²⁾ отнесены те доказательства, которые оперируют бесконечно-большими и бесконечно-малыми величинами.

Известно, что XVIII век был эпохой упадка точности инфинитезимального метода. Это было время, когда блестящие успехи исчисления бесконечно-малых привели к широкому его применению, часто выполнявшемуся без того контроля, который гарантирует правильность выводов. Условия, при которых бесконечно-малые и бесконечно-большие величины становятся точными математическими понятиями, еще не были ни выявлены, ни установлены; вследствие этого применение их нередко приводило к выводам, иногда необоснованным, иногда вовсе неправильным. Эта печать эпохи, естественно, отразилась и на исследованиях, относившихся к теории параллельных линий. Появились доказательства постулата при помощи бесконечно-малых и бесконечно-больших величин и, конечно, в таком их применении, которое не соответствовало требованиям точного анализа.

Наиболее остроумное из этого рода доказательств относится к концу XVIII века и принадлежит швейцарскому математику Луи Бертрану (L. Bertrand, 1731—1812 г.). В 1778 г. им было выпущено двухтомное сочинение «Новое построение элементарной части математики», представлявшее собой попытку обоснованного построения алгебры и геометрии [72a]. Второй том этого сочинения посвящен геометрии. В 1812 г. этот том

был выпущен отдельным изданием в значительно сокращенном и переработанном виде [72b]. В обоих изданиях этого сочинения помещено одно и то же доказательство V постулата, основанное на применении бесконечно-больших величин; мы воспроизводим его в точном переводе.



Черт. 41.

«Теорема VII. Если две прямые AB , CD (черт. 41), проведенные в одной плоскости, образуют с третьей прямой HG внутренние углы BKL , DLK , составляющие вместе два прямых, то часть плоскости, которую они ограничивают, столь мала по отношению ко всей плоскости, что содержится в ней бесконечное число раз.

¹⁾ [70], стр. 171.

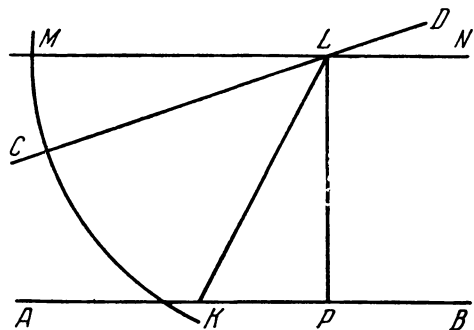
²⁾ Буяковский располагает эти категории в несколько ином порядке.

Так как, по предположению, сумма углов BKL , DLK равна двум прямым углам и смежные углы DLK , DLM также составляют два прямых, то углы BKL и DLM равны. Если поэтому отложим отрезок $LM = KL$ и через точку M проведем прямую MF в таком направлении, чтобы $FML = DLK$, а затем передвинем полосу $ACDB$ вдоль HG , пока точка K не достигнет L , то точка L при этом упадет в M , а полоса $ACDB$ совпадет с полосой $CEFD$, ввиду того, что равные углы совместятся, как и равные отрезки.

Но теперь, раз оказалось возможным, взяв на прямой HG длину LM , равную KL , построить на плоскости $ABCD$ полосу $CEFD$, равную $ACDB$, то нет никакого сомнения и в том, что посредством бесконечного множества отрезков, равных KL и [последовательно] взятых на HG , можно на этой же плоскости построить бесконечное множество полос, равных $ACDB$. Следовательно, если две проведенные на плоскости прямые образуют с третьей внутренние углы, составляющие два прямых угла, то часть плоскости, которую они ограничивают, столь мала по отношению ко всей плоскости, что содержится в ней бесконечное число раз.

Теорема VIII. Когда две прямые образуют с третьей внутренние углы, сумма которых не равна двум прямым углам, эти прямые пересекаются по ту сторону, где эта сумма меньше двух прямых.

Положим, что две прямые LC и KA (черт. 42) образуют с третьей KL внутренние углы AKL и CLK , составляющие в сумме меньше

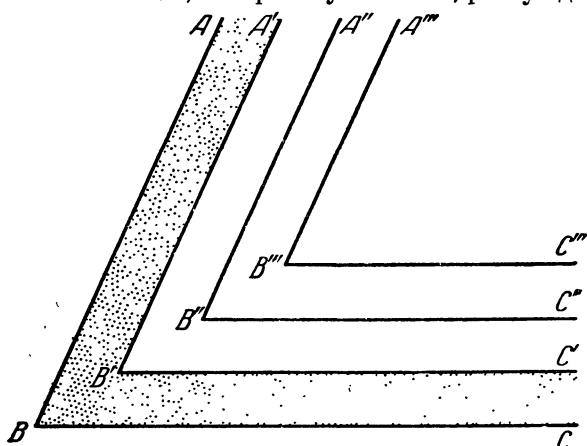


Черт. 42.

чем два прямых угла; тогда существует некоторая прямая LM , образующая с LC такой угол CLM , что $AKL + KLC + CLM = AKL + KLM =$ двум прямым. Следовательно, если бы прямая LC не пересекала KA , угол MLC был бы заключен целиком внутри полосы $MLKA$. Но эта полоса содержится в плоскости бесконечное число раз, между тем как угол MLC содержится в ней лишь столько раз, сколько дуга MC содержится в окружности, описанной из центра L радиусом LM . Стало быть, угол MLC не заключен целиком внутри полосы $MLKA$; поэтому его сторона LC выходит из этой полосы и пересекает KA ».

Слабая сторона этого рассуждения, лишаящая его доказательной силы, заключается в том, что ни вся плоскость, ни часть ее, содержащаяся между сторонами угла, не могут быть рассматриваемы как определенные

величины, допускающие точное количественное сравнение. В евклидовой плоскости каждый угол может быть последовательно бесчисленное множество раз помещен внутри самого себя (черт. 43); обозначая через ω часть плоскости, содержащуюся между сторонами последовательных углов ABC и $A'B'C'$, а через ω угол ABC , рассуждая как Бертран, легко было бы



Черт. 43.

притти к нелепому равенству $\omega = \omega + n\omega$, где n — какое угодно целое число.

При всем том, наглядная образность соображений Бертрана встретила признание у многих серьезных математиков того времени. Крелль еще в 1835 г. поместил в своем журнале модификацию этого доказательства [73]. Вообще, доказательства этого рода вносили немало путаницы в учение о параллельных линиях.

10. Попытки доказательств постулата, относящиеся к третьей и четвертой категориям. К третьей категории Буняковский относит доказательства, основанные на так называемом принципе однородности. Этот принцип заключается в том, что отрезок никогда не может определяться углами. Так, например, в треугольнике сторона c не может быть функцией его углов, т. е. не может иметь место равенство вида:

$$c = \varphi(A, B, C).$$

Это мотивируется тем, что при изменении единицы меры длины левая часть этого равенства приобрела бы множитель, отличный от единицы, между тем как числа, выражающие углы, не изменились бы. Этим принципом пользуется главным образом Лежандр; основанное на нем доказательство Лежандра изложено в следующем параграфе (рубр. 7, стр. 141—142).

Наконец, к четвертой категории Буняковский относит те попытки доказательства постулата, которые основываются на соображениях, заимствованных из физики и механики. Однако геометрии они совершенно чужды. Соображениями механического или физического свойства могут подтверждаться те допущения, те постулаты, которые мы в геометрии принимаем; но раз эти постулаты приняты, посторонним соображениям здесь уже нет места. Если подходить с точки зрения примитивной наглядной очевидности, то постулат о параллельных линиях не нуждается в большем подтверждении, чем другие аксиомы и постулаты; глаз не отказывает ему в признании. Между тем, задача заключается в том, чтобы логически вывести постулат из других постулатов или аксиом, а вовсе не в том, чтобы сделать его более очевидным.

Вот одно из таких доказательств, которое приводит Буняковский. Представим себе бесконечно протяженную прямую, разделенную на отрезки равной длины. В точках деления представим себе приложенными равные и параллельные силы. Под действием этих сил прямая сместится так, что все точки деления опишут равные и параллельные пути, каждый отрезок

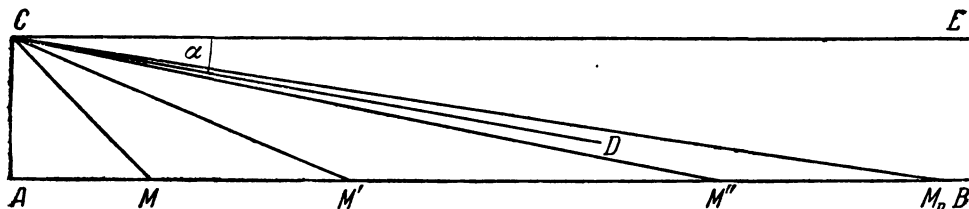
зок в исходном и конечном своем положении вместе с прямолинейными путями, которые описаны его концами, составит евклидов параллелограм, самое существование которого подтверждает постулат о параллельных линиях. Это рассуждение есть, конечно, не что иное, как попытка подтвердить постулат о параллельных линиях экспериментальными средствами; попытка эта, однако, отнюдь не удачная. Как можно конкретно осуществить бесконечное множество равных и параллельных сил, приложенных в точках прямой, расположенных одна от другой на равных расстояниях? Автор доказательства понимает справедливость такого возражения и пытается его парировать простым замечанием: пусть это будут, например, силы тяжести. Но силы тяжести — это силы притяжения земли; если они действуют на одинаковые массы, то они могут считаться равными и параллельными только в том случае, если эти массы очень незначительно удалены одна от другой и то, конечно, приближенно.

Работа Буняковского приводит к выводу, что ни одно из доказательств постулата о параллельных линиях, известных Буняковскому, не может быть признано правильным.

Особый интерес представляют соображения, относящиеся к связи между теоремой о сумме внутренних углов треугольника и постулатом о параллельных линиях. Мы на этом вопросе теперь подробно остановимся.

§ 15. ПОСТУЛАТ О ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ЛИНИЯХ И УЧЕНИЕ О СУММЕ УГЛОВ ТРЕУГОЛЬНИКА

1. Сумма внутренних углов треугольника и постулат о параллельных линиях. Мы уже видели выше (§ 14, рубр. 6, стр. 123), что теорема о сумме углов треугольника эквивалентна V постулату в том смысле, что она доказывается Евклидом на основе этого постулата; принимая же, что сумма



Черт. 44.

углов треугольника равна $2d$, мы можем отсюда вывести, как следствие, предложение, содержащееся в V постулате. Как говорилось выше, это было показано в рассуждении Насир-Эддина. Ввиду важности этого результата, приведем еще другое доказательство того же утверждения, принадлежащее Лежандру ([¹⁸], издания 8-е и 14-е). П р и н и м а я, что сумма углов в треугольнике равна $2d$, д о к а ж е м, что отсюда вытекает предложение, содержащееся в V постулате; постулат возьмем в форме Туси-Лежандра (стр. 116).

Допустим, что сумма углов во всяком треугольнике равна $2d$; докажем, что две прямые, расположенные в одной плоскости, одна из которых перпендикулярна к секущей, а другая образует с нею острый угол, встречаются со стороны этого острого угла.

Положим, что прямая AB перпендикулярна к секущей AC , прямая же CD , расположенная в плоскости ACB , образует с AC острый угол ACD (черт. 44). Через точку C проведем в той же плоскости

перпендикуляр CE к секущей AC и угол DCE обозначим через α . Если на AB отложим отрезок $AM=AC$, то при сделанном допущении относительно суммы углов треугольника угол ACM равнобедренного треугольника ACM равен $\frac{1}{2}d$; угол MCE также равен $\frac{1}{2}d$. Если в ту же сторону отложим отрезок $MM'=CM$, то в силу того же допущения угол MCM' равен $\frac{1}{4}d$ и то же значение имеет угол $M'CE$. Повторяя то же построение, будем получать точки $M, M', M'', M''', \dots$, причем углы $MCE, M'CE, M''CE, \dots$ составят убывающую геометрическую прогрессию (со знаменателем $\frac{1}{2}$); при достаточно большом n угол M_nCE станет меньше α ; значит, луч CM_n пройдет между лучами CD и CE , т. е. луч CD войдет внутрь угла и треугольника ACM_n ; в силу постулата Туси-Паша (стр. 123), он неизбежно пересечет сторону AM_n , т. е. пересечет перпендикуляр AB .

Это доказательство принадлежит Лежандру.

2. Установки Лежандра. XIX век начинается весьма замечательными исследованиями Лежандра (1752—1833 г.) по теории параллельных линий. В 1794 г. Лежандр выпустил в свет «Начала геометрии» [¹⁸] — учебное руководство по элементарной геометрии, получившее весьма широкое распространение. Мы о нем подробнее говорили выше (стр. 107—110).

Повидимому, составление этих «Начал» привело Лежандра к систематическому размышлению над теорией параллельных линий. Лежандр в первых восьми изданиях своей книги не вводит вовсе постулата о параллельных линиях, а дает вместо этого его доказательство. Это доказательство меняется от издания к изданию, так как автор обнаруживает в своих рассуждениях недочеты, лишаящие их доказательной силы.

Однако в 9-м издании, вышедшем в 1812 г., Лежандр, как указано выше (стр. 115), в тексте книги занимает более осторожную позицию; он, по существу, становится на точку зрения Евклида и удерживает ее вплоть до 11-го издания (1817 г.). В предисловии к этому изданию Лежандр говорит:

«Следуя указанию некоторых выдающихся преподавателей, автор решился в этом одиннадцатом издании восстановить теорию параллельных линий почти на той же базе, как у Евклида. Она благодаря этому становится более доступной для учащихся; и это тем более важно, что возражения, которым еще подвергается теория параллельных линий, не могут быть целиком устранены без пособия таких аналитических соображений, какие изложены во второй ноте».

Эти соображения, основанные на так называемом «принципе однородности», изложены нами ниже (рубр. 7, стр. 141—142). Но в следующем же, 12-м издании 1823 г. Лежандр вновь пытается уточнить одно из прежних доказательств, и эта новая модификация доказательства сохраняется в 13-м и 14-м изданиях, вышедших еще при жизни автора.

В 1833 г. Лежандр изложил все свои соображения по теории параллельных линий в обширной статье, помещенной в «Мемуарах Парижской академии» [¹⁹]. Мы передадим содержание исследований Лежандра именно в той концепции, которая нашла себе место в этом заключительном мемуаре. Но необходимо иметь в виду, что все эти соображения Лежандра были уже известны раньше, во всяком случае с 1823 г., т. е. после появления 12-го издания его «Начал».

Мемуар Лежандра озаглавлен очень осторожно: «Размышления по теории параллельных линий». Все рассуждения Лежандра распадаются

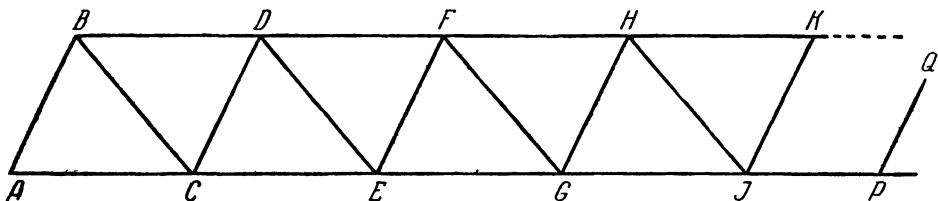
на две серии, соответственно двум различным замыслам, двум исходным пунктам рассуждения. Первый замысел носит геометрический характер и связывает учение о параллельных линиях с вопросом о сумме углов прямолинейного треугольника; второй носит аналитический характер, — он основан на так называемом принципе однородности.

Как обнаружил уже Насир-Эддин, предложение, что сумма углов прямолинейного треугольника равна двум прямым, ведет к точному доказательству постулата о параллельных линиях. Подчеркивая это, Лежандр ставит себе целью доказать, не пользуясь постулатом о параллельных, что сумма углов треугольника равна двум прямым. Это и составляет первый замысел Лежандра.

3. Первая основная теорема Лежандра. Самое доказательство Лежандра разбивается на две части: сначала он доказывает, что сумма углов треугольника не может превысить двух прямых, а затем старается доказать, что сумма углов треугольника не может быть и меньше двух прямых. Первое предложение доказано безукоризненно; все же попытки доказать второе предложение содержат ту или иную погрешность. Лежандр дает два различных чрезвычайно остроумных доказательства первого предложения, из которых одно помещено в 3-м издании его «Начал» (1800 г.), а другое — в 12-м издании (1823 г.). Мы приведем оба эти доказательства в переводе; второе из них помещено ниже (рубр. 5, стр. 136—138); здесь же приводим первое доказательство.

«Лемма. Сумма трех углов треугольника не может быть больше двух прямых углов.

Пусть, если возможно, ABC будет треугольник (черт. 45), в котором сумма трех углов больше двух прямых.



Черт. 45.

На продолжении прямой AC возьмем $CE = AC$; построим угол $ECD = CAB$ и сторону $CD = AB$; соединим DE и BD . Треугольник CDE будет равен треугольнику ABC , так как они имеют одинаковый угол, содержащийся между соответственно равными сторонами; следовательно, угол $CED = ACB$, угол $CDE = ABC$ и третья сторона ED равна третьей стороне BC . Так как ACE есть прямая линия, то сумма углов ACB , BCD , DCE равна двум прямым углам. Однако мы предположили, что сумма углов треугольника ABC больше двух прямых; поэтому $CAB + ABC + ACB > ACB + BCD + ECD$; отнимая от обеих частей общее слагаемое ACB и равные слагаемые $CAB = ECD$, получим $ABC > BCD$, а так как стороны AB , BC треугольника ABC соответственно равны сторонам CD , CB треугольника BCD , то отсюда следует, что третья сторона AC больше третьей стороны BD .

Представим себе теперь, что прямая AC неограниченно продолжена и последовательно построены равные и подобным же образом расположенные треугольники ABC , CDE , EFG , GHI и т. д. Если соединим соседние вершины прямыми BD , DF , FH , HK и т. д., то вместе

с тем образуется ряд промежуточных треугольников BCD , DEF , FGH и т. д., которые все будут равны между собой, так как все они будут иметь по равному углу, содержащемуся между соответственно равными сторонами. Следовательно, $BD = DF = FH = HK = \dots$; имея это в виду и принимая во внимание, что $AC > BD$, положим разность $AC - BD = D$. Ясно, что в таком случае $2D$ будет разность между прямой ACE , равной $2AC$, и прямой или ломаной линией BDF , равной $2BD$; таким образом, $AE - BF = 2D$. Таким же образом найдем, что $AG - BH = 3D$, $AI - BK = 4D$ и т. д.

Но как бы мала ни была разность D , если мы ее повторим достаточное число раз, она превзойдет любую наперед заданную величину. Можно, следовательно, предположить, что ряд треугольников продолжен настолько далеко, что разность $AP - BQ$ будет больше $2AB$; мы будем, таким образом, иметь $AP > BQ + 2AB$. С другой стороны, прямая AP короче ломаной $ABQP$; так что $AP < AB + BQ + QP$ или $AP < BQ + 2AB$. Таким образом, гипотеза, из которой мы исходили, привела нас к противоречию. Следовательно, сумма углов треугольника не может превосходить двух прямых.

Весьма замечательно, что через 28 лет после того, как это доказательство было опубликовано Лежандром (1800 г.), Гаусс нашел то же самое доказательство. На титульном листе принадлежавшего Гауссу экземпляра «Начал» Евклида, сохранилась запись того же доказательства с надписью: «Найдено 18 ноября 1828 года»; доказательство Лежандра, помещенное в несколько упрощенном виде¹⁾ в элементарном учебнике, от Гаусса, очевидно, ускользнуло.

Изложенное доказательство совершенно безукоризненно. Предложение, которое Лежандр называет леммой, представляет собой теорему абсолютной геометрии и имеет основное значение; его обыкновенно называют, как мы увидим, не совсем справедливо, первой основной теоремой Лежандра. Основываясь на этой теореме, Лежандр пытается доказать, что сумма углов треугольника равна $2d$, а вместе с тем доказать V постулат Евклида.

4. Первая попытка Лежандра доказать постулат о параллельных линиях. Чтобы доказать, что сумма углов треугольника равна $2d$, Лежандру оставалось обнаружить, что она не может быть меньше $2d$. Лежандр в том же третьем издании своих «Начал» выполняет это следующим образом.

«Теорема. В каждом треугольнике сумма трех углов равна двум прямым.

Доказав, что сумма трех углов не может превышать двух прямых, остается обнаружить, что она не может быть меньше двух прямых.

Пусть ABC будет данный треугольник (черт. 46) и пусть, если это возможно, сумма его углов равна $2P - Z$ ²⁾, где P означает прямой угол, а Z — какую-нибудь величину, на которую сумма углов, согласно предположению, меньше двух прямых углов.

Пусть A будет наименьший из углов треугольника ABC . При противоположной стороне BC построим угол $BCD = ABC$ и угол $CBD = ACB$; треугольники BCD и ABC будут равны, так как они

¹⁾ Изложение Лежандра, очевидно, имеет в виду учеников, для которых предназначены его «Начала».

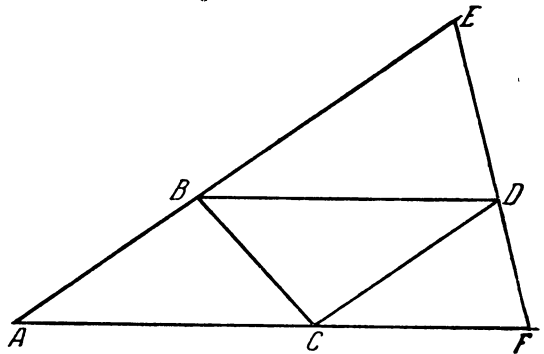
²⁾ Сохраняем и обозначение Лежандра для прямого угла через P .

имеют общую сторону BC , к которой прилежат соответственно равные углы ¹⁾).

Через точку D проведем какую угодно прямую EF , но таким образом, чтобы она встречала продолжения сторон угла A в точках E и F . Так как сумма углов в каждом из треугольников ABC и BCD составляет $2P - Z$, а в каждом из треугольников EBD и DCF она не может превзойти $2P$, то сумма всех углов четырех треугольников ABC , BCD , EBD , DCF не превосходит $4P - 2Z + 4P$, т. е. $8P - 2Z$.

Если из этой суммы вычтем сумму углов при точках B , C , D , которая составляет $6P$ (так как сумма углов, образовавшаяся при каждой из точек, есть $2P$), то остаток будет равен сумме углов треугольника AEF , которая, таким образом, не превзойдет $8P - 2Z - 6P$, т. е. $2P - 2Z$.

Итак, в то время как сумма углов треугольника ABC меньше двух прямых на Z , эта сумма в треугольнике AEF меньше двух прямых на $2Z$. При посредстве треугольника AEF



Черт. 46.

можно таким же образом построить третий треугольник, сумма углов которого будет меньше $2P - 4Z$; затем мы построим четвертый треугольник, сумма углов которого отличается от $2P$ больше чем на $8Z$; это можно продолжать неограниченно.

Однако, сколь бы мало ни было Z по сравнению с прямым углом, последовательность Z , $2Z$, $4Z$, $8Z$ и т. д., члены которой постоянно удваиваются, рано или поздно приведет к члену, равному $2P$ или большему $2P$. Мы придем тогда к треугольнику, к сумме углов которого нужно будет прибавить $2P$ или больше $2P$, чтобы в результате все-таки получить $2P$. Это — вывод, очевидно, абсурдный. Следовательно, гипотеза, от которой мы исходили, не может иметь места; значит, невозможно, чтобы сумма углов треугольника ABC была меньше двух прямых. А так как сумма углов треугольника в силу предыдущего предложения не может превышать также $2P$, то она равна $2P$.

Это рассуждение, которому нельзя отказать в исключительном остроумии, все же страдает существенным недостатком, лишаящим его доказательной силы. Оно предполагает, что через точку D , расположенную внутри угла, всегда можно провести прямую EF , пересекающую обе стороны угла; это есть допущение, как увидим ниже, эквивалентное постулату Евклида. И Лежандр, очевидно, сознавал, что в этом есть дефект. Это видно из следующего подстрочного примечания, помещенного в том же 3-м издании:

¹⁾ На $\angle B$ можно смотреть как на треугольник ABC , который в опрокинутом виде приложен к стороне BC . При этом сторона BD пойдет внутри угла CBE , потому что угол $\angle DEC = \angle C$ меньше угла $\angle CBE$ (внутренний угол треугольника меньше внешнего, с ним не смежного); по той же причине сторона DC будет расположена внутри угла BCF . Вершина D будет, таким образом, лежать внутри угла EAF по другую сторону BC относительно A .

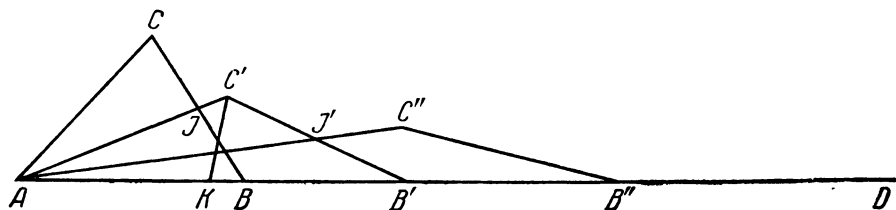
«Мы предположили, что A есть самый меньший из углов ABC и, следовательно, не превышает двух третей прямого угла; этим мы имели в виду сделать более ощутимым, что прямая, проведенная через точку D , может одновременно встретить продолжения сторон AB и AC ».

Совершенно ясно, что эта деталь ничего не изменяет. Лежандр все же сохранил это доказательство с 3-го по 8-е издание. Как уже сказано, в изданиях с 9-го по 11-е Лежандр возвратился к схеме Евклида; но в изданиях с 12-го по 14-е появляется другая модификация того же самого доказательства. Перевод этого доказательства приводим в следующей рубрике.

5. Вторая попытка Лежандра доказать постулат о параллельных линиях. Приводим текст Лежандра.

«Теорема. Во всяком треугольнике сумма трех углов равна двум прямым.

Пусть ABC будет данный треугольник (черт. 47), в котором будем считать AB самой большой и BC самой малой стороной, так что ACB



Черт. 47.

есть наибольший, а BAC — наименьший угол треугольника. Через точку A и через середину I противолежащей стороны BC проведем прямую AI ; тогда $AI < AB$, потому что $\angle ABI < \angle ACB < \angle AIB$. Теперь продолжим AI до точки C' таким образом, чтобы $AC' = AB$; далее, продолжим AB до B' таким образом, чтобы AB' превышало вдвое AI .

Если через A , B , C обозначим три угла треугольника ABC и таким же образом через A' , B' , C' обозначим три угла треугольника $AB'C'$, то я утверждаю, что $C' = B + C$ и $A = A' + B'$; отсюда следует, что $A + B + C = A' + B' + C'$, т. е. что сумма трех углов в обоих треугольниках одна и та же.

Чтобы это доказать, отложим $AK = AI$ и соединим точки C' и K ; получим треугольник $C'AK$, равный треугольнику BAI , ибо в этих двух треугольниках общий угол A' содержится между соответственно равными сторонами; именно: $AC' = AB$ и $AK = AI$; поэтому третья сторона $C'K$ равна третьей стороне BI , угол $AC'K = ABI = ABC$ и угол $AKC' = AIB$.

Теперь утверждаю, что треугольник $B'C'K$ равен треугольнику ACI , ибо сумма двух смежных углов AKC' и $C'KB'$ равна двум прямым углам, так же, как и сумма двух углов $AIC + AIB$; вычитая из обеих сумм равные углы AKC' и AIB , найдем, что угол $C'KB' = AIC$. Эти равные углы заключены в двух треугольниках между соответственно равными сторонами, именно: $C'K = IB = CI$ и $KB' = AK = AI$, ибо мы предположили $AB' = 2AI = 2AK$. Следовательно,

два треугольника $B'C'K$ и ACI равны; поэтому сторона $B'C' = AC$, угол $B'C'K = ACB$ и угол $KB'C' = CAI$.

Отсюда следует:

1) что угол $AC'B'$, обозначенный через C' , состоит из двух углов, равных углам B и C треугольника ABC , так что $C' = B + C$;

2) что угол A треугольника ABC состоит из угла A' или $C'AB'$, принадлежащего треугольнику $AB'C'$, и из угла CAI , равного углу B' того же треугольника; таким образом, $A = A' + B'$; следовательно, $A + B + C = A' + B' + C'$.

С другой стороны, так как по предположению $AC < AB$ и, следовательно, $C'B' < AC'$, то в треугольнике $AC'B'$ угол при вершине A , обозначенный через A' , меньше угла B' ; а так как сумма этих двух углов равна углу A данного треугольника, то отсюда следует, что угол A' меньше $\frac{1}{2}A$.

Если применим то же построение к треугольнику $AB'C'$, то получим третий треугольник $AB''C''$, углы которого обозначим через A'', B'', C'' ; мы будем тогда иметь аналогичное равенство $C'' = C' + B'$, $A' = A'' + B''$, откуда следует, что $A' + B' + C' = A'' + B'' + C''$. Таким образом, сумма трех углов в обоих треугольниках одна и та же, но вместе с тем угол $A'' < \frac{1}{2}A'$ и, следовательно, $A'' < \frac{1}{4}A$.

Продолжая неопределенно ряд треугольников $AC'B'$, $AC''B''$ и т. д., мы придем к треугольнику abc , в котором сумма трех углов будет та же, что в данном треугольнике ABC , но в котором угол a станет меньше любого данного члена убывающей прогрессии

$$\frac{1}{2}A, \frac{1}{4}A, \frac{1}{8}A, \dots$$

До сих пор рассуждения совершенно безукоризненны и содержат новое доказательство того, что сумма внутренних углов прямолинейного треугольника не может превышать двух прямых. В самом деле, предположим, что в треугольнике ABC сумма углов равна (придерживаясь обозначений Лежандра) $2D + \alpha$ ¹⁾. В приведенной выше убывающей геометрической прогрессии найдется член, меньший α ; поэтому, продолжив достаточное число раз построение последовательных треугольников, придем к треугольнику abc , в котором угол $a < \alpha$. Но так как сумма углов треугольника abc осталась та же, что и в треугольнике ABC , т. е. равна $2D + \alpha$, то сумма двух углов $b + c$ должна оказаться больше, чем $2D$; но это не может иметь места, так как каждый из них меньше угла, смежного со вторым из этих двух углов. Это рассуждение сыграло в литературе вопроса о сумме углов треугольника существенную роль. Некоторой модификацией этого доказательства пользуется также Лобачевский²⁾. Лежандр идет, однако, дальше и пытается при помощи того же построения доказать, что сумма углов треугольника равна двум прямым.

Приводим заключительную часть его рассуждения:

«Можно, следовательно, предположить, что этот ряд треугольников продолжен до тех пор, пока угол a не станет меньше любого заданного угла.

¹⁾ В этом издании Лежандр обозначает прямой угол через D .

²⁾ «Геометрические исследования» [68], предложение 19.

И если с помощью треугольника abc построим следующий треугольник $a'b'c'$ (черт. 48), то сумма $a' + b'$ углов этого последнего будет равна углу a и, следовательно, будет меньше любого данного угла; отсюда видно, что сумма трех углов треугольника $a'b'c'$ сводится к одному только углу c' .

Чтобы иметь точную меру этой суммы, продолжим сторону $a'c'$ в направлении к d' и обозначим через x' внешний угол $b'c'd'$; если прибавим этот угол к углу треугольника $a'c'b'$, то получим в сумме два прямых угла. Обозначая поэтому прямой угол через D , получим $c' = 2D - x'$; следовательно, сумма углов треугольника $a'b'c'$ будет $2D + a' + b' - x'$.



Черт. 48.

Но легко понять, что стороны и углы треугольника $a'b'c'$ при том же построении меняются таким образом, что мы последовательно приходим к треугольникам, в которых углы a' и b' приближаются к своим пределам, т. е. к нулю. В этом предельном положении ломаная $a'b'c'$ сливается с $a'b'$; три точки a' , c' , b' , в конце концов, располагаются в точности по прямой линии; тогда углы b' и x' обращаются в нуль вместе с углом a' и количество $2D + a' + b' - x'$, выражающее сумму трех углов треугольника $a'c'b'$, сводится к $2D$ и, следовательно, сумма углов треугольника равняется двум прямым.

Это рассуждение обнаруживает, что даже такой геометр, как Лежандр, не был достаточно осторожен в применении метода бесконечно-малых. Когда он говорит, что углы a' и b' становятся менее любого данного угла, то получается впечатление, что наступит момент, когда эти углы станут меньше всякого угла, как бы мал он ни был; это, конечно, лишено смысла. В действительности же доказано лишь то, что углы a' и b' стремятся к нулю; что касается того, что ломаная $a'c'b'$ стремится слиться с прямой $a'b'$ и что угол x' стремится к нулю, — это остается совершенно необоснованным, и рассуждение лишено доказательной силы. Это было указано Штейном (J. Stein) в «Анналах Жергона» в 1824 г. [76]. Еще более тщательно это рассуждение разобрано Н. И. Лобачевским во вступлении к «Новым началам геометрии» (см. [63], т. II, стр. 150 и сл.).

6. Вторая основная теорема Лежандра. Таким образом, все эти рассуждения Лежандра действительно устанавливают только, что сумма углов треугольника не может превысить двух прямых. К этому предложению Лежандр в примечаниях и в упомянутой выше статье, помещенной в «Мемуарах Парижской академии», присоединяет еще один важный факт: он обнаруживает, что сумма углов равна $2d$ во всяком треугольнике, если она равна $2d$ хотя бы в одном треугольнике, и, следовательно, она меньше $2d$ во всяком треугольнике, если существует хотя бы один треугольник, в котором сумма углов меньше $2d$.

Доказательство изложено Лежандром слишком кратко; мы здесь изложим его подробнее. Поскольку сумма углов треугольника не может превысить $2d$, разность $2d - S$ между $2d$ и суммой внутренних углов треугольника S либо равна нулю, либо имеет положительное значение. Эту

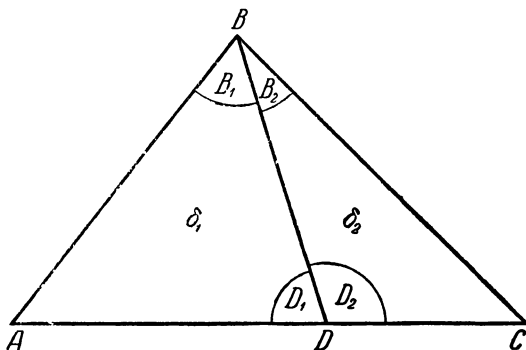
разность называют **угловым дефектом** треугольника; мы будем его обозначать через δ .

Лемма 1. Если треугольник разбит трансверсалью (прямой, проходящей через вершину) на два треугольника, то сумма угловых дефектов составляющих треугольников равна угловому дефекту всего треугольника.

В самом деле, положим, что треугольник ABC (черт. 49) с угловым дефектом δ разбит трансверсалью BD на треугольники ABD и CBD с дефектами δ_1 и δ_2 . Обозначая углы, как они размечены на чертеже, имеем:

$$\delta_1 = 2d - A - B_1 - D_1,$$

$$\delta_2 = 2d - C - B_2 - D_2.$$



Черт. 49.

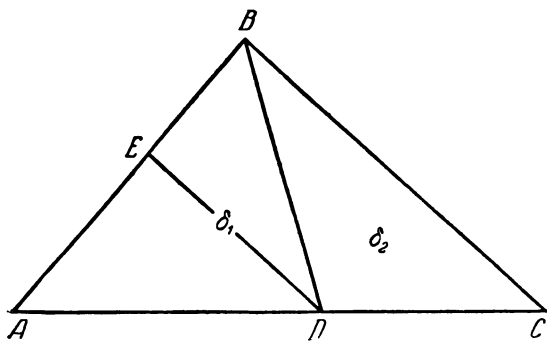
Вместе с тем

$$\delta_1 + \delta_2 = 4d - A - C - B_1 - B_2 - D_1 - D_2 = 4d - (A + B + C) - (D_1 + D_2).$$

А так как $D_1 + D_2 = 2d$, то правая часть равенства выражает угловой дефект треугольника ABC .

Лемма 2. Если сумма внутренних углов какого-либо треугольника равна $2d$, то и во всяком треугольнике, от него отсеченном, сумма углов равна $2d$.

Рассмотрим сначала тот случай, когда треугольник ABD с дефектом δ_1 отсечен от треугольника ABC с дефектом δ трансверсалью BD (черт. 50). В таком случае $\delta = \delta_1 + \delta_2$, где δ_2 — дефект треугольника BDC . Если сумма углов треугольника ABC равна $2d$, то $\delta = 0$; а так как ни один из дефектов δ_1 и δ_2 не может иметь отрицательного значения, то $\delta_1 = \delta_2 = 0$.



Черт. 50.

Если треугольник AED отсечен от треугольника ABC секущей ED , не проходящей через его вершину, то от треугольника ABD он отсечен трансверсалью; в последнем случае сумма углов равна $2d$;

поэтому, в силу доказанного, ту же сумму углов имеет треугольник AED .

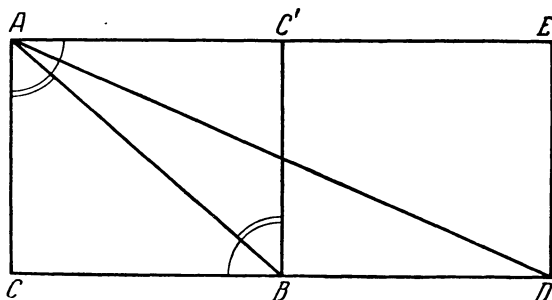
Лемма 3. Обратно, если треугольник ABC разбит на два треугольника ABD и DBC , в каждом из которых сумма внутренних углов равна $2d$, то ту же сумму углов имеет и треугольник ABC .

В самом деле, в этом случае $\delta_1 = \delta_2 = 0$, а потому и $\delta = 0$.

Лемма 4. Если в каком-либо прямоугольном треугольнике сумма внутренних углов равна $2d$, то, удвоив один из его катетов и сохраняя другой, по-

лучим новый прямоугольный треугольник, в котором сумма углов также будет равна $2d$.

Пусть в треугольнике ACB с прямым углом при вершине C (черт. 51) сумма внутренних углов равна $2d$. Продолжим катет CB на расстояние $BD = BC$; соединив точки A и D , получим прямоугольный треугольник ACD , в котором сохранен катет AC и удвоен катет CB . Если в треугольнике ACB сумма углов равна $2d$, т. е. $A + B = d$, то приложив к нему такой же треугольник BAC' так, чтобы вершина B упала в A и, наоборот, вершина A упала в B , получим четырехугольник $ACBC'$, в котором все четыре угла будут прямыми и противоположные стороны равны. Продолжив отрезок AC' на расстояние $C'E = C'A$ и соединив точки D и E , получим четырехугольник $BC'ED$,



Черт. 51.

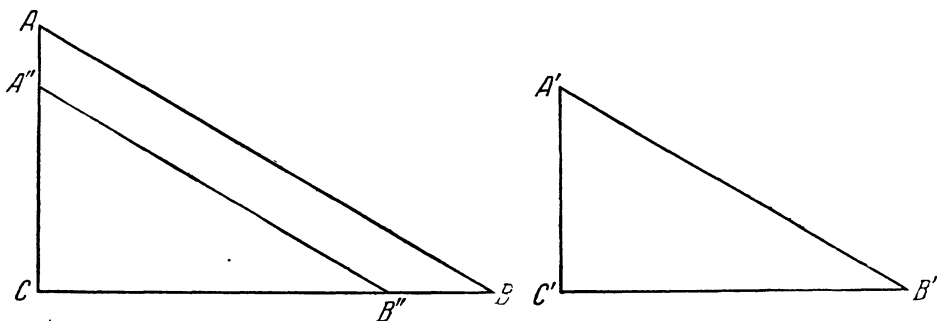
равный четырехугольнику $BC'AC$, так как мы его можем получить, опрокинув четырехугольник $BC'AC$ вокруг стороны BC' . Вместе с тем образуется четырехугольник $ACDE$ с четырьмя прямыми углами (прямоугольник). Диагональ AD разбивает его на два равных прямоугольных треугольника DEA и DCA , в каждом из которых сумма углов равна $2d$.

Лемма 5. Если в одном прямоугольном треугольнике сумма внутренних углов равна $2d$, то она равна $2d$ во всяком другом прямоугольном треугольнике.

Пусть в прямоугольном треугольнике ACB ($\angle C = d$) сумма внутренних углов равна $2d$; пусть $A'C'B'$ — другой прямоугольный треугольник (черт. 52). Если при этом

$$C'A' < CA \text{ и } C'B' < CB, \quad (1)$$

то, отложив на катетах первого треугольника отрезки $CA'' = C'A'$ и $CB'' = C'B'$, получим треугольник $A''CB''$, отсеченный от треугольника



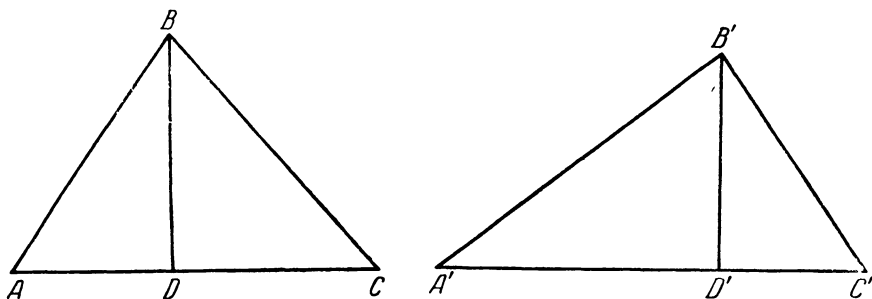
Черт. 52.

ACB и равный треугольнику $A'C'B'$. В силу леммы 2, сумма его внутренних углов будет равна $2d$. Если же неравенства (1) не имеют места, то мы удвоим катет AC , сохраняя CB , как это имеется в виду в предыдущей лемме. Если удвоенный катет все же окажется меньше чем $A'C'$, то мы его вновь удвоим и это повторим до тех пор, пока в

новом прямоугольном треугольнике CA_n не превысит $C'A'$. После этого удвоим катет CB и это повторим столько раз, чтобы катет CB_m стал больше $C'B'$. Теперь будем иметь прямоугольный треугольник A_nCB_m , в котором сумма внутренних углов будет равна $2d$, между тем как $C'A' < CA_n$ и $C'B' < CB_m$. Поэтому в треугольнике $A'C'B'$ сумма углов также равна $2d$.

Теорема (вторая основная теорема Лежандра). Если в одном треугольнике сумма внутренних углов равна $2d$, то она равна $2d$ во всяком другом треугольнике.

Доказательство. Пусть в треугольнике ABC (черт. 53) сумма внутренних углов равна $2d$; пусть $A'B'C'$ будет любой другой треугольник. Обозначения возьмем такие, чтобы A и C , A' и C' были острые углы. Если из точек B и B' опустим перпендикуляры BD и $B'D'$ на про-



Черт. 53.

тивоположные стороны, то точки D и D' будут расположены соответственно внутри сторон AC и $A'C'$. Так как в треугольнике ABC сумма углов равна $2d$, то она равна $2d$ и в каждом из прямоугольных треугольников ABD и CBD (лемма 1); поэтому она будет равна $2d$ и в прямоугольных треугольниках $A'B'D'$ и $B'C'D'$ (лемма 5), а вместе с тем и в треугольнике $A'B'C'$ (лемма 3).

7. Доказательство Лежандра, основанное на принципе однородности. Существенно иная попытка Лежандра доказать, что сумма углов треугольника равна $2d$, основана на так называемом принципе однородности. Вот как излагает это рассуждение Лежандра Герлинг¹⁾ в письме к Гауссу от 11 марта 1846 г. [70].

«Вслед за этим Лежандр, однако, доказывает, что сумма трех углов треугольника должна быть равна $2R$ [т. е. $2d$], еще другим способом, который кажется мне убедительным. Рассуждение это состоит примерно в следующем:

Двумя углами и стороной, к которой эти углы прилегают, треугольник вполне определяется, так что

$$C = \varphi(A, B, c).$$

Если примем прямой угол за единицу, то C, A, B будут числа. Отсюда следует, что c не должно входить в функцию φ , так как в противном случае мы имели бы

$$c = \psi(C, A, B) = \text{числу},$$

¹⁾ Ch. L. Gerling (1788—1864), ученик и друг Гаусса, профессор математики в Марбургском университете.

что нелепо¹⁾. Вследствие этого в прямоугольном треугольнике сумма двух острых углов равна R , откуда все остальное уже вытекает²⁾.

Я это предложение читал у Лежандра еще тогда, когда учился в Геттингене; возвращаясь в последний раз из Геттингена, я очень огорчился, что мне не пришло в голову Вас об этом спросить, когда я имел удовольствие слышать Ваше мнение по [всему] этому вопросу. Теперь, прочитав это вновь, вижу, что на «сделанное ему возражение», связанное со сферическим треугольником, Лежандр отвечает, что там имеет место не равенство $C = \varphi(A, B, c)$, а $C = \varphi(A, B, c \text{ rad})$ или просто $C = \varphi\left(A, B, \frac{c}{r}\right)$, вполне согласное с законом однородности. Это последнее мне не совсем ясно, и я очень хотел бы, чтобы Вы при случае упомянули обо всем этом предмете в нескольких словах.

Сделанное Лежандру возражение заключается в том, что в сферическом треугольнике угол C определяется двумя другими углами A, B и стороной c . Соотношение

$$C = \varphi(A, B, c),$$

таким образом, в сферической тригонометрии имеет место, и функция φ существенно зависит от c , принцип однородности как бы нарушается. Почему же такое же соотношение не может иметь места и в прямолинейной тригонометрии? Лежандр на это, в свою очередь, справедливо возражает, что упомянутое соотношение в сферической тригонометрии имеет место в том случае, если под c разуметь угловое значение стороны; если же под c разуметь длину стороны, то ее угловое значение выразится отвлеченным числом $\frac{c}{r}$, где r — радиус сферы. Предыдущее уравнение принимает поэтому вид:

$$C = \varphi\left(A, B, \frac{c}{r}\right)$$

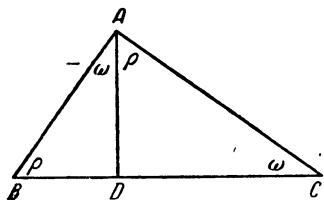
и принцип однородности, таким образом, не нарушается.

Ответ Гаусса (от 11 апреля 1816 г.) был следующий:

«Вас интересует мое мнение о лежандровом доказательстве теории параллельных линий. Я должен признаться, что в моих глазах его вывод не имеет никакой доказательной силы. Он выводит, что $c = \psi(A, B, C)$, следовательно = числу, что нелепо. Это «следовательно» в действительности вовсе не следует; равенство $c = \psi(A, B, C)$ говорит только, что c определено, коль скоро заданы A, B, C . Это,

¹⁾ В этом и заключается принцип однородности: c представляет собой линейную величину, а потому не может выражаться отвлеченным числом.

²⁾ К письму приложен чертеж, приводимый и здесь (черт. 54), который предназначен для того, чтобы это утверждение оправдать. Если c из предыдущего уравнения выпадает, то оно имеет вид: $C = \varphi(A, B)$, т. е. каждый угол треугольника определяется двумя другими углами. Если A есть прямой угол, то это соотношение принимает вид $C = \chi(B)$, т. е. в прямоугольном треугольнике каждый острый угол определяется вторым острым углом. Если поэтому острые углы треугольника ABC обозначим через ρ и ω , то $\omega = \chi(\rho)$, $\rho = \chi(\omega)$. Если теперь из вершины прямого угла опустим перпендикуляр AD на гипотенузу, то треугольник разобьется на два прямоугольных треугольника ABD и ACD ; из прямоугольного треугольника ABD следует, что $\angle BAD = \chi(\rho) = \omega = C$; таким же образом $\angle CAD = \chi(\omega) = \rho = B$; поэтому $\omega + \rho = d$, таким образом $C + B = d$.



Черт. 54.

однако, не исключает возможности, что в состав функции φ не входит какая-нибудь постоянная линия. Из уравнения $C = \varphi(A, B, c)$ сторона c вовсе не должна выпасть; она может вполне оставаться, если функция φ содержит постоянную линию, равную m , так что, собственно,

$$C = \varphi\left(A, B, \frac{c}{m}\right).$$

Как легко доказать, если евклидова геометрия не есть истинная геометрия, то подобных фигур вовсе не существует; в равностороннем треугольнике угол меняется вместе с величиной стороны, в чем я ничего абсурдного не нахожу. Угол представляет собой в этом случае функцию от стороны, а сторона — функцию от угла, однако, естественно, такую функцию, в состав которой еще входит постоянная линия».

8. Обзор изложенных рассуждений Лежандра. Теперь мы можем дать себе точный отчет, что, собственно, действительно установлено Лежандром в той части его «Размышлений», которая изложена выше. Лежандр средствами абсолютной геометрии доказал две теоремы основного значения. Первая из них заключается в том, что сумма внутренних углов прямолинейного треугольника не превышает $2d$; вторая заключается в том, что сумма внутренних углов равна $2d$ во всяком треугольнике, если существует хотя бы один треугольник, в котором это имеет место. Лежандр показал, что теорема о сумме углов прямолинейного треугольника («Начала», I.32) эквивалентна постулату о параллельных линиях. Этот последний результат уже содержался, правда, в рассуждениях Насир-Эддина, но он там не был достаточно отчетливо отмечен, не получил распространения. Это значит, если допустить, что существует хотя бы один прямолинейный треугольник, в котором сумма углов равна $2d$, то можно доказать постулат о параллельных линиях. Лежандр пытался доказать существование такого треугольника, но все его попытки строго это обосновать ошибочны. Тем не менее нужно отметить, что установление этих двух теорем было несомненным продвижением вопроса о V постулате Евклида.

9. Доказательство Картона. В заключение мы приведем еще одну любопытную попытку доказать постулат о параллельных, принадлежащую французскому геометру Картону (J. Carton) и тесно связанную с рассуждениями Лежандра. Это доказательство интересно и в том отношении, что оно с одобрения академика Ж. Бертрана было в 1869 г. опубликовано в докладах Парижской академии [76] и в том же выпуске этого издания сопровождалось заметкой Бертрана, поддерживавшей его. Бертран настаивал на его правильности в двух заседаниях Академии. Изложение этой заметки поместил и В. Я. Буняковский в 6-м выпуске «Математического сборника» [77]. В 1887 г. В. П. Ермаков поместил в «Вестнике опытной физики и элементарной математики» изложение того же доказательства в упрощенном виде. Мы здесь помещаем это доказательство в редакции В. П. Ермакова [78].

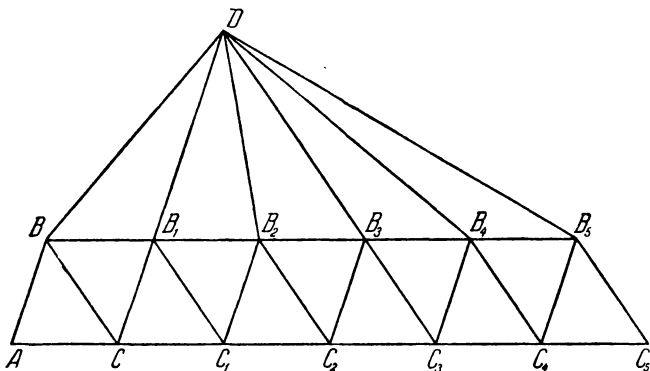
«Положим, что в каком-нибудь треугольнике ABC (черт. 55) сумма углов менее двух прямых и равна $2 - \alpha$ прямых. Каково бы ни было число α , мы всегда можем подобрать целое число n так великим, чтобы $n\alpha$ превосходило 6. Продолжим основание AC треугольника и на продолжении отложим это основание еще $n-1$ раз¹⁾; на этих отрезках построим треугольники CB_1C , $C_1B_2C_2$, ..., равные

¹⁾ На чертеже $n-1=5$.

данному; вершины каждого двух смежных треугольников соединим прямой линией; наконец, все вершины соединим с произвольной точкой D так, чтобы вся фигура образовала пятиугольник $ABDB_{n-1}C_{n-1}$. Вычислим сумму углов во всех треугольниках. Так как сумма углов в данном треугольнике ABC равна $2-\alpha^1$, а треугольников, равных данному, мы имеем n , то сумма углов во всех этих треугольниках равна $2n-n\alpha$. Далее мы имеем $n-1$ промежуточных треугольников BB_1C , $B_1B_2C_1$, ... и $n-1$ треугольников, имеющих вершину в D ; сумма углов в этих $2n-2$ треугольниках по условию менее $4n-4$; пусть она равна $4n-4-\beta$. Следовательно, сумма углов во всех треугольниках нашей фигуры равна:

$$2n-n\alpha+4n-4-\beta=6n-n\alpha-4-\beta.$$

Ту же самую сумму мы можем вычислить иначе. Обозначим через S сумму внутренних углов пятиугольника $ABDB_{n-1}C_{n-1}$. Если мы



Черт. 55.

к этой сумме прибавим сумму углов при $n-1$ точках $C, C_1, \dots, C_{n-2}$ и $n-2$ точках $B_1, B_2, \dots, B_{n-2}$, то получим сумму углов во всех треугольниках. Так как сумма трех углов при каждой из точек $C, C_1, C_2, \dots$ равна двум прямым, то сумма углов при всех этих $n-1$ точках равна $2n-2$. Так как сумма четырех углов около каждой из точек $B_1, B_2, \dots$ равна 4 прямым, то сумма углов около всех этих $n-2$ точек равна $4n-8$. Следовательно, сумма углов во всех треугольниках равна:

$$S+2n-2+4n-8=S+6n-10.$$

Сравнив это выражение с найденным выше

$$S+6n-10=6n-n\alpha-4-\beta,$$

найдем:

$$S=6-n\alpha-\beta.$$

Во второй части получилось число отрицательное, так как $n\alpha > 6$. Итак, допустив, что сумма внутренних углов треугольника менее двух прямых углов, мы приходим к нелепости, что сумма внутренних углов пятиугольника равна отрицательному числу.

Предлагаем читателю подумать над этим доказательством. Выяснить его ошибочность нам будет удобнее позднее, в § 34, рубр. 5 (стр. 274).

¹⁾ Подразумевается « $2-x$ прямых углов». Это наименование Ермаков везде опускает.

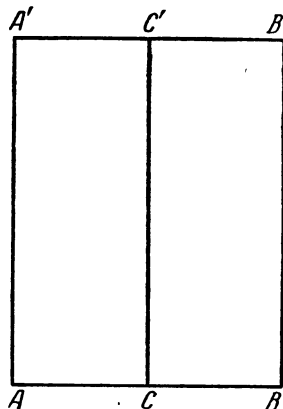
§ 16. ПРЕДВОСХИЩЕНИЕ НЕЕВКЛИДОВОЙ ГЕОМЕТРИИ

1. Предшественники Лежандра. Две основные теоремы, устанавливающие связь между постулатом о параллельных линиях и учением о сумме углов треугольника, долгое время приписывались Лежандру, как это и сделано в предыдущем параграфе. Однако, в 1889 г. Бельтрами (Е. Beltrami [⁷⁹]) обнаружил, что обе теоремы Лежандра были установлены значительно раньше иезуитом Иеронимом Саккери.

Этот глубококомысленный монах написал в самом конце своей жизни замечательное сочинение под заглавием «Euclides ab omni naevo vindicatus; sive conatus geometricus, quo stabiliuntur prima ipsa universae geometriae principia» («Евклид, очищенный от всех пятен; опыт установления самых первых начал всей геометрии», 1733) [⁷⁷]. Задача этого сочинения, как указывает самое заглавие, состоит в том, чтобы исправить все недостатки «Начал» Евклида и, прежде всего, конечно, обосновать теорию параллельных линий. Эта теория действительно получила в сочинении Саккери совершенно новое освещение. Сочинение было довольно широко известно; о нем упоминают многие авторы; но в XIX веке оно уже находилось в забвении. Однако, в 1889 г. с этим сочинением познакомился итальянский геометр Бельтрами, который был хорошо знаком с сочинениями Лобачевского, и пришел к заключению, что на результаты Саккери, относящиеся к теории параллельных линий, можно смотреть, как на некоторое предвосхищение идей Лобачевского; об этом он опубликовал сообщение в указанном нами небольшом мемуаре [⁷⁹], посвященном Саккери. Если, однако, рассуждения Саккери можно рассматривать только как отдаленное неосознанное предвосхищение начал неевклидовой геометрии, то теоремы Лежандра были Саккери хорошо известны. К этим теоремам пришел также, приблизительно через 30 лет после Саккери, известный германский математик и философ Г. Ламберт. На работах Саккери и Ламберта нельзя не остановиться.

2. Исследования Саккери. И. Саккери родился в 1667 г. В 1685 г. он вступил в орден иезуитов, а затем преподавал грамматику в иезуитской коллегии в Милане. Здесь он познакомился с братьями Чева (Сева) и, повидимому, под их влиянием заинтересовался математикой. Перейдя затем в Турин, а потом в Павию, он, кроме прежних занятий в иезуитской коллегии, преподавал математику в университете. Саккери написал несколько сочинений по теологии, логике и математике. Умер он в 1733 г.

К вопросу о постулате о параллельных линиях Саккери подходил следующим образом. Из крайних точек A и B отрезка AB (черт. 56) восставим к нему перпендикуляры AA' и BB' , расположенные по одну сторону прямой AB . На этих перпендикулярах отложим равные отрезки AA' и BB' . Таким образом составится четырехугольник $AA'B'B$ с двумя прямыми углами при нижнем основании AB . Соединим середины C и C' оснований AB и $A'B'$; налагая четырехугольник $AA'B'B$ на себя другой стороной ($BB'A'A$), мы докажем, что прямая CC' перпендикулярна к обоим основаниям, а углы A' и B' равны между собой. Этого рода четырехугольником, как мы знаем, уже пользовался Насир-Эддин;

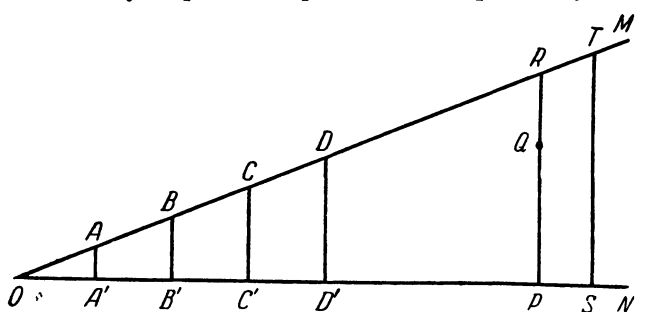


Черт. 56.

подробнее об этом см. стр. 145—146 и ниже (§ 23, стр. 193). Относительно этих углов может быть сделано три предположения: либо эти углы тупые, либо они прямые, либо острые. Саккери показывает прежде всего, что, принимая то или другое предположение относительно одного четырехугольника этого типа, мы тем самым принимаем его относительно всех четырехугольников того же типа. Иными словами, если какой-либо один из этих четырехугольников имеет при верхнем основании, скажем, острые углы, то и все четырехугольники этого типа имеют острые углы. Саккери называет три различных допущения, которые здесь могут быть сделаны, «гипотезой острого угла», «гипотезой прямого угла» и «гипотезой тупого угла». Он разворачивает следствия, проистекающие из каждой гипотезы: относительно каждого вопроса он рассматривает, как обстоит дело при одной, другой и третьей гипотезе. В этом порядке идей Саккери доказывает, что при гипотезе тупого угла сумма углов всякого треугольника больше двух прямых, при гипотезе прямого угла она равна двум прямым,

при гипотезе острого угла она меньше двух прямых.

В этом же порядке Саккери исследует следующий вопрос. Пусть MON будет острый угол (черт. 57). На одной из его сторон откладываем последовательно равные отрезки $OA, AB, BC, CD, \dots$ и проектируем их на другую



Черт. 57.

сторону угла; пусть $OA', A'B', B'C', C'D', \dots$ будут соответствующие проекции. При гипотезе прямого угла, т. е. в евклидовой геометрии, эти проекции равны. Как обстоит дело при каждой из двух остальных гипотез? Саккери показывает, что при гипотезе тупого угла эти отрезки постоянно возрастают, при гипотезе острого угла они постоянно убывают¹⁾. Пусть PQ будет перпендикуляр, восставленный к стороне ON нашего угла из произвольной ее точки P . Если на стороне OM отложим равные отрезки $OA, AB, BC, \dots$ достаточное число раз, то их проекции $OA', A'B', B'C', C'D', \dots$, в силу аксиомы Архимеда, при гипотезе прямого и тупого угла выйдут за пределы отрезка OP ; иными словами, когда мы достаточное число раз отложим один и тот же отрезок OA на стороне OM , то мы (при гипотезе прямого или тупого угла) неизбежно придем к некоторой точке T , перпендикуляр из которой TS упадет на стороне ON за точку P . Образуется треугольник TOS , внутрь которого войдет перпендикуляр PQ ; он должен будет поэтому из него выйти и потому пересечет сторону OM в некоторой точке R . В случае гипотезы прямого угла, т. е. в евклидовой геометрии, это не могло вызывать сомнений. Но то же, оказывается, имеет место и при гипотезе тупого угла; иными словами, и при гипотезе тупого угла должен выполняться постулат о параллельных линиях (в формулировке Тузи-Лежандра; см. стр. 116), т. е. должна иметь место евклидова геометрия. Мы приходим, таким образом, к противоречию; гипотеза тупого угла поэтому отпадает; сумма углов в треугольнике не может превысить $2d$.

¹⁾ Ср. с так называемой четвертой основной теоремой Лобачевского (см. ниже, § 21, рубр. 2, стр. 181).

Теоремы, приписываемые Лежандру, как видим, были задолго до него известны Саккери.

Чтобы доказать постулат о параллельных линиях, остается, таким образом, опровергнуть гипотезу острого угла; Саккери стоит перед той же задачей, которую позже ставил себе Лежандр. Этой гипотезе Саккери посвящает обширное исследование, занимающее около 80 страниц. Саккери показывает, что при гипотезе острого угла две непересекающиеся прямые, расположенные в одной плоскости, либо имеют общий перпендикуляр, от которого они расходятся, бесконечно удаляясь друг от друга в обе стороны, либо бесконечно удаляются друг от друга в одну сторону и неограниченно сближаются в другую сторону. Чтобы это обнаружить, нужен ряд подготовительных рассуждений, которые Саккери проводит с безупречной строгостью. Он показывает при этом, что перпендикуляр к стороне острого угла (при гипотезе острого угла) сначала пересекает вторую сторону, а потом, по мере удаления от вершины, перестает ее пересекать; что при этом существует предельный — первый не пересекающий перпендикуляр и т. д. Словом, это как бы целая геометрическая система, соответствующая «гипотезе острого угла». Но эта тонкая нить безупречных рассуждений внезапно прерывается теоремой XXXIII, в которой Саккери заявляет: «Гипотеза острого угла совершенно ложна, ибо противоречит природе прямой линии». В чем же сказывается это противоречие? Рассматривая неограниченно сближающиеся прямые как пересекающиеся в бесконечно удаленной точке, Саккери приходит к странному заключению, что из этой бесконечно удаленной точки к обоим прямым можно было бы провести общий перпендикуляр, что «противно природе прямой линии». Человек, чрезвычайно тонко разбирающий доказательства Прокла, Насир-Эддина и Клавия, искусно вылавливающий глубоко сокрытую логическую ошибку, запутывается сам в элементарных рассуждениях, потому что он не имеет твердых оснований для суждения о том, в какой мере можно пользоваться бесконечно удаленными точками. При всей категоричности, с которой формулирована упомянутая выше XXXIII теорема, Саккери, очевидно, чувствует слабость этих рассуждений, ибо он заканчивает следующим примечанием:

«На этом я мог бы спокойно остановиться; но я не хочу отказаться от попытки доказать, что эта упорная гипотеза острого угла, которую я вырвал уже с корнем, противоречит самой себе. Этому посвящены следующие теоремы настоящей книги».

Возвращаясь, таким образом, вновь к гипотезе острого угла, Саккери показывает, что геометрическое место точек в плоскости, удаленных на данное расстояние от данной прямой, представляет собой кривую линию («кривая равных расстояний»). За этим следует подробный анализ свойств этой кривой, совершенно правильный до тех пор, пока Саккери не приступает к определению ее длины при помощи метода бесконечно-малых. Здесь он вновь впадает в ошибку, которая заставляет его отвергнуть гипотезу острого угла; но и здесь он кончает примечанием, указывающим, что эти рассуждения его, в сущности, не удовлетворяли.

«Не могу не указать здесь, — говорит он, — разницы между приведенными опровержениями обеих гипотез. При гипотезе тупого угла дело ясно, как свет божий... Между тем опровергнуть гипотезу острого угла мне не удастся иначе, как доказав, что эта длина ¹⁾ равна длине ее прямолинейного базиса».

¹⁾ Длина дуги эквидистантной линии (см. ниже, § 31, рубр. 2, стр. 245), т. е. геометрического места точек, равноудаленных от данной прямой по одну ее сторону.

При всей ошибочности последнего вывода, Саккери имеет ту несомненную заслугу, что он дал вопросу о постулате Евклида новое направление. Он первый со всей определенностью связал учение о параллельных линиях с вопросом о сумме углов в треугольнике. Три возможности (три гипотезы), которые здесь возникают, действительно ведут к трем возможным системам геометрии. Если одна из них (гипотеза тупого угла) у Саккери, как и потом у Лежандра, сейчас же отпадает, то это происходит оттого, что оба в точности сохраняют остальные постулаты Евклида (в том числе и постулат о бесконечности прямой). Но выводы, которые Саккери делает из гипотезы острого угла, уже совпадают с первыми предложениями геометрии Лобачевского. Конечно, Саккери отнюдь не допускает возможности гипотезы острого угла.

Клюгель в своем обзоре доказательств постулата о параллельных линиях [89], появившемся через 30 лет после выхода книги Саккери, излагает его рассуждения, однако, чрезвычайно кратко; вряд ли кто-либо, не читавший самого Саккери, мог бы в них разобраться.

3. Работы Ламберта. Повидимому, именно книга Клюгеля обратила на вопрос о параллельных линиях внимание философа и математика И. Г. Ламберта (J. H. Lambert)¹⁾. Ламберт родился в 1728 г. в Эльзасе, в г. Мюльгаузене, который состоял в Швейцарском Союзе; Ламберт и считал себя швейцарским ученым; одни его сочинения написаны по-французски, другие — по-немецки. В середине 60-х годов Ламберт занимался Евклидом, главным образом — первой книгой «Начал»; как уже сказано, повидимому под влиянием диссертации Клюгеля, он заинтересовался теорией параллельных линий и около 1766 г. составил посвященную этому вопросу статью; однако, сам он ее не опубликовал, поскольку можно судить, потому что не был ею удовлетворен. В 1786 г. Иоанн Бернулли (J. Bernoulli, младший внук наиболее знаменитого Иоанна Бернулли) обнаружил эту рукопись в литературном наследии Ламберта и опубликовал ее в Лейпцигском журнале, который он издавал [80]. В книге Штекеля (P. Stäckel [81]) она вновь воспроизведена.

«Теория параллельных линий» Ламберта состоит из трех частей, существенно различных по своему содержанию. Первая часть имеет целью выяснить, в чем собственно состоит задача доказательства постулата о параллельных линиях; он со всей отчетливостью указывает, что речь идет отнюдь не о том, чтобы заменить постулат о параллельных более очевидным положением, а о том, чтобы вывести его строго логически из остальных постулатов, не внося никакого добавочного допущения. И как бы в пояснение этого, вторая часть статьи Ламберта содержит ряд соображений относительно различных попыток, которые, казалось бы, могут привести к доказательству постулата; но каждая попытка заканчивается указанием дефекта — некоторого остатка, недоговоренности, лишаящей рассуждение доказательной силы. Гинденбург (Hindenburg), издававший вместе с Бернулли журнал, в котором была опубликована статья Ламберта, сопровождает вторую часть его статьи таким замечанием:

«Ламберт показывает, что доказательство постулата Евклида легко можно довести до того, что остаток не только представляет собой нечто совершенно очевидное, но оставляет впечатление, что его легко восполнить и тем довести доказательство до конца; но из

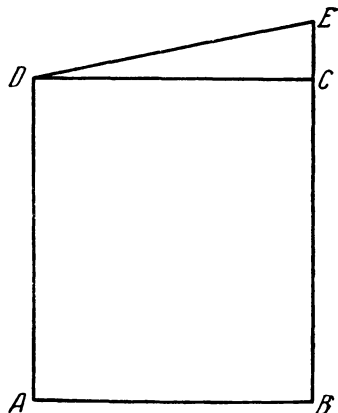
¹⁾ Об этом можно судить по указанию в § 3 брошюры Ламберта [80]; к тому же он состоял с Клюгелем в переписке.

многообразного опыта я пришел к совершенно другому выводу: то, что остается еще показать, сначала кажется ничтожной мелочью, но при тщательном размышлении всегда убеждаешься, что в этой мелочи заключается вся суть дела; обыкновенно она содержит либо доказываемое предложение, либо эквивалентное ему».

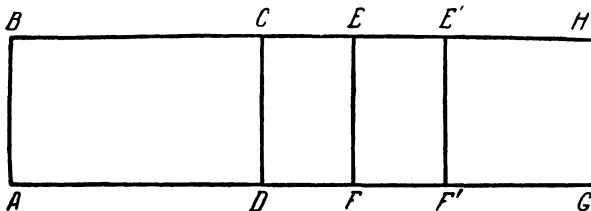
Наиболее ценной является третья часть этого небольшого сочинения Ламберта. Саккери, как мы видели, исходит от четырехугольника $ABCD$, имеющего при вершинах A и B прямые углы и равные стороны AD и BC . Ламберт же исходит от четырехугольника $ABED$, в котором при трех вершинах A , B и D прямые углы (черт. 58); такой четырехугольник получаем, если в четырехугольнике Саккери соединим середины его оснований.

Как и Саккери, Ламберт поставлен в необходимость различать три гипотезы, в зависимости от того, будет ли при вершине E прямой, тупой или острый угол. Эти три возможности он называет соответственно гипотезой прямого, тупого или острого угла — вполне аналогично тому, как это делает Саккери.

Каждую из трех гипотез Ламберт исследует отдельно. Однако, предварительно он доказывает, что всякий раз, как какая-либо из этих гипотез имеет место в каком-либо одном частном случае, она имеет место и во всяком другом случае. Это значит, если в каком-либо из четырехугольни-



Черт. 58.



Черт. 59.

ков рассматриваемого типа четвертый угол равен прямому углу, больше или меньше его, то то же имеет место в любом другом четырехугольнике этого типа.

Ламберт начинает с гипотезы прямого угла и легко доказывает,

что в этом случае осуществляется постулат о параллельных линиях, т. е. имеет место евклидова геометрия. Обращаясь затем к гипотезе тупого угла, Ламберт устанавливает предложение, аналогичное тому, которое является основным в рассуждении Саккери¹⁾.

Именно, если AG и BH (черт. 59) суть две прямые, расположенные в одной плоскости, перпендикулярные к прямой AB , и из точек C , E одной прямой опустим перпендикуляры CD , EF , которыми определяются расстояния этих точек от другой прямой, то с удалением их от B эти расстояния при гипотезе тупого угла убывают ($EF < CD$) и притом при удалении на равные расстояния ($CE = EE'$) убывают быстрее, нежели в арифметической прогрессии ($FE - F'E' > CD - FE$). При таком убывании это расстояние должно сделаться отрицательным, что лишено смысла, так как прямая BH должна оставаться по одну сторону AG . Приходим, таким образом, к противоречию, и гипотеза тупого угла отпадает.

¹⁾ Заметим, что и оно аналогично четвертой основной теореме Лобачевского (§ 21, рубр. 2, стр. 181).

Переходя к гипотезе острого угла, Ламберт останавливается на ней очень подробно. Он прежде всего доказывает, что в этом случае при той же конфигурации (черт. 59) расстояния CD , EF , ... возрастают и притом быстрее, чем в арифметической прогрессии¹⁾. Он показывает далее, что при гипотезе острого угла сумма углов в треугольнике всегда меньше $2d$ и величина углового дефекта пропорциональна площади треугольника; отсюда явно следует, что площадь треугольника не может быть сколь угодно велика: если δ — дефект одного треугольника, имеющего площадь S , то площадь всякого другого треугольника меньше $S \frac{2\pi}{\delta}$. Отсюда следует, что достаточно допустить, что площадь треугольника может быть сколь угодно велика, чтобы третья гипотеза этим была опровергнута. Но Ламберт хорошо понимает, что это новое допущение эквивалентно постулату Евклида.

С другой стороны, сопоставляя этот результат с геометрией сферы, в которой сумма углов геодезического треугольника больше $2d$, а площадь пропорциональна угловому избытку, Ламберт замечает:

«Мне кажется очень замечательным, что вторая гипотеза оправдывается, если вместо плоских треугольников возьмем сферические. Я из этого почти должен был бы сделать заключение, что третья гипотеза имеет место на какой-то мнимой сфере. Во всяком случае должна же существовать причина, почему она на плоскости далеко не так легко поддается опровержению, как это могло быть сделано в отношении второй гипотезы».

Это замечательное предвидение оправдалось примерно через сто лет.

Ламберт устанавливает еще небольшое число выводов, проистекающих из гипотезы острого угла. Наиболее замечательным в глазах Ламберта является то, что при гипотезе острого угла должна была бы существовать абсолютная единица длины; это значит, — должен был бы существовать отрезок, который определяется чисто геометрически, т. е. без пособия эталона, и мог бы быть принят за единицу длины.

Ламберт по этому поводу восклицает:

«В этом есть нечто восхитительное, что вызывает даже желание, чтобы третья гипотеза была справедлива! И все же я желал бы, несмотря на это преимущество²⁾, чтобы это было не так, потому что это было бы сопряжено с целым рядом других неудобств. Тригонометрические таблицы стали бы бесконечно пространственными; подобие и пропорциональность фигур не существовали бы вовсе; ни одна фигура не могла бы быть представлена иначе, как в абсолютной своей величине, и астрономам пришлось бы плохо...».

Указывая ряд абсурдов, с точки зрения наших представлений, к которым приводит гипотеза острого угла, Ламберт замечает, что все это не дает логического доказательства, что все это, как он выражается, «*argumenta ab amore ac invidia ducta*»³⁾, аргументы, которым не может быть места в геометрии. Как и профессор Кестнер, много занимавшийся теорией параллельных линий, быть может лучший знаток этого вопроса в XVIII веке, как и ученик последнего Клюгель, о котором мы уже упоминали выше, Ламберт приходит к твердому выводу, что все попытки доказать V постулат Евклида ни к чему не привели.

¹⁾ Это предположение вполне совпадает с четвертой основной теоремой Лобачевского, на которую мы указывали в предыдущих примечаниях.

²⁾ Существование абсолютной меры длины.

³⁾ «Аргументы, вызываемые любовью и недоброжелательством».

4. **Открытие неевклидовой геометрии.** Мы видим, таким образом, что результаты, полученные Лежандром относительно связи между суммой углов треугольника и постулатом о параллельных линиях, были установлены до него Саккери и Ламбертом. Более того, и тот, и другой, по существу, ушли дальше Лежандра в том отношении, что они установили ряд предложений, которые имели бы место, если бы была справедлива гипотеза острого угла. По существу, теоремы, установленные Саккери и Ламбертом, представляют собой первые предложения так называемой неевклидовой геометрии. Однако характерно для этих авторов то, что ни тот, ни другой не считал гипотезу острого угла и проистекающие из нее выводы действительно возможными. Приведенные выше высказывания Ламберта представляют лишь первые сомнения, на которых он, однако, не останавливается. Гипотеза острого угла у этих авторов есть только предположение, противное действительности, принятие которого должно привести к противоречию и вследствие этого — к доказательству постулата о параллельных линиях. На этой точке зрения, еще более определенно, стоял и Лежандр. Между тем, исследования, развернувшиеся в XVIII столетии, окончательно привели к сознанию, что все попытки доказательства V постулата Евклида, даже предложенные очень крупными геометрами, не достигли цели. И это, именно, обстоятельство могло навести на мысль, что такое доказательство вовсе невозможно, что постулат о параллельных линиях не представляет собой следствия остальных аксиом и постулатов Евклида и его последователей. Эта постановка вопроса возникла и развернулась в XIX столетии. Впервые она была развита и опубликована Н. И. Лобачевским. Биография Н. И. Лобачевского широко освещена в сочинениях Э. П. Янишевского [82], Ф. Энгеля (F. Engel [83]), А. В. Васильева [84], В. Ф. Кагана [85]. Следующий отрывок, заимствованный из вступительной редакционной статьи к первому тому Полного собрания сочинений Н. И. Лобачевского [86], отчетливо освещает роль и значение его гениального открытия.

«В заседании Физико-математического факультета Казанского университета, 11 февраля 1826 г., был заслушан доклад Н. И. Лобачевского: «*Exposition succincte des principes de la géométrie avec une démonstration rigoureuse du théorème des parallèles*»¹⁾). Хотя этот доклад был представлен Лобачевским в письменном виде, он до нас не дошел. Он был передан на заключение трем профессорам и, — по видимому, не случайно, — не был возвращен ими в факультет. Но этот доклад составил первую часть мемуара «О началах геометрии», который был опубликован Лобачевским в «Казанском вестнике» — журнале, издававшемся Казанским университетом; печатание этого сочинения было начато в книжке «Февраль — март 1829 г.» и окончено в книжке «Июль — август 1830 г.».

Мемуар «О началах геометрии» является гранью двух эпох в истории геометрии.

С одной стороны, им завершается вопрос о доказательстве постулата Евклида о параллельных линиях — вопрос, занимавший умы многих выдающихся математиков в продолжение двух тысяч лет, начиная с Евклида и кончая Лобачевским. В справедливости этого постулата до начала XIX столетия никто не сомневался, и усилия математиков были направлены на строгое логическое его доказательство. Исследования Лобачевского привели к заключению, что

¹⁾ «Краткое изложение основ геометрии со строгим доказательством теоремы о параллельных».

эти усилия, по существу своему, были тщетны, что этого постулата доказать нельзя, потому что он не представляет собой следствия остальных аксиом и постулатов, положенных Евклидом в основу геометрии.

С другой стороны, мемуар Лобачевского открывает новую страницу в истории геометрии и кладет начало новому ее отделу — «неевклидовой геометрии».

Задавшись мыслью проследить как можно дальше влияние V постулата (постулата о параллельных линиях) на геометрическую систему, Лобачевский обратился к методу доказательства от противного. Он допустил, что этот постулат неверен. Такое допущение тотчас же привело к целому ряду следствий, противоречащих многим теоремам классической геометрии и нашим представлениям о пространстве, которые сложились на основе многовекового опыта. Огромная заслуга Лобачевского заключается в том, что он понял причину этих противоречий. Он уяснил себе, что эти противоречия отнюдь не коренятся в том, что выводы, к которым он пришел, нелепы по существу, а имеют совершенно другой источник.

Путь, по которому пошел Лобачевский, до него избирали и другие геометры — Саккери, Ламберт, Швейкарт, Тауринус, — работы которых остались Лобачевскому неизвестными. Но эти геометры, встречая противоречия с нашими привычными представлениями о пространстве, останавливались в самом начале этого пути и не давали себе ясного отчета в том, где эти противоречия коренятся; они видели в них доказательство справедливости постулата и невозможности его отвергнуть. В этом заключалась коренная ошибка. В начале своего мемуара «Воображаемая геометрия» Лобачевский пишет: «Кто ни думал найти решение затруднительного вопроса, все без исключения ошибались, будучи предубеждены в справедливости того, что не может еще следовать прямо из наших понятий о телах без пособия наблюдений». О работах Лежандра, которые были Лобачевскому известны, он говорит в другом сочинении¹⁾: «Даже нахожу, что Лежандр несколько раз попадал на ту дорогу, которую выбрал я так удачно; но, вероятно, предубеждение в пользу принятого всеми положения заставляло на каждом шагу спешить заключением или дополнять тем, чего бы нельзя было допускать еще в новом предположении».

Гений Лобачевского сказался в том, что он не поддался этому предубеждению; напротив, смело развивая следствия, вытекающие из отрицания V постулата, он создал новую геометрическую систему, которую назвал «воображаемой геометрией». Он имел решимость отказаться от связующей силы сложившихся геометрических представлений; более того, вполне доверяя строгости своих логических суждений, вопреки установившимся представлениям о пространстве, он ясно понял причину тех противоречий, которые остановили всех его предшественников. Он понял, что они коренятся не в том, что V постулат есть следствие остальных геометрических аксиом, так что, отвергая его, мы впадаем в противоречие с этими последними, а в том, что V постулат есть новое, независимое допущение, не вытекающее из других постулатов и аксиом; и поэтому, не нарушая последних, мы вправе его принять и вправе его отвергнуть. Принимая его, Евклид создал свою классическую систему геометрии; отвергая

¹⁾ «Новые начала геометрии с полной теорией параллельных».

его, Лобачевский создал свою «воображаемую геометрию», столь же строгую и логически безупречную, как и геометрия Евклида, и не заключающую в себе никаких логических противоречий. Обе геометрии одинаково правильны с логической точки зрения, и встретившиеся противоречия — это различие двух различных геометрических систем, но не внутренние противоречия, присущие той или другой из них».

Мемуар «О началах геометрии»^[86] содержит уже сжатое, но очень углубленное развитие «воображаемой» геометрии, по терминологии Гаусса — неевклидовой, по позднейшей, более целесообразной терминологии — гиперболической геометрии. Однако очень сжатое изложение этих своеобразных идей привело к тому, что они не были поняты; не были поняты и последующие работы Лобачевского, в которых его система получила как дальнейшее развитие, так и более обстоятельное изложение. Краткое и сравнительно доступное изложение начал новой геометрии содержится в небольшом сочинении «Геометрические исследования по теории параллельных линий»^[88], опубликованном Лобачевским в 1840 г.

Однако в конце XIX столетия идеи Лобачевского были усвоены и получили широкое распространение. Обстоятельства, при которых это произошло, будут подробно изложены во второй части настоящего сочинения. Дальнейшее развитие учения об основаниях геометрии целиком опирается на созданную Лобачевским неевклидову геометрию; она послужила также исходным пунктом, можно сказать, всего дальнейшего развития так называемой гиперболической геометрии, а по существу, и современной геометрии вообще.

После смерти Лобачевского обнаружилось, что к исходным его идеям близко подходили другие геометры — Гаусс, Швейкарт, Тауринус; в 1832 г. венгерский математик Иоанн Боляи (J. Bolyai) опубликовал небольшое очень замечательное сочинение^[87], заключавшее изложение начал той же геометрии, содержание которой Лобачевский в 1826 г. изложил в своем докладе физико-математическому факультету Казанского университета, а затем широко развил как в мемуаре «О началах геометрии», опубликованном в 1829—1830 гг., так и в последующих своих работах¹⁾.

Однако выяснить соотношение между всеми этими работами возможно только на базе уже усвоенной неевклидовой геометрии. Поэтому мы возвратимся к этому вопросу в следующих главах. Там же будет изложен и ход последовательного развития идей самого Лобачевского в его работах, а также возрождение его идей после его смерти.

Но, более того, за сто лет, протекших после опубликования работ Лобачевского, построение неевклидовой геометрии было предметом тщательных размышлений. Были предложены различные модификации, усовершенствования этого построения; наиболее важные работы в этом направлении принадлежат Либману (H. Liebmann^[89]) и Гильберту (D. Hilbert^[90]); ряд других будет указан на своем месте. Естественно, было бы нецелесообразно игнорировать эти модификации. Изложение гиперболической геометрии в следующих главах учитывает и новые работы в этом направлении; при этом выяснены особенности различных систем, их построения и изложения.

¹⁾ Об этом см. § 57, «Еще к предистории неевклидовой геометрии»

ГЛАВА ТРЕТЬЯ

НАЧАЛА ГИПЕРБОЛИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ НА ПЛОСКОСТИ

§ 17. ГИПЕРБОЛИЧЕСКАЯ ПЛОСКОСТЬ И ГИПЕРБОЛИЧЕСКОЕ ПРОСТРАНСТВО. ПАРАЛЛЕЛЬНЫЕ ЛИНИИ В ГИПЕРБОЛИЧЕСКОЙ ПЛОСКОСТИ

1. Метод изложения. Приступая к изложению неевклидовой геометрии, мы имеем в виду выполнить это таким образом, чтобы в ходе ее исторического развития выяснить то влияние, которое она оказала на эволюцию всей геометрии и, что важнее всего — на выработку современных методов обоснования геометрии. Нужно, чтобы читатель прежде всего овладел неевклидовой геометрией так, как он владеет классической геометрией Евклида. Изложение последней в руководствах, предназначенных для ее усвоения, и в настоящее время несет на себе печать Евклида, сохраняет царящее у него соединение логики и интуиции ¹⁾. Сообразно этому и первое изложение неевклидовой геометрии здесь носит характер, который оно имеет у Лобачевского, с тем же стремлением к выдержанной логике и все же с известной долей интуиции, которой это изложение у Лобачевского отнюдь не было чуждо. Чисто логическая схема найдет себе место в завершении настоящего сочинения.

2. Обзор аксиоматики абсолютной геометрии. При всем том укажем, что мы здесь принимаем все аксиомы и постулаты Евклида, за исключением постулата о параллельных линиях; принимаем также постулаты и аксиомы, предложенные после Евклида, иногда совпадающие с евклидовыми, иногда расширяющие и дополняющие их. Сюда относятся, таким образом, поправки Прокла (§ 12, рубр. 1, стр. 99—100), так называемые законы движения, постулат непрерывности прямой, в его интуитивной форме у Анаксигора (даже Аристотеля) и в точной форме у Дедекинда (в этом виде он охватывает аксиому Архимеда); принимаем так называемую аксиому Паша о прямой, пересекающей сторону треугольника (§ 14, рубр. 6, стр. 121 и 123).

В настоящее время пользуется уже большой известностью система аксиом Гильберта; она даже находит себе место в некоторых элементарных сочинениях и школьных руководствах по геометрии; аксиомы Гильберта, по исключению постулата о параллельных линиях, естественно, можно положить в основу построения абсолютной геометрии, предпосылая ее изложению начал неевклидовой геометрии. Исследование взаимоотношений этих аксиом, их независимости, их достаточности для обоснования геометрии, в частности абсолютной геометрии, входит

¹⁾ Как было указано, это имеет место даже в наиболее серьезных из таких руководств, например в известной книге Адамара [55].

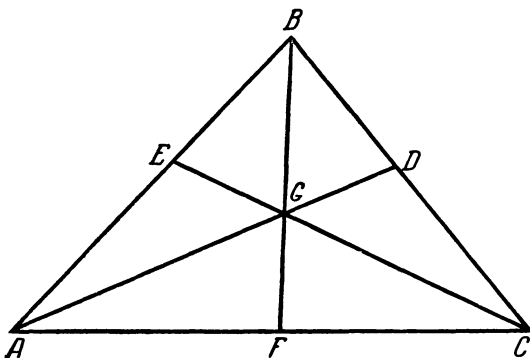
в задачу настоящего сочинения; но оно составит его заключительную часть и не может найти себе места здесь, при первом изложении начал неевклидовой геометрии.

3. Материал абсолютной геометрии. Приступая к изучению неевклидовой геометрии, нужно прежде всего точно усвоить материал, принадлежащий абсолютной геометрии, твердо помнить, что входит в ее состав, на какие предложения можно опираться при развитии неевклидовой геометрии. Это, собственно, уже подготовлено в первой главе. Излагая содержание «Начал» Евклида, мы тщательно отделяли те предложения, которые не зависят от постулата о параллельных линиях, от тех, которые доказываются на основе этого постулата. Здесь мы поэтому только напомним, что абсолютной геометрии в пределах планиметрии принадлежат следующие предложения: 1) первые 28 предложений I книги (I.1—28). 2) первые 19 предложений III книги (III.1—19, 28—30), 3) некоторые предложения IV книги (IV.1, 4, 13, 14), 4) все содержание V книги. Подробнее — в состав абсолютной геометрии входит: 1) учение об углах, об условиях равенства треугольников; теорема о внешнем угле в первой ее формулировке (внешний угол треугольника больше каждого из внутренних с ним не смежных); классификация треугольников в отношении сторон и углов; соотношения равенства и неравенства между сторонами и углами в одном и в двух треугольниках; достаточные условия параллельности двух прямых; 2) простейшие свойства хорд и касательных: соотношения между величиной дуги, ее хордой и расстоянием последней от центра; условия пересечения и касания двух окружностей, касания прямой и окружности; 3) учение об окружности, вписанной в правильный многоугольник и описанной около него; 4) учение о пропорциях и отношениях, содержащееся в V книге «Начал», — это учение вообще не может быть рассматриваемо как узко геометрическое; во всяком случае, ни в какой своей части оно на постулат о параллельных линиях не опирается. В связи с отделением абсолютной геометрии от собственно евклидовой здесь необходимо остановиться еще на одном вопросе.

4. Об окружности, вписанной в треугольник и описанной около него. В первой главе, излагая содержание «Начал» Евклида, мы относили к абсолютной геометрии те предложения, которые в «Началах» Евклида доказываются без помощи постулата о параллельных линиях, а к собственно евклидовой — те, доказательства которых прямо или косвенно опираются на этот постулат. Первый критерий вполне надежен: те предложения, которые правильно доказаны без пособия V постулата, по определению, принадлежат к абсолютной геометрии. Иначе обстоит дело с критерием, определяющим предложения собственно евклидовой геометрии: если доказательство той или иной теоремы в «Началах» опирается на V постулат, то, естественно, возникает вопрос, нельзя ли ее доказать иначе, не пользуясь этим постулатом, что дает неоспоримое основание отнести предложение к абсолютной геометрии? Во всяком случае, мы будем относить предложение безусловно к собственно евклидовой геометрии, если оно не только доказывается при помощи постулата о параллельных линиях, но если и обратно — из него можно вывести утверждение, содержащееся в этом постулате¹⁾. Так, теорема о том, что

¹⁾ Конечно, самый вопрос о закономерности деления предложений на две категории — абсолютные и евклидовы, может быть решен только тогда, когда строго установлено, что самый постулат о параллельных не может быть доказан средствами абсо-

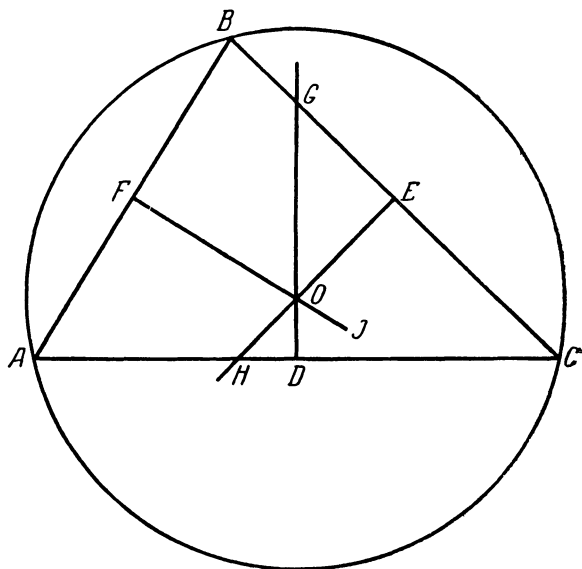
сумма углов треугольника равна $2d$, всегда доказывается при помощи постулата о параллельных линиях; но мы видели, что в работах Лежандра, а как оказалось позже, — уже в работах Саккери и Ламберта, даже Насир-Эддина, — было обнаружено, что предложение о сумме углов треугольника может заменить постулат о параллельных линиях; это — яркий пример основного предложения собственно евклидовой геометрии. Мы остановимся еще на предложениях IV.4 и IV.5 «Начал».



Черт. 60.

сать окружность. Доказательство проводится без помощи постулата о параллельных линиях, — предложение принадлежит абсолютной геометрии. Впрочем, чтобы рассуждение Евклида не вызывало никаких возражений, нужно обнаружить, что биссектрисы двух внутренних углов треугольника имеют общую точку (пересекаются); но это, очень легко сделать: в силу аксиомы Паша биссектриса AD угла A треугольника ABC (черт. 60), входя внутрь треугольника, пересекает сторону BC в некоторой точке D ; биссектриса же CE угла C , входя внутрь треугольника ACD , встречает сторону AD в некоторой точке G , которая и служит центром вписанной окружности.

Не так просто обстоит дело со вторым предложением (IV.5) (около каждого треугольника можно описать окружность). Роль постулата о параллельных в доказательстве этого предложения замаскирована, потому что существование точки пересечения серединных перпендикуляров не доказывается. Воспроизведем доказательство с устранением этого пробела. Пусть ABC — данный треугольник (черт. 61), C — острый угол. Восставим перпендикуляры DG и EH к двум сторонам треугольника из середин D и E сторон AC и BC . Так как EH

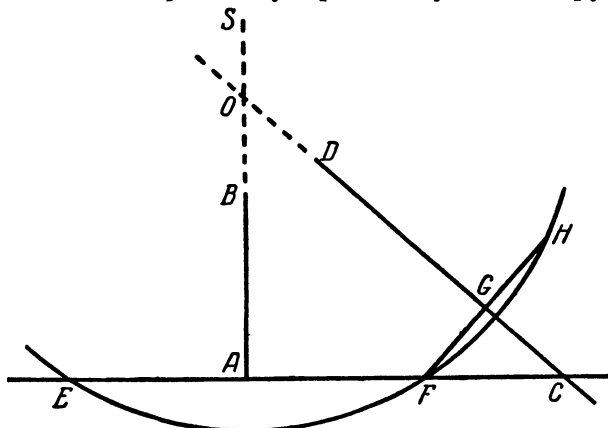


Черт. 61.

лютой геометрии. Авторы, устанавливающие это деление, по существу, конечно, исходили из этого допущения, которое, таким образом, предполагается и в рассуждении, приведенном в тексте. К этому вопросу мы возвратимся ниже, во второй части настоящего сочинения, при общем исследовании вопросов, относящихся к аксиоматике.

есть перпендикуляр к прямой BC , а CA наклонная, то они в силу постулата [форма Туси-Лежандра, § 14, рубр. 3 (стр. 115—116)] пересекутся в некоторой точке H , причем в треугольнике $ЕНС$ угол того же наименования острый. Теперь, в силу того же постулата, прямые DG и HE пересекутся со стороны острого угла $СHE$ в некоторой точке O . После этого, как обычно, доказывается, что через точку O пройдет и третий перпендикуляр FJ из середины третьей стороны AB ; точка O служит центром описанной окружности. Доказательство, таким образом, дважды опирается на постулат о параллельных линиях.

Примем теперь а priori, что через три точки, не лежащие на одной прямой, всегда проходит окружность. Покажем, что из этого вытекает постулат о параллельных линиях. В самом деле, пусть AB и CD (черт. 62) будут две прямые, из которых одна AB перпендикулярна к секущей AC , другая CD к ней наклонена, скажем, со стороны CD под острым углом ACD . От точки A по обе стороны от нее отложим на прямой AC равные отрезки $AE = AF \neq AC$ и из точки F опустим на CD перпендикуляр FG ; на нем по другую сторону точки G отложим отрезок $GH = GF$. Точка H явно не лежит на прямой AC , потому что прямая GD не перпендикулярна к AC . Поэтому, согласно допущению, через точки E, F, H проходит окружность;



Черт. 62.

центр ее O должен лежать на перпендикулярах AB и DC ; эти прямые неизбежно пересекаются в точке O ; постулат о параллельных (Туси-Лежандра), таким образом, вытекает из допущения, что через всякие три точки, не лежащие на одной прямой, всегда проходит окружность. Теорема «Начал» IV.5, согласно которой около каждого треугольника можно описать окружность, таким образом, есть предположение собственно евклидовой геометрии. К этому предположению нам придется возвратиться ниже (§ 24, рубр. 2, стр. 201), его характер при этом еще более выяснится.

5. Исходное положение Н. И. Лобачевского. Как было обстоятельно выяснено выше (§ 16, рубр. 4, стр. 151—153), Н. И. Лобачевский считал, что «важный пробел» в теории параллельных линий (введение специального постулата) составляет самое слабое место в геометрии; восполнению этого пробела, как мы знаем, посвящены его работы. Приступая в сочинении «Геометрические исследования»¹⁾ [68], опубликованном в 1840 г., к изложению в возможно более доступной форме «наиболее существенных результатов» своих исследований, Лобачевский начинает с краткого перечня тех положений абсолютной геометрии, на которые ему придется сослаться. Эти положения различны по своему характеру и значению. Одни из них представляют собою определения некоторых начальных понятий (например, прямой как геометрического места точек твердого

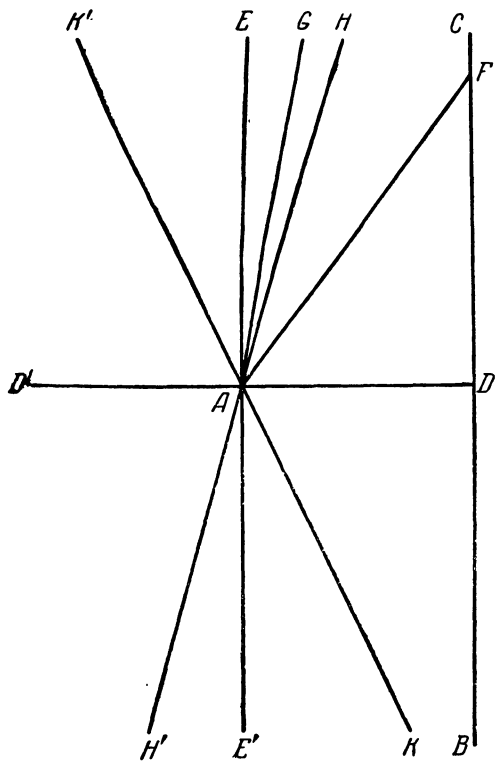
¹⁾ В дальнейшем мы будем цитировать это сочинение как «Г. И.».

тела, остающихся неподвижными при таком движении тела, при котором две точки находятся в покое), другие представляют собой постулаты (например, две прямые не могут пересекаться в двух точках); третьи представляют собой теоремы абсолютной геометрии, обычно доказываемые во всех руководствах по геометрии. Этот перечень не претендует на полноту, и в подробный разбор его мы не будем входить¹⁾. Отметим только, что среди положений, носящих характер постулатов, имеется, следующее (№ 3): «Прямая линия при достаточном продолжении в обе стороны должна выходить за всякие пределы и, таким образом, делит ограниченную часть плоскости на две части». Этим положением Лобачевский систематически пользуется для тех целей, для которых Паш ввел постулат о прямой, пересекающей сторону треугольника.

Закончив этот перечень, Лобачевский ведет следующее рассуждение («Г. И.», рубр. 16).

«Все прямые линии, выходящие в некоторой плоскости из одной точки, могут быть, по отношению к некоторой заданной прямой той же плоскости, разделены на два класса, именно на пересекающие [эту прямую] и на непересекающие [ее]. Граничная прямая одного и другого класса этих прямых называется параллельной заданной прямой».

«Все прямые линии, выходящие в некоторой плоскости из одной точки, могут быть, по отношению к некоторой заданной прямой той же плоскости, разделены на два класса, именно на пересекающие [эту прямую] и на непересекающие [ее]. Граничная прямая одного и другого класса этих прямых называется параллельной заданной прямой».



Черт. 63.

Это основное рассуждение Лобачевский поясняет следующими соображениями.

«Из точки A (черт. 63)²⁾ опустим на [заданную] линию BC перпендикуляр AD , к которому, в свою очередь, восставим перпендикуляр AE . Прямые, выходящие из точки A внутри прямого угла EAD , либо все встречают прямую DC , как например AF , либо же некоторые [из них], подобно перпендикуляр AE , не встречают прямую DC . Не зная, есть ли перпендикуляр AE единственная прямая, не встречающая DC , будем считать возможным, что существуют еще другие прямые, например AG , которые не встречают DC , сколько бы мы их ни продолжали. При переходе от пересекающих прямых AF к непересекающим AG мы неизбежно встретим [некоторую] прямую AH , параллельную DC , — граничную прямую, по одну

¹⁾ Читатель найдет такой разбор в комментариях к русскому переводу «Г. И.», принадлежащих автору настоящего сочинения.

²⁾ У Лобачевского — «черт. 1».

сторону которой ни одна прямая AG не встречает DC , между тем как по другую сторону каждая прямая AF пересекает DC ».

Это рассуждение содержит в себе основное положение, приобщая которое к остальным постулатам, заменяя им постулат Евклида о параллельных, Лобачевский строит свою неевклидову геометрию. Вдумавшись, очень легко усмотреть, что это положение сложно по своему содержанию: оно содержит своеобразное допущение, связанное с ним утверждение и определение, которые нужно расчленить, как это делает Лобачевский в других своих работах, и уточнить, в соответствии с современными установками.

6. Уточнение исходного положения Лобачевского. Прежде всего, извлечем из приведенной цитаты то основное допущение, которое Лобачевский противопоставляет V постулату Евклида и которое приводит к неевклидовой геометрии:

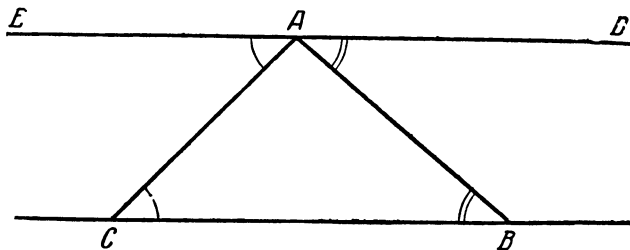
Постулат Лобачевского. Через точку A , лежащую вне прямой BC , в плоскости ABC проходят по крайней мере две прямые, не встречающие прямой BC .

Непосредственно этот постулат является противоположением не столько тексту постулата Евклида, сколько так называемой плэйферовой его форме (§ 14, рубр. 3, стр. 115). Так как, однако, постулаты Евклида и Плэйфера вполне эквивалентны, то существо противоположения от этого не меняется.

Более того, если принять, что существует хотя бы одна прямая BC и вне ее хотя бы одна точка A , через которую проходит только одна прямая, не встречающая BC , то отсюда с необходимостью будет следовать справедливость этого утверждения для всякой точки A' относительно любой прямой $B'C'$, не содержащей этой точки.

В самом деле, положим, что через точку A в плоскости ABC проходит только одна прямая EAD , не встречающая прямой BC (черт. 64).

Если соединим ее с точками B и C этой прямой, то, очевидно, $\angle EAC = \angle ACB$ и $\angle DAB = \angle ABC$. Поэтому сумма углов в треугольнике ABC равна $2d$, а вследствие этого, по второй теореме Лежандра (§ 15, рубр. 6, стр. 141), сумма внутренних углов



Черт. 64.

всякого треугольника равна $2d$. Из этого же, как мы знаем, вытекает V постулат Евклида в наиболее общей его формулировке.

Вместе с тем и обратно — если существует хотя бы одна прямая BC и вне ее точка A , через которую в плоскости ABC проходит более одной прямой, не встречающей прямой BC , то то же имеет место во всякой точке A относительно любой прямой BC . Таким образом, сформулированный выше постулат может быть заменен другим, непосредственные требования которого значительно по сравнению с ним сокращены, а именно:

В пространстве существует такая прямая BC и вне ее некоторая точка A , через которую в плоскости ABC проходят по крайней мере две прямые, не встречающие прямой BC .

Присоединение к абсолютной геометрии последнего постулата влечет за собою выполнение всех требований, содержащихся в постулате

Лобачевского, как он был выражен выше. Пространство, в котором выполняются абсолютная геометрия и постулат Лобачевского, принято в настоящее время называть гиперболическим пространством; плоскость, в которой выполняются те же требования, называют гиперболической плоскостью. Причина такого наименования будет выяснена ниже. Самая терминология предполагает, следовательно, возможность существования такого пространства, такой плоскости. Гиперболическую плоскость и пространство, таким образом определенные, будем обозначать соответственно через L_2 и L_3 (пространство Лобачевского двух и трех измерений).

Усвоение гиперболической геометрии, геометрии гиперболического пространства или гиперболической плоскости, к изложению которой мы сейчас приступаем, еще и в настоящее время часто встречается у начинающих затруднение вследствие того, что как самый постулат Лобачевского, так и проистекающие из него выводы противоречат нашим установившимся геометрическим представлениям. Как было выяснено в предыдущей главе, постулат Лобачевского, как и равносильные ему другие постулаты, неоднократно выдвигались с целью доказательства постулата Евклида от противного. При доказательстве от противного мы всегда исходим из положения, противоречащего нашим представлениям, и оперируем такими неправдоподобными положениями, пока не придем к явному логическому противоречию с установленными уже предложениями. Читатель может поэтому по-началу воспринимать выводы неевклидовой геометрии так, как он воспринимает рассуждения в доказательствах от противного. По мере разворачивания неевклидовой геометрии эти выводы утрачивают свою кажущуюся несообразность и, напротив, последовательность и стройность результатов укрепляют уверенность в их логической законности.

Мы приступаем теперь к изложению геометрии гиперболической плоскости.

7. Сумма углов в прямолинейном многоугольнике. В связи с установленными предложениями абсолютной геометрии постулат Лобачевского непосредственно приводит к ряду выводов, составляющих первые теоремы гиперболической геометрии. Начнем с предложений, относящихся к сумме углов треугольника и многоугольника.

Теорема 1. В гиперболическом пространстве сумма внутренних углов прямолинейного треугольника меньше $2d$.

Это уже отмечено выше и следует непосредственно из теорем Лежандра. В самом деле, если бы сумма углов хотя бы в одном треугольнике была равна $2d$, то она была бы равна $2d$ во всяком прямолинейном треугольнике и, следовательно, выполнялся бы постулат Евклида (имела бы место евклидова геометрия).

Разность $2d - S$, где S — сумма внутренних углов треугольника, называется угловым дефектом треугольника (§ 15, рубр. 6, стр. 139).

Следующие теоремы выводятся с такой простотой, что вряд ли нужно приводить их доказательства.

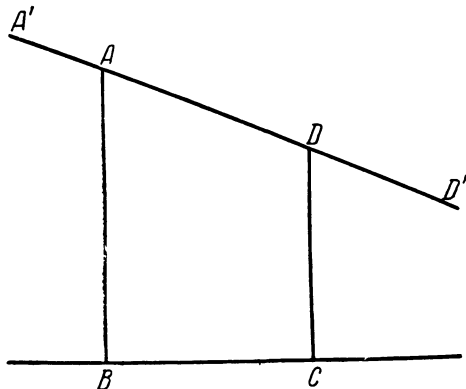
Теорема 2. Во всяком прямолинейном многоугольнике сумма внутренних углов меньше $2d(n-2)^1$, в частности, в четырехугольнике сумма углов меньше $4d$.

¹⁾ Мы не будем постоянно повторять «в гиперболической плоскости», так как это в дальнейшем всегда подразумевается, если не оговорено противное.

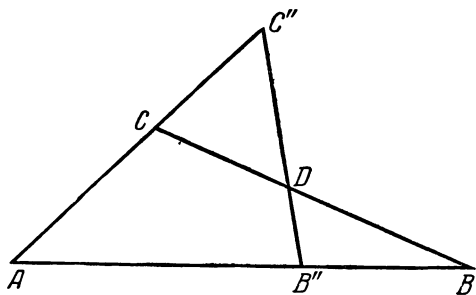
Разность $2d(n-2)-S$, где S есть сумма внутренних углов многоугольника, называется угловым дефектом многоугольника.

Теорема 3. В прямолинейном треугольнике внешний угол больше суммы внутренних с ним не смежных углов.

Теорема 4. В двупрямоугольнике, т. е. в четырехугольнике с двумя прямыми углами при одной стороне — так называемом нижнем основании — внешний угол при



Черт. 65.



Черт. 66.

верхнем основании больше внутреннего угла, с ним не смежного, но прилежащего к тому же основанию.

На черт. 65 $\angle A'AB > \angle ADC$ и $\angle D'DC > \angle DAB$.

Теорема 5. В четырехугольнике Саккери внутренние углы при верхнем основании острые.

Теорема 6. В четырехугольнике Ламберта (см. § 16, рубр. 3, стр. 149) один угол острый.

Теорема 7. а) Если треугольник разбит трансверсалью на два треугольника, то его угловой дефект равен сумме угловых дефектов составляющих треугольников. б) Во всяком треугольнике, отсеченном от другого треугольника, угловой дефект меньше, чем в треугольнике, от которого он отсечен. (Это — лишь развитие теоремы, которая была предположительно высказана в § 15, рубр. 6, стр. 139.)

Теорема 8. Если три угла одного треугольника равны трем углам другого треугольника, то треугольники равны (конгруэнтны).

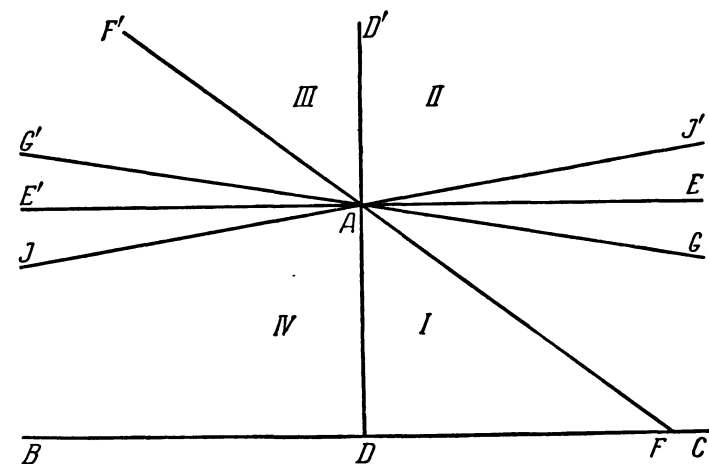
Доказательство. Если при этом хоть одна сторона одного треугольника равна соответствующей стороне другого треугольника, то треугольники равны по известной теореме абсолютной геометрии. Допустим поэтому, что такое равенство не имеет места; пусть в треугольниках ABC и $A'B'C'$ $\angle A = \angle A'$, $\angle B = \angle B'$, $\angle C = \angle C'$, но $A'B' < AB$. Так как $\angle A' = \angle A$, то мы можем наложить треугольник $A'B'C'$ на треугольник ABC так, чтобы стороны $A'B'$ и $A'C'$ расположились по прямым AB и AC . Точка B' упадет при этом в точку B'' внутри стороны AB (черт. 66). Если бы точка C' при этом упала в точку C'' за точкой C , то отрезок $C''B''$ пересекся бы с отрезком CB в некоторой точке D ; образова-

лись бы два треугольника CDC'' и BDB'' и угол $AB''C''$ ($=\angle B'$) был бы больше угла B и, таким же образом, угол $AC''B''$ ($=\angle C'$) был бы меньше угла ACB ; то и другое противоречит условию. Если бы точка C' упала в точку C'' внутри стороны AC , то угловой дефект треугольника $AC''B''$ ($=\angle A'C'B'$), в силу предыдущей теоремы, был бы меньше углового дефекта треугольника ABC , что также противоречит условию. Сделанное допущение, таким образом, неправильно; все стороны одного треугольника равны соответствующим сторонам другого треугольника, — треугольники равны.

Таким образом, в гиперболической плоскости треугольник определяется своими углами; неравных подобных треугольников в том смысле, как этот термин понимается в евклидовой геометрии, в гиперболической плоскости не существует. Поэтому Валлис, допустив, что каждому треугольнику соответствует подобный треугольник, да еще при любом отношении подобия, сделал допущение, эквивалентное постулату о параллельных линиях; в этом, как теперь совершенно ясно, и заключалась его ошибка.

§ 18. ГИПЕРБОЛИЧЕСКАЯ ПАРАЛЛЕЛЬ

1. Определение гиперболической параллели. Возвратимся к чертежу 63, который мы здесь вновь воспроизводим в несколько ином расположении (черт. 67). Продолжив перпендикуляры AE и AD , получим при точке A

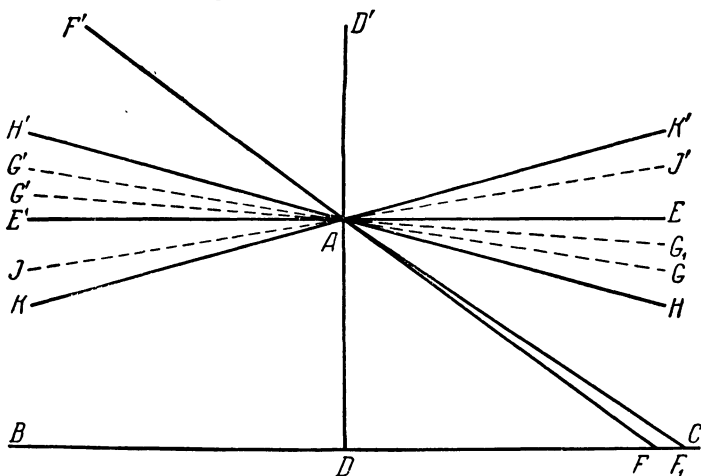


Черт. 67.

четыре прямых угла (четыре квадранта), попарно друг другу вертикальных: EAD (I), EAD' (II), $D'AE'$ (III), $E'AD$ (IV). Каждая прямая, отличная от AD и AE и проходящая через точку A , расположена в одной или в другой паре этих вертикальных углов. Прямая $I'AI$, расположенная во II и IV квадрантах, ведет себя по отношению к прямой CB (пересекает или не пересекает ее) совершенно так же, как симметричная ей относительно перпендикуляра AD прямая GAG' в I и III квадрантах. Согласно постулату Лобачевского, в плоскости ABC (следовательно, гиперболической) через точку A , кроме $E'AE$, проходит еще по крайней мере одна прямая $G'AG$, не встречающаяся прямой BC . Мы видим теперь, что вместе с $G'AG$ должна существовать еще одна прямая $I'AI$, не встречающаяся BC и симметричная $G'AG$ относительно перпендикуляра AD . Вообще, ввиду

этой симметрии рассмотрим сначала прямые, проходящие в I и III квадрантах (черт. 68). Если $G'AG$ есть прямая, отличная от $E'AE$ и не встречающаяся прямой BC , то и все прямые G'_1AG_1 , расположенные между этими двумя прямыми, т. е. внутри вертикальных углов GAE и $E'AG'$, не встречаются BC ; этих не встречающихся имеется, таким образом, бесчисленное множество. Вместе с тем, прямые, проходящие в квадрантах EAD и $E'AD'$, распадаются на две категории: прямые первой категории, как $F'AF$, встречаются BC , прямые второй категории, как $G'_1AG'_1$, не встречаются прямой BC . При этом прямые одной категории неизбежно расположены по одну сторону прямых второй категории. В самом деле, если прямые AG и AG_1 не встречаются BC , то ни одна прямая, лежащая между ними (т. е. внутри угла GAG_1) не может встречать BC , т. е. не может принадлежать первой категории.

Это разбиение приводит, таким образом, к дедекиндову сечению пучка прямых, проходящих в I и III квадрантах. Ввиду непрерывности прямой и связанной с этим непрерывности пучка прямых должна существовать прямая, которая это сечение производит; это значит, что должна существовать либо последняя прямая первой категории (последняя встречающаяся прямая), либо первая прямая второй категории (первая не встречающаяся прямая). Но легко себе уяснить, что последней встречающейся прямой быть не может; в самом деле, если прямая AF встречается прямую BC в точке F , то, взяв точку F_1 за F на луче DC (черт. 68), мы, очевидно, полу-



Черт. 68.

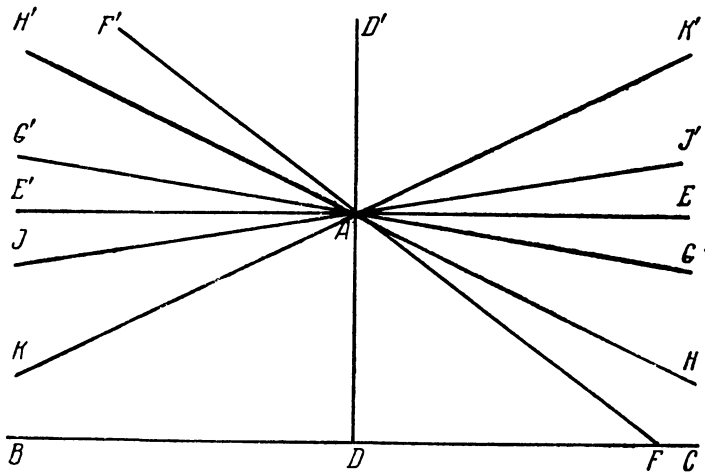
чим вновь прямую AF_1 , встречающую BC . Следовательно, в квадрантах I и III имеется первый луч AN , не встречающий прямой BC ; эту прямую Лобачевский и называет параллельной BC в точке A в квадрантах I и III. Это и есть та прямая AN , о которой Лобачевский говорит в приведенной выше цитате (§ 17, рубр. 5, стр. 158). При переходе в первом квадранте от AD к AE это есть первая прямая, не встречающая BC ; она отделяет лучи, встречающие BC , от лучей, ее не встречающих.

Как уже выше указано, прямые, проходящие внутри II и IV углов, ведут себя относительно BC совершенно аналогично; внутри II и IV квадрантов (черт. 68) проходит прямая AK , симметричная AN относительно перпендикуляра AD и отделяющая со стороны DB пересекающие лучи от непересекающих; это есть прямая, параллельная прямой BC в точке A в квадрантах II и IV. Общая картина расположения в гиперболической

плоскости прямых, проходящих через точку A , относительно прямой BC представляется в таком виде, как она изображена на черт. 69.

Через точку A в гиперболической плоскости ABC проходят две прямые HN' и KK' , симметричные относительно перпендикуляра AD , не встречающие BC и отделяющие прямые, встречающие BC , от не встречающих ее. Это значит, что прямые, проходящие в вертикальных углах $НАК$ и $Н'АК'$, встречаются прямую BC ; прямые же, проходящие в вертикальных углах $НАК'$ и $Н'АК$, прямой BC не встречаются.

Лобачевский называет прямые первой категории сходящимися с BC , прямые второй категории — расходящимися с BC ; прямые же $Н'АН$ и $К'АК$, отделяющие прямые, сходящиеся с BC , от рас-



Черт. 69.

ходящихся с нею, он называет параллельными BC . На черт. 69 черным цветом изображены прямые, проходящие через точку A и сходящиеся с BC , красным — прямые, расходящиеся с BC , а синим цветом — прямые, параллельные BC .

Таким образом, в гиперболической плоскости через точку A , лежащую вне прямой BC , проходят две параллельные ей прямые, которые — полезно это повторить — в этой точке отделяют прямые, сходящиеся с BC , от прямых, расходящихся с BC . Прямая $E'AE$, перпендикулярная к AD , очевидно, принадлежит к числу прямых, расходящихся с BC . Евклидова плоскость тем именно отличается от гиперболической, что в ней две параллели сливаются в одну, именно, сливаются с перпендикуляром $E'AE$ к AD .

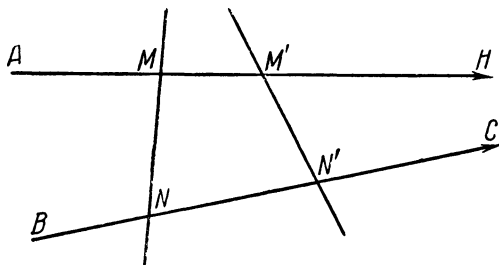
2. Различение параллелей. Две параллели к одной и той же прямой, проходящие через одну точку, можно, однако, различить, исходя из следующих соображений.

Параллель $АН$ (тот же чертеж 69) образует с перпендикуляром AD острый угол с той стороны, в которую обращен луч DC (в I квадранте); параллель $АК$ образует с тем же перпендикуляром острый угол с противоположной стороны, в которую обращен луч DB (в IV квадранте). Это приводит к различению двух параллелей. Самую прямую BC можно считать обращенной либо в сторону луча DC , либо в сторону луча DB ; можно

было бы расщепить эту прямую на две ориентированные прямые, из которых одна, $\overrightarrow{BC}$, обращена в сторону луча DC , другая, $\overrightarrow{CB}$, обращена в сторону луча DB ¹⁾. Вместе с тем естественно рассматривать прямую $\overrightarrow{AH}$, как параллельную ориентированной прямой BC , а прямую $\overrightarrow{AK}$ — как параллельную ориентированной прямой CB . Более того, самые параллели целесообразнее при этом считать ориентированными, и именно, каждую обращенной в ту сторону, с которой она образует острый угол с перпендикуляром AD . Обозначая ориентированную прямую стрелкой, можно записать:

$$\overrightarrow{AH} \parallel \overrightarrow{BC}, \quad \overrightarrow{AK} \parallel \overrightarrow{CB}^2)$$

Если две ориентированные прямые AH и BC не пересекаются и обращены в одну сторону по отношению к какой-либо секущей MN (черт. 70), то они обращены в ту же сторону по отношению ко всякой другой секущей $M'N'$. В таком случае говорят, что эти две прямые сонаправлены. Соответственно этому параллель $\overrightarrow{AH}$ (черт. 69) сонаправлена с $\overrightarrow{BC}$, параллель $\overrightarrow{AK}$ сонаправлена с $\overrightarrow{CB}$. Вместе с тем, результат, к которому мы пришли выше, можно формулировать следующим образом:



Черт. 70.

Первая основная теорема. В гиперболической плоскости через точку A , лежащую вне прямой BC , проходят две параллельные ей прямые; эти параллели соответствуют двум сторонам обращения прямой BC . Но если прямая ориентирована, то через точку, лежащую вне ее, проходит одна и только одна сонаправленная с ней параллель.

Отметим, что точное установление первой основной теоремы существенно опирается на принцип Дедекинда, характеризующий непрерывность прямой, а вместе с тем и пучка прямых.

3. Определение ориентированной параллели. Пользуясь только ориентированной параллелью, лучше всего ее определить следующим образом.

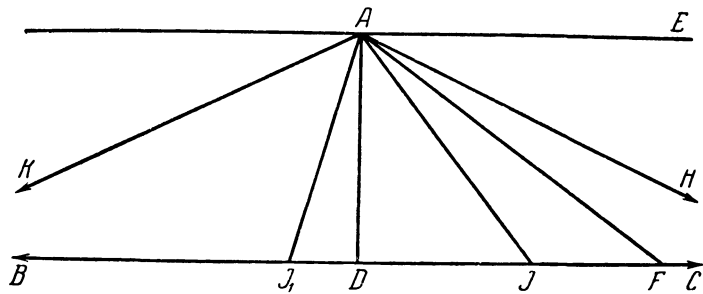
Пусть $\overrightarrow{BC}$ (черт. 71) будет ориентированная прямая, A — точка вне ее. Соединим A с произвольной точкой I прямой BC . Будем называть ориентированную прямую AH параллельной $\overrightarrow{BC}$ в точке A , если она не пересекает $\overrightarrow{BC}$, но всякая прямая AF , проходящая внутри угла IAN ,

¹⁾ Для сокращения речи иногда вводят для ориентированной прямой специальное название. Термин «луч», которым пользуются некоторые авторы (например, Либман), для этого не годится, потому что луч — это ориентированная полупрямая. Штуди (E. Study) называет ориентированную прямую «копьем» (Speer); вряд ли это удачно. Мы будем либо говорить полностью «ориентированная прямая», либо обозначать ее короче «прямая $\overrightarrow{AB}$ », указывая стрелкой ориентацию прямой; термином же «луч» мы будем обозначать ориентированную полупрямую.

²⁾ Некоторые авторы по почину И. Больиаи пользуются знаком $\parallel$ вместо $\parallel$, чтобы отметить, что речь идет о гиперболическом параллелизме. Однако обычно это ясно из контекста.

пересекает $\vec{BC}$. Последнее требование, очевидно, именно и выражает, что прямая $\vec{AH}$ отделяет лучи, пересекающие $\vec{BC}$, от не пересекающих ее. Определение это, таким образом, вполне эквивалентно определению ориентированной параллели, как оно формулировано выше по замыслу Лобачевского.

К этому сделаем, однако, два замечания. Во-первых, выбор точки I на прямой $\vec{BC}$ не имеет никакого значения. В самом деле, если проведем перпендикуляр AD к $\vec{BC}$, то прямые, проходящие внутри угла IAD , встречаются отрезок ID , а следовательно, прямую $\vec{BC}$, где бы точка I ни лежала, по одну или по другую сторону точки D (положения I и I_1 на черт. 71). Поэтому прямая $\vec{AH}$, которая в угле DAE отделяет прямые, встречающие $\vec{BC}$, от не встречающих ее, лежит за AI в сторону ориентации $\vec{BC}$.



Черт. 71.

В связи с этим находится и второе замечание: прямая $\vec{AH}$, параллельная $\vec{BC}$, образует с перпендикуляром AD острый угол, потому что перпендикуляр к нему AE принадлежит уже к числу прямых, которые в точке A расходятся с $\vec{BC}$. Прямая $\vec{AK}$, параллельная $\vec{CB}$, согласно этому определению, характеризуется тем, что она не пересекает $\vec{CB}$, между тем как всякая прямая, проходящая внутри угла IAK , пересекает $\vec{CB}$. И эта ориентированная параллель, таким образом, неизбежно образует с перпендикуляром AD острый угол с той стороны, в которую она обращена.

Угол IAH , составленный ориентированной прямой $\vec{AH}$ и ориентированной же прямой $\vec{AI}$, идущей от точки A к какой-либо точке I прямой $\vec{BC}$, мы будем называть опорным углом прямой $\vec{AH}$ в точке A относительно прямой $\vec{BC}$; таким образом, этот опорный угол может быть выбран с большим произволом, поскольку точку I на прямой $\vec{BC}$ можно выбрать совершенно произвольно.

Повторим еще раз определение параллели в этих терминах.

Заключительное определение гиперболической параллели. Ориентированная прямая $\vec{AH}$ в точке A параллельна ориентированной прямой $\vec{BC}$, если а) она не пересекает прямую $\vec{BC}$, б) сонаправлена с ней и с) если всякая прямая, проходящая внутри какого-либо опорного угла IAH , встречает $\vec{BC}$.

§ 19. ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ЛИНИЙ В ГИПЕРБОЛИЧЕСКОЙ ПЛОСКОСТИ

1. Особенности гиперболической параллели. Определение гиперболической параллели имеет особенности, на первый взгляд существенно отличающие ее от параллели в евклидовой плоскости. Во-первых, определение ориентированной прямой $\overrightarrow{AH}$, параллельной сонаправленной прямой $\overrightarrow{BC}$, существенно связывается с определенной ее точкой A , в которой она с надлежащей стороны отделяет прямые, пересекающие $\overrightarrow{BC}$, от не пересекающих ее. Естественно возникает вопрос: в какой мере эта особенность существенна; иначе говоря, если прямая $\overrightarrow{AH}$ в точке A отделяет прямые, пересекающие $\overrightarrow{BC}$, от не пересекающих, то производит ли она то же отделение в другой своей точке A' ? Во-вторых, если прямая $\overrightarrow{AH}$ параллельна $\overrightarrow{BC}$, то является ли, обратно, $\overrightarrow{BC}$ хотя бы в одной своей точке параллельной $\overrightarrow{AH}$, как это имеет место в евклидовой плоскости (есть ли параллелизм двух сонаправленных прямых—свойство взаимное)? Наконец, если прямая $\overrightarrow{AH} \parallel \overrightarrow{BC}$, а $\overrightarrow{BC} \parallel \overrightarrow{DE}$, то параллельна ли прямая $\overrightarrow{AH}$ прямой $\overrightarrow{DE}$, как это имеет место в евклидовой плоскости (транзитивность параллелизма)?

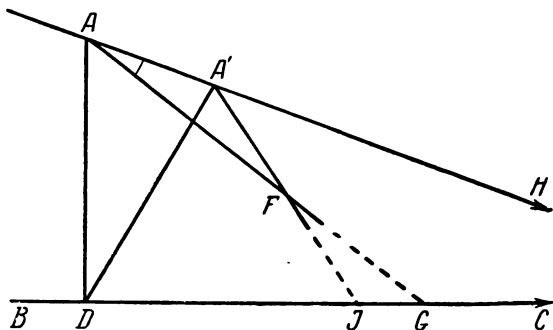
2. Смещение точки параллелизма.

Теорема 1. Если ориентированная прямая $\overrightarrow{AH}$ параллельна $\overrightarrow{BC}$ в некоторой точке A , то она ей параллельна и во всякой другой своей точке A' .

При доказательстве будем различать два случая.

Положим сначала, что точка A' лежит на $\overrightarrow{AH}$ относительно точки A со стороны параллелизма (черт. 72) (от A к H). Сохраняя прежние обозначения, проведем прямую $A'D$ и примем угол $DA'H$ за опорный угол в точке A' .

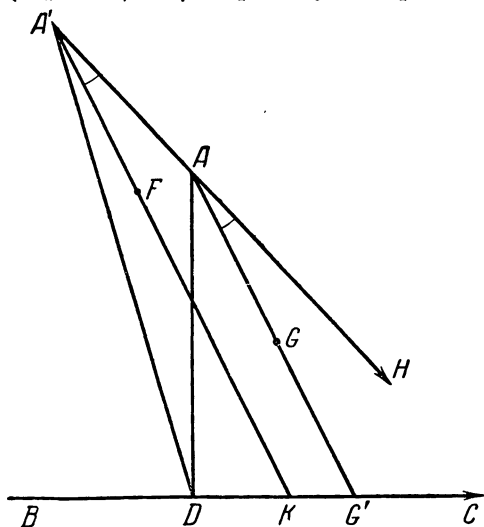
Так как прямая $\overrightarrow{A'H}$ не встречает $\overrightarrow{BC}$ и сонаправлена с ней, то доказательство



Черт. 72.

теоремы сводится к тому, чтобы обнаружить, что всякая прямая $A'\overrightarrow{F}$, проходящая внутри угла $DA'H$, встречает $\overrightarrow{BC}$. Эта прямая входит внутрь полосы $HADC$, ограниченной перпендикуляром AD и лучами AH и DC . Выбрав точку F произвольно на $A'\overrightarrow{F}$ внутри этой полосы, проведем прямую $\overrightarrow{AF}$. Так как в точке A прямая $\overrightarrow{AH}$ по условию параллельна $\overrightarrow{BC}$, то прямая $\overrightarrow{AF}$, проходящая внутри опорного угла DAH , встретит $\overrightarrow{BC}$ в некоторой точке G . Вместе с тем образуется треугольник ADG , одну из сторон которого (AG) пересекает прямая $A'\overrightarrow{F}$. Согласно аксиоме Паша, она должна встретить еще одну сторону этого треугольника. Но стороны AD она встретить не может, потому что отрезок AD и луч $A'\overrightarrow{F}$ лежат по разные стороны прямой $A'D$; следовательно, она встретит сторону DG , а вместе с тем и прямую $\overrightarrow{BC}$ в некоторой точке I .

Теперь обратимся ко второму случаю, когда точка A' лежит от A в сторону, противоположную параллелизму (на продолжении луча AH) (черт. 73). За опорный угол примем угол $DA'H$; доказательство сводится



Черт. 73.

к тому, чтобы обнаружить, что всякая прямая $A'F$, проходящая внутри угла $DA'H$, пересекает $\vec{BC}$. Чтобы это показать, заметим, что угол DAH , как внешний для треугольника $DA'A$, больше угла $DA'A$. Если поэтому при точке A и луче AH с той же стороны от AH построим угол GAN , равный $FA'H$, то его сторона—луч AG —пройдет внутри угла DAH и поэтому встретит прямую $\vec{BC}$ в точке G' . Прямая $A'F$ (можно сказать, луч $A'F$) войдет внутрь четырехугольника $DA'AG'$ и потому должна из него выйти. Сторон четырехугольника $A'D$ и $A'A$ она уже встретить не может; она не может также встретить прямой AG , поскольку $A'F$ и AG при пересече-

нии с $A'A$ образуют равные соответственные углы; она встретит поэтому сторону DG' этого четырехугольника, а вместе с тем прямую $\vec{BC}$. Теорема доказана.

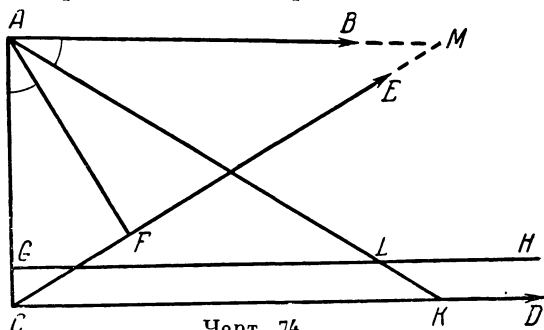
Доказательства этого и следующего предположений принадлежат Лобачевскому («Г. И.», предложения 17 и 18).

Ввиду установленной теоремы, нам уже нет необходимости говорить, что ориентированная прямая AH параллельна сонаправленной прямой $\vec{BC}$ в точке A ; мы будем просто говорить: ориентированная прямая AH параллельна сонаправленной прямой $\vec{BC}$.

3. Взаимность параллелизма.

Теорема 2. Если ориентированная прямая AB параллельна $\vec{CD}$, то и, обратно, прямая $\vec{CD}$ параллельна $\vec{AB}$.

Для доказательства опустим из точки A на прямую $\vec{CD}$ перпендикуляр AC (черт. 74). Чтобы доказать, что $\vec{CD} \parallel \vec{AB}$, примем угол ACD за опорный и покажем, что всякий луч CE , входящий внутрь этого угла, встречает луч AB . С этой целью опустим из точки A на прямую CE перпендикуляр AF ; он упадет в точку F со стороны острого угла ACF ; вместе с тем пройдет внутри угла BAC , то $\angle CAF$ будет меньше $\angle CAB$, и мы



Черт. 74.

можем при точке A и луче AB построить угол BAK , равный FAC . Так как $\vec{AB} \parallel \vec{CD}$, то луч AK , проходя внутри угла BAC , встретит прямую $\vec{CD}$ в некоторой точке K . Так как $AF < AC$, то на отрезке AC отложим отрезок $AG = AF$ и из точки G проведем к AC перпендикуляр GH внутрь треугольника ACK ; выходя из него, он встретит гипотенузу AK в точке L . По построению $\angle BAF = \angle LAG$; если поэтому повернем треугольник LGA вокруг точки A так, чтобы его катет AG совпал с AF , то его стороны AL и GL расположатся по прямым AB и FE ; точка L совместится с некоторой точкой M , в которой луч FE (а вместе с тем и CE) встретит AB . Теорема доказана. В случае, если перпендикуляр AF падает по другую сторону прямой AB , пересечение явно имеет место.

Теперь мы имеем возможность внести дальнейшее упрощение в нашу терминологию; нам нет необходимости говорить «прямая $\vec{AB}$ параллельна прямой $\vec{CD}$ », мы можем говорить проще: «прямые $\vec{AB}$ и $\vec{CD}$ параллельны».

Из доказанных теорем 1 и 2 вытекает, далее, следующее. Если прямая AB в какой-либо из своих точек принадлежит к числу прямых, расходящихся с прямой CD , то она и во всякой другой своей точке принадлежит к прямым, расходящимся с CD ; мы можем говорить «прямая AB расходится с прямой CD ». Но если это имеет место, то и прямая CD во всех своих точках принадлежит к числу прямых, расходящихся с AB . Это доказывается от противного на основании предыдущего предложения. Мы можем в этом смысле говорить: «прямые AB и CD расходятся».

Само собой разумеется, что в этих случаях ориентация прямых не играет никакой роли. Сторона, в которую обращена одна или другая прямая, играет существенную роль только при их параллелизме.

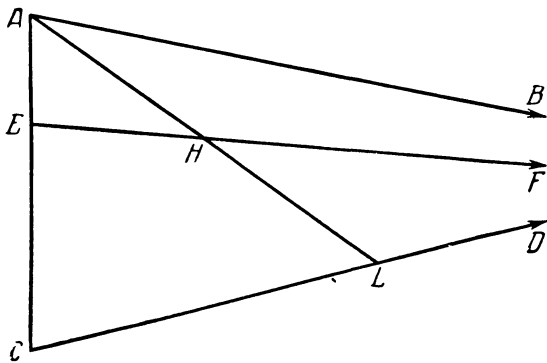
Две прямые, перпендикулярные к третьей, всегда расходятся.

4. Вспомогательные предложения.

Теорема 3. Ориентированная прямая, сонаправленная с двумя параллельными прямыми и расположенная между ними, параллельна обеим.

Доказательство.

Пусть $\vec{AB} \parallel \vec{CD}$ и ориентированная прямая EF , с ними сонаправленная, расположена между ними. Это значит, отрезок AC (черт. 75), соединяющий произвольную точку A прямой $\vec{AB}$ с произвольной точкой C прямой $\vec{CD}$, встречает прямую $\vec{EF}$ в некоторой точке E и все три прямые направлены в одну и ту же сторону относительно

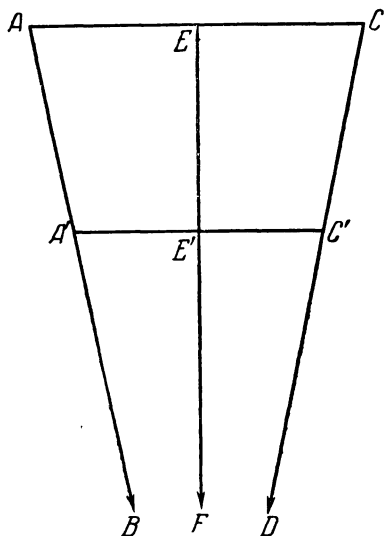


Черт. 75.

секущей AC . Чтобы обнаружить, что $\vec{AB} \parallel \vec{EF}$, нужно показать, что любая прямая AH , проходящая внутри опорного угла BAE (BAC), пересекает $\vec{EF}$. Так как мы можем рассматривать BAC как опорный угол в точке A

параллели $\overrightarrow{AB}$ относительно $\overrightarrow{CD}$, то проходящая внутри его прямая $\overrightarrow{AH}$ встречает $\overrightarrow{CD}$ в некоторой точке L . Так как точки A и L лежат по разные стороны прямой $\overrightarrow{EF}$, то отрезок AL встречает прямую $\overrightarrow{EF}$. Теорема доказана.

Очень важно заметить следующее. Предыдущее рассуждение доказывает, собственно, больше того, что содержится в высказанной теореме. Именно, если лучи AB и CD параллельны (принадлежат ориентированным параллельным прямым AB и CD), а луч EF , выходящий из точки E отрезка AC и обращенный в ту же сторону, лежит между ними, то он параллелен лучам AB и CD ; поэтому вся прямая EF им параллельна и остается между ними.



Черт. 76.

5. Секущая равного наклона. Прямая AC называется секущей равного наклона прямых AB и CD , если она при пересечении с этими прямыми образует равные внутренние односторонние углы (BAC и DCA) (черт. 76).

Теорема 4. Если AC есть секущая равного наклона двух параллельных ориентированных прямых $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$, то перпендикуляр EF , восстановленный из середины E отрезка AC и обращенный в ту же сторону, в которую обращены эти прямые, параллелен им.

В самом деле, пересечь какую-либо из прямых AB и CD перпендикуляр EF не может, потому что через точку пересечения по симметрии должна была бы проходить и другая параллель. Поэтому, имея точку E , лежащую между параллелями, перпендикуляр EF остается между ними; в силу предыдущей теоремы он им параллелен.

Если $A'C'$ есть другая секущая равного наклона к тем же параллелям, то перпендикуляр EF встречает вторую секущую $A'C'$ в некоторой точке E' . По симметрии легко убедимся, как и выше в аналогичных случаях, что прямая EE' делит отрезок $A'C'$ пополам и перпендикулярна к нему. Мы приходим, таким образом, к следующей добавочной теореме.

Теорема 4а. Середины всех секущих равного наклона к двум параллельным прямым лежат на одной прямой, перпендикулярной к этим секущим и параллельной этим параллелям.

Эта прямая называется средней прямой полосы, ограничиваемой этими двумя параллелями. Ее рассматривают также как биссектрису (нулевого) угла, образуемого этими параллелями в бесконечно удаленной точке.

6. Транзитивность параллелизма. Под этим в соответствии с общим употреблением термина «транзитивность» разумеют следующее предложение.

Теорема 5. Если прямая $\overrightarrow{AB}$ параллельна прямой $\overrightarrow{CD}$, а эта последняя параллельна прямой $\overrightarrow{EF}$, то прямая $\overrightarrow{AB}$ параллельна $\overrightarrow{EF}$.

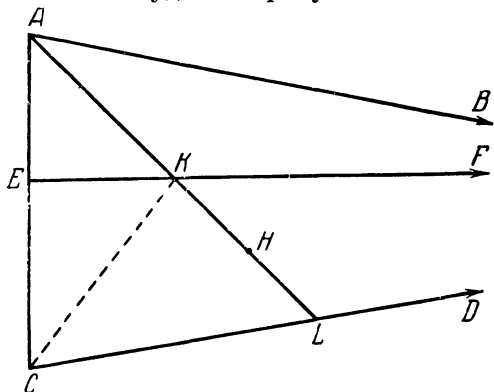
Ввиду взаимности параллелизма двух прямых то же предложение, очевидно, может быть выражено и так:

Теорема 5а. Две ориентированные прямые, параллельные третьей, параллельны между собой.

В этой последней формулировке мы и будем теорему доказывать.

Положим, что прямые $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ параллельны $\overrightarrow{EF}$ (черт. 77). Так как прямые $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ не встречаются прямой $\overrightarrow{EF}$, то каждая из них лежит по одну сторону ее. Здесь нужно поэтому различать два случая: а) обе прямые $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ лежат по одну сторону прямой $\overrightarrow{EF}$, б) прямые $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ лежат по разные стороны прямой $\overrightarrow{EF}$.

С этого последнего случая мы и начнем. Как бы ни были взяты точки A и C на соответственных



Черт. 77.

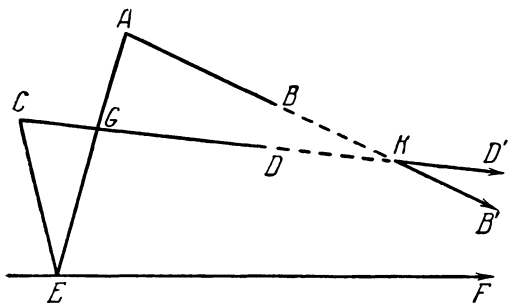
прямых, они лежат по разные стороны прямой $\overrightarrow{EF}$; прямая $\overrightarrow{EF}$ встречает поэтому отрезок AC в некоторой точке, которую и обозначим через E .

Так как обе ориентированные прямые $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ обращены с $\overrightarrow{EF}$ в одну сторону от секущей AC , то они и сами обращены в ту же сторону — они сонаправлены. Чтобы показать, что $\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{CD}$, достаточно будет обнаружить, что всякая прямая AH , проходящая внутри опорного угла CAB , встречает $\overrightarrow{CD}$. Но так как тот же угол CAB можно рассматривать как опорный относительно параллелей $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{EF}$, то прямая AH встречает $\overrightarrow{EF}$ в некоторой точке K .

Соединив C с K , получим угол CKF , внутри которого входит прямая AH , потому что лучи KC и KF (стороны этого угла) расположены по разные стороны прямой AH . А так как по взаимности параллелизма $\overrightarrow{EF} \parallel \overrightarrow{CD}$, угол же CKF можно рассматривать как опорный в точке K для параллелей $\overrightarrow{EF}$ и $\overrightarrow{CD}$, то проходящая внутри него прямая KH (или же AH) встретит $\overrightarrow{CD}$ в некоторой точке L . Теорема доказана.

Обратимся теперь к тому случаю, когда прямые $\overrightarrow{AB}$ и

$\overrightarrow{CD}$, параллельные прямой $\overrightarrow{EF}$, лежат по одну сторону ее (черт. 78). И в этом случае прямые $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ встретиться не могут, ибо из общей точки K ,

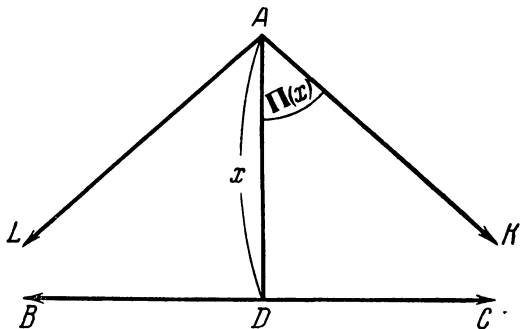


Черт. 78.

если бы таковая существовала, проходили бы две различные прямые $\vec{KB'}$ и $\vec{KD'}$, параллельные $\vec{EF}$ в одну и ту же сторону, что не может иметь места. В этом случае из произвольной точки E прямой $\vec{EF}$ проведем несовпадающие лучи EC и EA к точкам A и C , также произвольно выбранным на прямых $\vec{AB}$ и $\vec{CD}$. Эти лучи располагаются по одну сторону прямой $\vec{EF}$ и образуют с лучом EF углы CEF и AEF , один из которых помещается внутри другого; пусть этот меньший угол будет AEF . Так как угол CEF можно рассматривать как опорный по отношению к параллели $\vec{CD}$, то луч EA пересекает $\vec{CD}$ в некоторой точке G . При этом точки G и A лежат по одну сторону точки E и, следовательно, либо A лежит между E и G , либо G лежит между A и E . Допустим последнее. Тогда точка G лежит на луче EA между прямыми $\vec{AB}$ и $\vec{EF}$; а так как прямая $\vec{CD}$ ни одной из них не встречает, то она вся расположена между ними и, в силу теоремы 3, параллельна им, в частности, $\vec{CD} \parallel \vec{AB}$. Рассуждение не изменяется, если точка A лежит между E и G .

§ 20. УГОЛ ПАРАЛЛЕЛЬНОСТИ

1. Определение угла параллельности. Итак, через каждую точку A плоскости, лежащую вне прямой BC , проходят две и только две ориентированные прямые AK и AL , параллельные прямой BC ; точнее, одна из них параллельна прямой $\vec{BC}$ (ориентированной от B к C), другая параллельна прямой $\vec{CB}$ (обращенной в противоположную сторону) (черт. 79). Эти две прямые расположены симметрично относительно перпендикуляра AD , опущенного из точки A на прямую BC , образуя с ним с той стороны, в которую каждая из них обращена, равные острые углы ($\angle KAD = \angle LAD$). Этот общий (по величине) угол Лобачевский называл углом параллельности, соответствующим прямой BC в точке A . Ввиду основного значения этого понятия формулируем особо его определение.

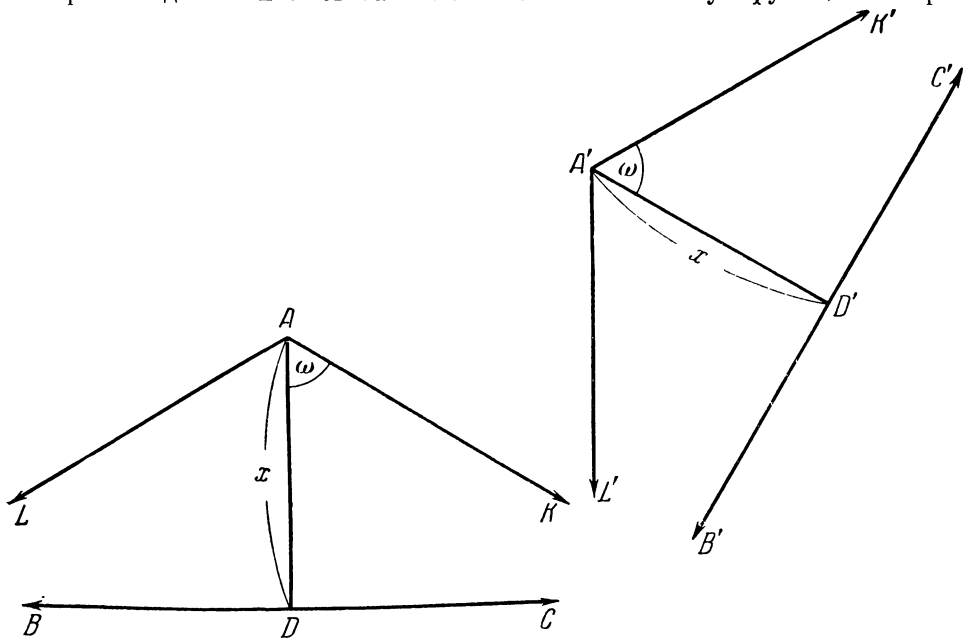


Черт. 79.

Определение. Углом параллельности, соответствующим данной прямой BC в данной точке A , вне ее лежащей, называется угол DAL или DAK , который ориентированная параллель AK или AL (соответственно к прямой $\vec{BC}$ или $\vec{CB}$) образует с перпендикуляром AD , опущенным из точки A на прямую BC с той стороны, в которую она обращена.

Если обозначим через x отрезок AD , то при том же x угол параллельности сохраняется то же значение, где бы ни были расположены точка A и прямая BC , ибо так называемый коннекс (A, BC) , т. е. точка A и пря-

мая BC , может быть совмещен с любым другим коннексом (A' , $B'C'$) (черт. 80), если $AD = A'D'$; при этом перемещении параллели AK и AL перейдут в параллели $A'K'$ и $A'L'$. Следовательно, угол параллельности ω в точке A относительно прямой BC представляет собой однозначную функцию отрезка x ; это есть выражение того, что угол параллельности есть инвариант движения. Лобачевский обозначает эту функцию через



Черт. 80.

$\Pi(x)$ ¹⁾; это обозначение сохранилось в современной литературе. Евклидова геометрия характеризуется тем, что в ней $\Pi(x)$ всегда есть прямой угол, каков бы ни был отрезок x .

На черт. 79

$$AD \perp BC, \quad \angle DAK = \angle DAL, \quad \vec{AK} \parallel \vec{BC}, \quad \vec{AL} \parallel \vec{CB}$$

$$AD = x, \quad \angle DAK = \angle DAL = \Pi(x). \quad (I)$$

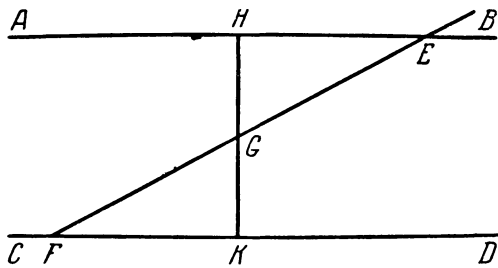
Здесь $\Pi(x)$ есть определенный угол, поскольку x есть определенный (по величине) отрезок. Можно, однако, считать, что x есть число, выражающее длину соответствующего отрезка, а $\Pi(x)$ —численное значение того же угла. В этом последнем понимании $\Pi(x)$ (его численное значение) зависит от выбора как единицы длины, так и единицы угла. Впрочем, всегда, поскольку не будет оговорено другое, мы будем считать, что угол выражен в радианной мере, т. е. в таких единицах, при которых прямой угол выражается числом $\frac{\pi}{2}$; это может быть достигнуто как в евклидовом, так и в гиперболическом пространстве. Вместе с тем при установленных соглашениях в гиперболическом пространстве всегда

$$0 < \Pi(x) < \frac{\pi}{2}. \quad I_1)$$

¹⁾ Впрочем, в сочинении «О началах геометрии» [86] Лобачевский обозначает этот угол через $F(x)$.

2. Монотонность функции $\Pi(x)$. Первая качественная характеристика функции $\Pi(x)$ выражается теоремой 2, которой мы предположим следующее.

Теорема 1. Если в гиперболической плоскости при пересечении двух прямых третьей имеет место одно из соотношений: а) соответственные углы равны, б) внутренние накрест лежащие углы равны, с) внешние накрест лежащие углы равны, д) сумма внутренних односторонних углов равна двум прямым, е) сумма внешних односторонних углов равна двум прямым (иными словами, если имеет место одно из двенадцати равенств, приведенных в рубр. 1, § 5, на стр. 57), то прямые расходятся.



Черт. 81.

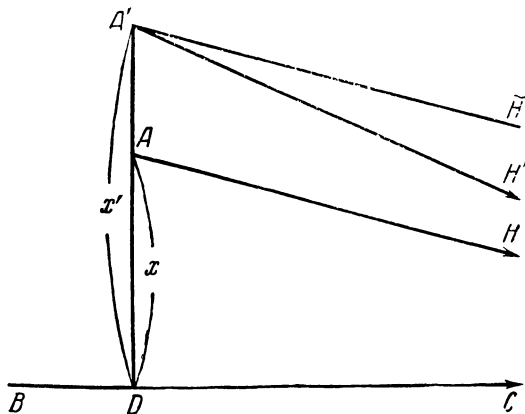
Из середины G отрезка EF опустим перпендикуляры GH и GK на эти две прямые. При условиях задания углы EGH и FGK равны; перпендикуляры GH и GK составляют одну прямую, перпендикулярную к обеим заданным прямым, которые поэтому расходятся.

В самом деле, мы уже знаем, что две прямые, перпендикулярные третьей, расходятся (§ 19, рубр. 3, стр. 169). Положим, что при пересечении прямых AB и CD прямой EF углы AEF и DFE равны (черт. 81). Из середины G отрезка EF опустим перпендикуляры GH и GK на эти две прямые. При условиях задания углы EGH и FGK равны; перпендикуляры GH и GK составляют одну прямую, перпендикулярную к обеим заданным прямым, которые поэтому расходятся.

Теорема 2. Функция $\Pi(x)$ монотонно убывает с возрастанием аргумента x .

Из точек A и A' , лежащих на одном перпендикуляре AD к прямой BC , проведем прямые $\vec{AH}$ и $\vec{A'H'}$, параллельные $\vec{BC}$ (черт. 82). Если x и x' суть длины перпендикуляров AD и $A'D$, то

$$\begin{aligned}\angle HAD &= \Pi(x), \\ \angle H'A'D &= \Pi(x').\end{aligned}$$



Черт. 82.

Через точку A' проведем в ту же сторону от $A'D$, что и $\vec{A'H'}$, прямую $\vec{A'H}$ под углом $\angle DA'H = \angle DAN$. Согласно теореме 5а предыдущего параграфа (стр. 171), ориентированные прямые $A'H'$ и $A'H$, как параллельные $\vec{BC}$, параллельны между собой. Прямая же $A'H$, согласно предыдущей теореме, расходится с $A'H'$. Поэтому $A'H$ должна быть наклонена к $A'D$ под большим углом, чем $A'H'$; это значит:

$$\angle H'A'D < \angle HA'D \quad \text{или} \quad \angle H'A'D < \angle HAD,$$

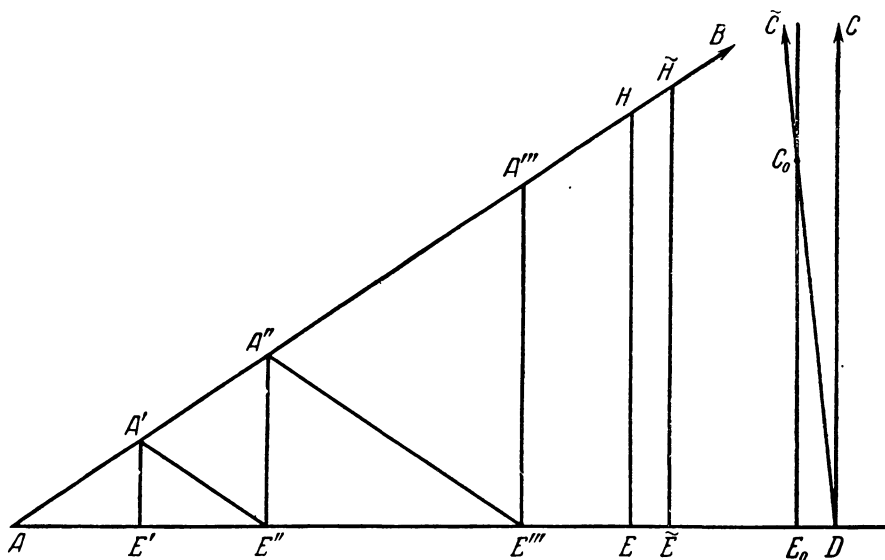
т. е.

$$\Pi(x') < \Pi(x) \quad \text{при} \quad x' > x.$$

(II

Отсюда, между прочим, вновь следует, что функция $\Pi(x)$ может быть постоянной только в том случае, когда имеет место постулат Евклида и эта постоянная есть $\frac{\pi}{2}$, т. е. только в евклидовой плоскости. Так как $\Pi(x)$, по существу, заключается между 0 и $\frac{\pi}{2}$ (I_1), то возникает вопрос, в каких точных пределах заключается эта функция — каковы ее верхняя и нижняя границы.

3. Обращение функции $\Pi(x)$. Ответ на поставленный вопрос заключается в том, что функция $\Pi(x)$ принимает все возможные значения, со-



Черт. 83.

держащиеся между 0 и $\frac{\pi}{2}$. Это получает выражение в следующей теореме.

Вторая основная теорема. Каков бы ни был острый угол ω , всегда существует один и только один отрезок, — при установленной единице меры одно и только одно такое число x , — что

$$\Pi(x) = \omega. \quad (I_2)$$

Доказательство. Пусть BAD будет данный острый угол ω (черт. 83). Из точек A' , A'' , A''' луча AB опустим перпендикуляры $A'E'$, $A''E''$, $A'''E'''$ на AD . Мы можем сказать, что перпендикуляры, восстановленные из точек E' , E'' , E''' стороны AD рассматриваемого угла, встречают другую его сторону AB в точках A' , A'' , A''' .

Может ли случиться, чтобы все перпендикуляры, восстановленные из всех точек стороны угла AD , встретили другую его сторону AB ? Отрицательный ответ на этот вопрос Лобачевский¹⁾ обосновывает приемом, сходным с рассуждением Лежандра (§ 15, рубр. 4, стр. 134—136), и который здесь проведен Лобачевским в безукоризненной форме. Этот прием

¹⁾ «Г. И.», предложение 23.

в несколько иной концепции, но, по существу, в точно таком же виде, находим уже у Саккери. Вот в чем заключается это рассуждение.

Допустим, что все перпендикуляры, восстановленные из точек на стороне AD угла DAB , пересекают другую сторону. В некоторой точке E' восстановим к AD перпендикуляр $E'A'$, который встретит сторону AB в точке A' . Получим треугольник $E'AA'$, угловой дефект которого обозначим через δ' . Отложив далее отрезок $E'E'' = AE'$ и восстановив из E'' перпендикуляр $E''A''$, получим треугольник $AE''A''$, который разбит на треугольники $AE'E'$, $A'E'E''$ и $E'E'A''$. Так как первые два из этих треугольников равны, то дефект всего треугольника $AA'E''$ равен $\delta'' > 2\delta'$. Отложив далее отрезок $E''E''' = AE''$ и восстановив перпендикуляр $E'''A'''$, получим треугольник $AE'''A'''$, дефект которого $\delta''' > 2\delta'' > 4\delta'$. Продолжая то же построение, неизбежно придем к треугольнику, дефект которого превысит $2d$, т. е. сумма внутренних углов которого будет отрицательна, что лишено смысла. Таким образом, не все перпендикуляры, восстановленные из точек на стороне AD угла DAB , встречают другую сторону AB .

Итак, перпендикуляры, восстановленные из точек луча AD , делятся на две категории: перпендикуляры одной категории встречают луч AB , другие его не встречают.

Совершенно ясно, что перпендикуляры второй категории лежат за перпендикулярами первой категории. Из непрерывности прямой отсюда следует, что существует либо последний перпендикуляр, встречающий AB , либо первый, ее не встречающий. Но последнего встречающего быть не может; в самом деле, если перпендикуляр EH встречает сторону AB в точке H , то, взяв точку $\tilde{H}$ на продолжении отрезка AH и опустив из нее перпендикуляр $\tilde{H}\tilde{E}$ на AD , получим встречающий перпендикуляр $\tilde{E}\tilde{H}$, следующий за EH . Следовательно, существует первый, не встречающий перпендикуляр DC . Покажем, что $\vec{DC} \parallel \vec{AB}$.

В самом деле, если бы прямая $\vec{DC}$ не была параллельна $\vec{AB}$, то она принадлежала бы к числу прямых, в каждой своей точке расходящихся с $\vec{AB}$. Параллель $\vec{DC}$ к прямой $\vec{AB}$ проходила бы внутри угла ADC , перпендикуляр C_0E_0 , опущенный на AD из какой-либо точки C_0 прямой $\vec{DC}$, не встречал бы AB ; в самом деле, прямая AB не могла бы встретить отрезка E_0C_0 , ибо по аксиоме Паша она тогда должна была бы встретить и DC_0 (т. е. $\vec{DC}$). Продолжения же отрезка E_0C_0 за точку C_0 прямая AB встретить не могла бы потому, что это продолжение лежало бы по другую сторону прямой $\vec{DC}$. Итак, $\vec{AB} \parallel \vec{DC}$ и AD есть тот отрезок, которому соответствует угол параллельности ω .

Отрезок x , удовлетворяющий уравнению (I_2) , мы будем называть отрезком параллельности, соответствующим углу ω . Каждому отрезку x отвечает угол параллельности ω , так что имеет место уравнение (I_2) ; каждому острому углу ω отвечает отрезок x , удовлетворяющий тому же уравнению. Иначе говоря, уравнению $\Pi(x) = \omega$ соответствует уравнение

$$\Phi(\omega) = x, \quad (III_1)$$

где Φ есть функция, обратная Π ;

$$\Phi(\Pi(x)) = x. \quad (III_2)$$

Уравнения (III₁) и (III₂) устанавливают связь между углом и прямолинейным отрезком, к которой приводит гиперболическая геометрия. Мы видели, что Лежандр уже пришел к тому, что отрицание постулата о параллельных линиях (которое делалось с целью его доказательства от противного) приводит к зависимости между углами и прямолинейными отрезками. Признание невозможности такой зависимости, как уже указано выше (§ 15, рубр. 7, стр. 141), называли принципом однородности. В своем месте (там же) было выяснено неправильное применение этого принципа.

Очень важно отметить, что изложенные доказательства обеих основных теорем основаны на непрерывности прямой (принцип Дедекинда).

4. Пределы изменения функции $\Pi(x)$. Так как функция $\Pi(x)$, с одной стороны, монотонно убывает с возрастанием x , с другой стороны, принимает все значения, содержащиеся между 0 и $\frac{\pi}{2}$, то ясно, что 0 и $\frac{\pi}{2}$ составляют нижнюю и верхнюю границы значений этой функции; это значит,

$$\lim \Pi(x) = \frac{\pi}{2} \quad \text{при } x \rightarrow 0, \quad (\text{IV}_1)$$

$$\lim \Pi(x) = 0 \quad \text{при } x \rightarrow \infty. \quad (\text{IV}_2)$$

5. Соображения, связанные со второй основной теоремой. Так как $\Pi(x)$ стремится к $\frac{\pi}{2}$, когда x стремится к нулю, то при достаточно малых значениях x угол $\Pi(x)$ сколь угодно мало отличается от прямого угла. Но геометрические соображения, при помощи которых мы этот предел нашли, не дают возможности установить, насколько малым должно быть x , чтобы $\Pi(x)$ отличалось от $\frac{\pi}{2}$ меньше, нежели на заданный угол ε . С другой стороны, все измерительные приборы, в том числе и угломерные, а также и самый наш глаз, имеют «порог ощущения»; это значит, существует минимальное значение измеряемой величины, которое доступно измерению; за пределами этого порога значения измеряемой величины не поддаются различению. В эпоху Лобачевского угломерные приборы не давали возможности различать углы, отличающиеся друг от друга меньше чем на 1". Представим себе, что те линейные размеры, в пределах которых мы имеем возможность производить измерения, так незначительны по сравнению с размерами вселенной, что для них $\Pi(x)$ отличается от прямого угла меньше чем на 1"; в таком случае весьма возможно, что мы принимаем угол параллельности в нашем пространстве равным прямому углу, тогда как он на значительных расстояниях отличается от $\frac{\pi}{2}$. Иными словами, возможно, что доверие, которое мы питаем к евклидовой геометрии, имеет лишь тот источник, что все доступные нам измерения происходят в таком незначительном уголке вселенной, в котором отличие геометрии от евклидовой падает за пределы порога наших ощущений. Вместе с тем, не лишено возможности, что экспериментальная проверка того, что сумма внутренних углов прямолинейного треугольника равна $2d$, всегда подтверждает это предположение только потому, что измерению подвергаются лишь треугольники весьма малых размеров. Чтобы это проверить, Лобачевский вычислил по результатам измерений сумму углов треугольника, двумя вершинами которого служили Земля и Солнце, а третьей—звезда Сириус. Он получил дефект, равный 0",000372.

Лобачевский приходит поэтому к такому заключению¹⁾:

«После этого можно воображать, сколько эта разность, на которой основана наша теория параллельных, оправдывает точность всех вычислений обыкновенной Геометрии, и позволяет принятые начала этой последней рассматривать как бы строго доказанными.

Между тем нельзя не увлекаться мнением Г. Лапласа, что видимые нами звезды и млечный путь принадлежат к одному только собранию небесных светил, подобному тем, которые усматриваем, как слабо мерцающие пятна в созвездиях Ориона, Андромеды, Козерога и проч. Итак, не говоря о том, что в воображении пространство может быть продолжаемо неограниченно, сама Природа указывает нам такие расстояния, в сравнении с которыми исчезают за малостию даже и расстояния нашей Земли до неподвижных звезд.

После этого нельзя утверждать более, что предположение, будто мера линий не зависит от углов — предположение, которое многие Геометры хотели принимать за строгую истину, не требующую доказательства, — может быть оказалось бы приметно ложным еще прежде, нежели перейдем за пределы видимого нами мира».

Однако в вычисления Лобачевского вкралась ошибка; дефект в треугольнике, который он рассматривал, в действительности в 100 раз меньше. И значение параллакса Сириуса, которым Лобачевский пользовался, оказалось гораздо меньше. А что важнее всего, расстояния в мироздании, обнаруженные в течение последнего столетия, неизмеримо больше тех, которые себе представляли Лаплас и Лобачевский: некоторые из них выражаются в миллионах световых годов. Тем больше оснований допустить, что наблюдаемое совпадение результатов измерения с геометрией Евклида обусловливается незначительностью тех расстояний, в пределах которых мы производим наши измерения. К этому вопросу мы еще возвратимся.

6. Заметка Швейкарта. Вторая основная теорема, изложенная в рубрике 3, допускает следующую интерпретацию. Произвольный угол $KOH = 2\omega$ (черт. 84) разделим пополам биссектрисой OD ; пусть $OD = \Phi(\omega)$, т. е. $\omega = \Pi(OD)$. Если в точке D восставим перпендикуляр к OD , то он будет в одну сторону параллелен ориентированной прямой $\vec{OH}$, в другую — прямой $\vec{OK}$. Если на луче OK отложим возрастающие отрезки OM' , OM'' , OM''' , ..., а на луче OH — соответственно равные им отрезки ON' , ON'' , ON''' , ..., то получим ряд равнобедренных треугольников $M'ON'$, $M''ON''$, $M'''ON'''$, ... с общим углом при вершине O ; боковые стороны этих треугольников могут неограниченно возрастать, но их высоты остаются меньше OD , стремятся к OD , когда боковые стороны неограниченно возрастают.

Если угол KOH прямой, то придем к заключению, что высота равнобедренного прямоугольного треугольника, хотя и возрастает с увеличением боковых сторон, но не может превзойти некоторого определенного отрезка.

Это в точности совпадает с наиболее важным замечанием, которое молодой тогда математик Швейкарт (F. K. Schweikart, 1780—1859) сообщил Гауссу в письме от декабря 1818 г. ([⁷⁰], стр. 180)²⁾ и которое свидетельствует о том, что Швейкарт довольно глубоко проник в начала неевклидовой геометрии. Постоянное значение OD , соответствующее прямому

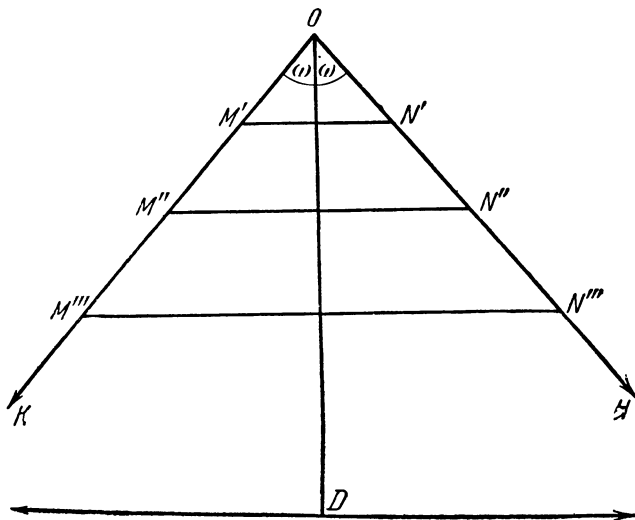
¹⁾ «О началах геометрии» [⁶³], стр. 209.

²⁾ См. ниже, § 57, рубр. 3, стр. 470.

углу KOH Швейкарт называет константой. Постоянный отрезок OD будем обозначать через J ; его длину — через j :

$$\Pi(J) = \frac{\pi}{4}. \quad (V)$$

Строго говоря, постоянным является отрезок J ; его длина j зависит от выбора единицы меры.



Черт. 84.

7. Угловое и линейное задание отрезка в гиперболической плоскости. Две приведенные основные теоремы ведут к следующим важным соображениям. Отрезок x может быть выражен числом x «в линейной мере» при произвольно выбранном отрезке, принятом за единицу длины. Но тот же отрезок может быть задан углом $\Pi(x)$ в том смысле, что заданием этого угла определяется отрезок x ; мы можем поэтому смотреть на $\Pi(x)$ как на угловое задание отрезка x . Это аналогично тому, что на сфере дуга большого круга может быть задана своей длиной (линейное задание) или углом, который она стягивает при центре сферы (угловое задание). Угловое задание отрезка x мы часто будем обозначать через $\tilde{x}$, так что $\tilde{x} = \Pi(x)$.

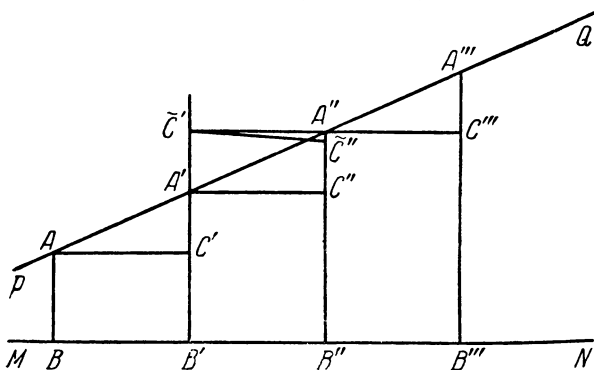
При аналогии линейного и углового заданий отрезка в гиперболической плоскости с такими же заданиями дуги большого круга на сфере следует все-таки тут же отметить и существенное различие: на сфере численное значение дуги в угловой мере всегда пропорционально ее численному значению в линейной мере; эта пропорциональность в гиперболической плоскости отнюдь не имеет места; нам еще придется к этому возвратиться.

§ 21. ВЗАИМНОЕ РАСПОЛОЖЕНИЕ ДВУХ ПРЯМЫХ В ГИПЕРБОЛИЧЕСКОЙ ПЛОСКОСТИ

1. Расхождение прямых. Возвратимся к конфигурации Туси-Лежандра (§ 14, рубр. 3, стр. 116). Положим, что из двух прямых на гиперболической плоскости одна MN (черт. 85) в точке B перпендикулярна к секущей AB , другая — PQ в точке A наклонена к ней под тупым углом.

BAQ . На прямой PQ от точки A пересечения с секущей отложим в сторону тупого угла BAQ равные отрезки AA' , $A'A''$, $A''A'''$, ... и спроектируем их на вторую прямую MN . В евклидовой плоскости, как мы знаем, проектирующие перпендикуляры AB , $A'B'$, $A''B''$, ... возрастают в арифметической прогрессии, проекции же BB' , $B'B''$, $B''B'''$, ... равны между собой; равны также углы BAA' , $B'A'A''$, $B''A''A'''$, ... На этом, собственно, сосредоточено внимание Насир-Эддина в его попытке доказательства постулата о параллельных линиях.

Мы уже знаем, что в гиперболической плоскости упомянутые углы возрастают (§ 17, рубр. 7, теорема 4, стр. 161). Поведение же проектирующих перпендикуляров и проекций в гиперболической плоскости Лобачевского характеризует следующим предложением¹⁾:



Черт. 85.

Третья основная теорема. В рассматриваемой конфигурации (черт. 85) в гиперболической плоскости проектирующие перпендикуляры $A'B'$, $A''B''$, $A'''B'''$, ... (в сторону тупых углов) возрастают быстрее, нежели в арифметической прогрессии; проекции же BB' , $B'B''$, $B''B'''$, ... убывают.

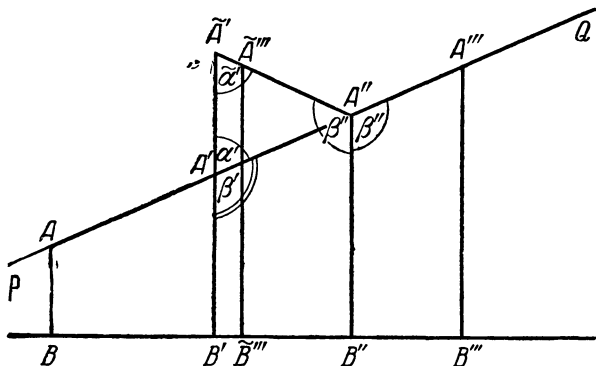
Доказательство. На перпендикулярах $B'A'$, $B''A''$, $B'''A'''$, ... отложим отрезки $B'C' = BA$, $B''C'' = B'A'$, $B'''C''' = B''A''$, ... Получаются четырехугольники Саккери $ABB'C'$, $A'B'B''C''$, $A''B''B'''C'''$, ..., в которых углы при верхних основаниях острые; поэтому верхние их основания AC' , $A'C''$, $A''C'''$, ... входят внутрь соответствующих тупых углов; точки C' , C'' , C''' , ... падают внутрь соответствующих отрезков $B'A'$, $B''A''$, $B'''A'''$, ...: это значит, каждый из этих отрезков больше предыдущего, а $C'A'$, $C''A''$, $C'''A'''$, ... представляют их приращения. Покажем, что каждое из этих приращений больше предыдущего. Чтобы обнаружить, что $C''A'' > C'A'$, продолжим отрезок $C'A'$ на расстояние $A'\tilde{C}' = A'C'$ и точку $\tilde{C}'$ соединим с A'' . Треугольник $A'A''\tilde{C}'$ будет равен треугольнику $A'AC'$, и угол $A'\tilde{C}'A''$ равен углу $A'C'A$ и потому будет тупой. Если на $B''A''$ отложим отрезок $B''\tilde{C}'' = B'\tilde{C}'$ и соединим точки $\tilde{C}'$ и $\tilde{C}''$, то в образовавшемся четырехугольнике Саккери $B'\tilde{C}'\tilde{C}''B''$ угол $B'\tilde{C}'\tilde{C}''$ будет острый, и поэтому его верхнее основание $\tilde{C}'\tilde{C}''$ войдет внутрь угла $B'\tilde{C}'A''$. Следовательно, $C''A'' > C''\tilde{C}''$; но $C''\tilde{C}'' = A'\tilde{C}' = A'C'$, следовательно, $C''A'' > C'A'$.

Чтобы показать, что каждая из проекций меньше предыдущей, например $B''B''' < B'B''$, опрокинем четырехугольник $B''A''A'''B'''$ около $B''A''$ (черт. 86)²⁾, так что он займет положение $B''A''\tilde{A}'''\tilde{B}'''$. Луч $A''A'''$ займет положение $A''\tilde{A}'''$. Если он при этом вовсе не встретит луча $B'A'$,

¹⁾ «Новые начала геометрии с полной теорией параллельных» [63], т. II, стр. 281.

²⁾ То-есть построим симметричный четырехугольник $A''B''\tilde{B}'''\tilde{A}'''$.

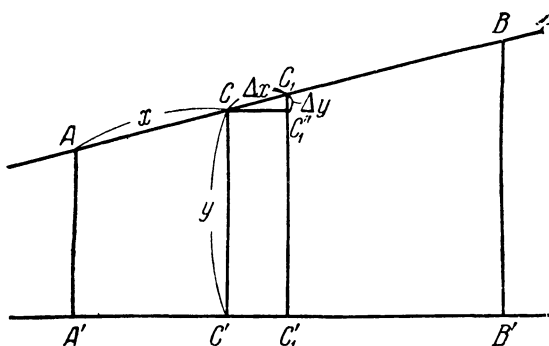
то он весь останется внутри полосы $A'B'B''A''$; внутри этой полосы останется и перпендикуляр $\tilde{A}'''\tilde{B}'''$, точка $\tilde{B}'''$ упадет внутрь отрезка $B'B'$, т. е. $B'B''' = B'\tilde{B}''' < B'B'$. Но то же расположение сохраняется и в том случае, если луч $A''\tilde{A}'''$ встречает перпендикуляр $B'A'$ в некоторой точке $\tilde{A}'$ в том смысле, что точка $\tilde{A}'''$ в этом случае упадет между $\tilde{A}'$ и A'' . Чтобы это обнаружить, обозначим, как указано на чертеже 86, через α' острый угол $(=\tilde{A}'A'A'')$ при точке A' , через $\tilde{\alpha}'$ — острый угол $(=A'\tilde{A}'A'')$ при точке $\tilde{A}'$, через β' и β'' — тупые углы $(B'A'A''$ и $B''A''A''')$ при точках A' и A'' . Тогда $\alpha' + \beta' = \pi$; между тем в четырехугольнике $\tilde{A}'B'B''A''$ $\tilde{\alpha}' + \beta'' < \pi$ (§ 17, рубр. 7, теорема 2, стр. 160); следовательно,



Черт. 86.

$\tilde{\alpha}' + \beta'' < \alpha' + \beta'$. С другой стороны (там же, теорема 4) $\beta'' > \beta'$; следовательно, $\alpha' > \tilde{\alpha}'$. Поэтому в треугольнике $A'\tilde{A}'A''$ сторона $\tilde{A}'A''$ больше $A'A''$, т. е. $\tilde{A}'A'' > A'A''$. А так как $A''\tilde{A}''' = A'A''$, то точка $\tilde{A}'''$ упадет между A'' и $\tilde{A}'$; вместе с тем точка $\tilde{B}'''$ упадет между B' и B'' , т. е. отрезок $B'B''' (=B'\tilde{B}''') < B'B''$, что и требовалось доказать.

Два существенных вывода нужно присоединить к этому предложению. Во-первых, из него непосредственно вытекает, что в рассматриваемой конфигурации при удалении от A в сторону тупого угла расстояния точек луча AQ от прямой MN неограниченно возрастают, при продвижении же в обратную сторону (т. е. в сторону острого угла PAB) эти расстояния убывают, пока угол PAB остается острым.



Черт. 87.

2. Четвертая основная теорема. Доказательства первой и второй основных теорем, как было подчеркнуто (стр. 165 и 177), основаны на непрерывности прямой. Доказательство третьей основной теоремы само по себе не опирается на постулат о непрерывности, но дальнейшее развитие учения о расположении прямых к нему

возвращается. Основное значение при этом имеет следующее предложение, которое при всей его простоте необходимо выделить.

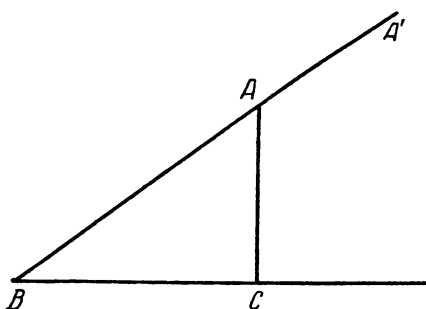
Четвертая основная теорема. Каковы бы ни были расстояния a и b точек A и B прямой AB от другой прямой $A'B'$ (черт. 87) и каково бы ни было третье расстояние c , содержащееся между a и b , на прямой AB между A и B

существует по крайней мере одна точка C , отстоящая от прямой $A'B'$ на расстояние s .

Расстояние точки C прямой AB от прямой $A'B'$ будем обозначать через y и выражать числом—длиной соответствующего отрезка CC' . Таким же образом, расстояние AC точки C от A будем обозначать через x ; ясно, что y будет однозначной функцией от x . Возьмем на AB точку C_1 , отстоящую от C на расстояние $CC_1 = \Delta x$, скажем, в сторону возрастающих y , так что $C'_1C_1 > C'C$. На перпендикуляре C'_1C_1 отложим отрезок $C'_1C''_1 = C'C$; точка C''_1 упадет между C'_1 и C_1 ; отрезок $C'C$ возрастает на расстояние $C''_1C_1 = \Delta y$. Так как угол $CC_1C''_1$ —тупой, то $C_1C''_1 < CC_1$, т. е. $\Delta y < \Delta x$. Из этого следует, что y есть непрерывная функция от x . В связи с непрерывностью прямой линии доказательство теоремы сводится к основному свойству непрерывной функции.

Читателю полезно проследить, что все дальнейшие выводы опираются на непрерывность прямой только через посредство I, II и IV основных теорем.

3. Взаимное расположение двух пересекающихся прямых. Опираясь на основные теоремы I—IV, мы займемся изучением взаимного расположения прямых в гиперболической плоскости. Начнем с двух пересекающихся прямых BA и BC (черт. 88).



Черт. 88.

Пусть ABC будет острый угол, который они при пересечении образуют. Перпендикуляр AC , опущенный из точки A первой прямой на вторую, падает со стороны острого угла и вместе с тем образует с AB острый угол BAC ; смежный же угол CAA' —тупой. В силу третьей и четвертой основных теорем отсюда вытекает следующий вывод.

Теорема 1. Если две прямые пересекаются, то по мере

удаления от вершины расстояние точки на одной стороне угла от другой его стороны неограниченно возрастает, принимая (численно) все возможные значения.

Мы видим, таким образом, что первое исходное положение Прокла (аксиома Аристотеля, § 14, рубр. 5, стр. 118) в его попытке доказать постулат о параллельных вовсе в допущении не нуждается; это есть теорема столь же справедливая в гиперболической, как и в евклидовой плоскости.

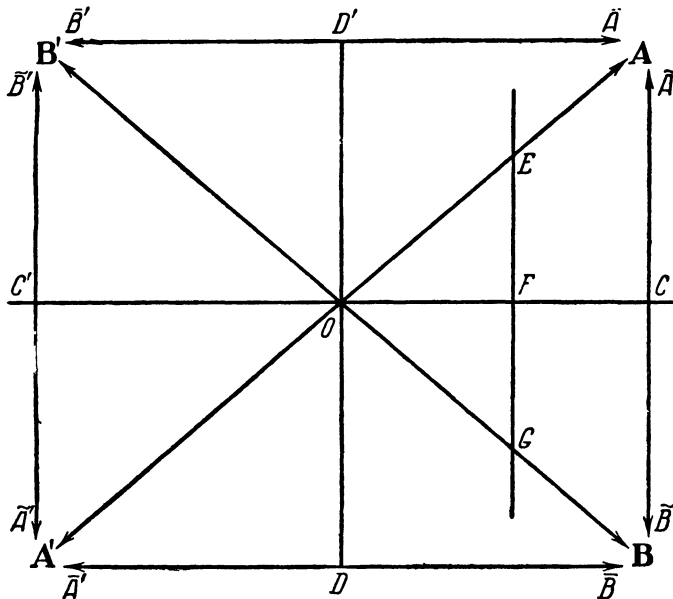
4. Заградительные прямые. Расположение двух пересекающихся прямых в гиперболической плоскости все же имеет существенную особенность. Проведем биссектрису OC угла AOB (черт. 89)¹⁾ и на ней отложим отрезок параллельности OC , соответствующий равным углам AOC и BOC :

$$\Pi(OC) = \angle AOC = \angle BOC.$$

Перпендикуляр $\vec{ACB}$ к OC в точке C в одну сторону параллелен стороне угла $\vec{OA}$; в другую же сторону он параллелен другой стороне угла

¹⁾ На чертеже 89 бесконечно удаленные точки обозначены прописными буквами греческого алфавита. Об этом см. ниже (стр. 185).

$\overrightarrow{OB}$. «Заградительная» прямая $\tilde{A}C\tilde{B}$ представляет как бы границу, за которую стороны угла не переходят. Всякий перпендикуляр, восстановленный из какой-либо точки F отрезка OC , встречает стороны угла OA и OB в точках E и G . По другую сторону от точки O на биссектрисе отложим отрезок $OC' = OC$; перпендикуляр $\tilde{A}'C'\tilde{B}'$ к биссектрисе служит загра-



Черт. 89.

дательной прямой угла $A'OB'$. Пересекающиеся прямые AOA' и BOB' не проходят через всю плоскость в том смысле, что они остаются внутри полосы, содержащейся между двумя граничными перпендикулярами $\tilde{A}C\tilde{B}$ и $\tilde{A}'C'\tilde{B}'$.

Проведем также биссектрису DOD' двух других вертикальных углов AOB' и BOA' и на ней отложим отрезки OD и OD' — отрезки параллельности углов BOD и $A'OD$ (или $B'OD'$ и AOD').

$$\Pi(OD) = \angle BOD = \angle A'OD = \Pi(OD') = \angle AOD' = \angle B'OD'.$$

Перпендикуляр $\tilde{A}D'\tilde{B}'$ к OD' параллелен $\overrightarrow{OA}$ в одну сторону и $\overrightarrow{OB'}$ в другую сторону; это — «заградительная» прямая для угла AOB' . Точно так же перпендикуляр $\tilde{A}'D\tilde{B}$ к OD параллелен сторонам угла $A'OB$. Перпендикуляр $\tilde{C}A$ часто рассматривается так же, как «заградительный» перпендикуляр острого угла AOC в том смысле, что за его пределы не проходит другая сторона OA угла AOC . Обе пересекающиеся прямые содержатся внутри своеобразного четырехугольника, составленного четырьмя заградительными прямыми.

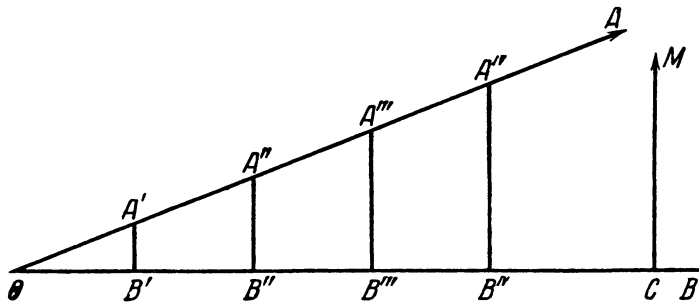
В тесной связи с этим находится еще следующее соображение. На стороне OA острого угла AOB (черт. 90) с заградительным перпендикуляром CM отложим равные отрезки OA' , $A'A''$, $A''A'''$, ... и спроектируем их на OB . Проекции их OB' , $B'B''$, $B''B'''$, ..., как мы знаем

(третья основная теорема), убывают. Теперь мы видим, что ряд

$$OB' + B'B'' + B''B''' + \dots$$

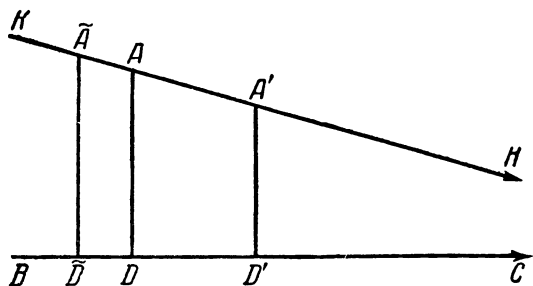
сходится и имеет суммой отрезок OC .

Таким образом, под заградительной прямой угла мы будем в дальнейшем разуметь прямую, которая в одну сторону параллельна одной,

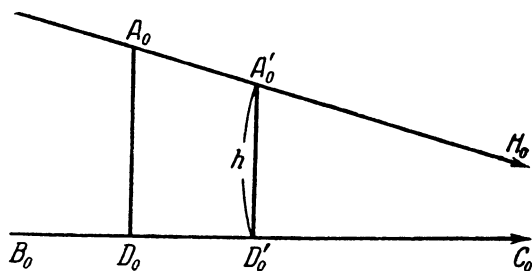


Черт. 90.

в другую — другой стороне угла. Перпендикуляр, опущенный из вершины угла на его заградительную прямую, делит этот угол пополам. Расстояние вершины угла от заградительной прямой имеет для каждого угла вполне определенное значение; оно определяется отрезком параллельности, соответствующим половине угла. В частности, прямому углу соответствует некоторый отрезок J , определяющий расстояние его вершины от заградительной прямой. Это в гиперболической плоскости — вполне определенный отрезок: $\Pi(J) = \frac{\pi}{4}$; длина j отрезка J зависит от принятой единицы меры. Мы эти обозначения уже ввели в § 20, рубр. 6, стр. 179.



a)



б)

Черт. 91.

5. Взаимное расположение двух параллельных прямых. Положим, что ориентированные прямые KH и BC параллельны ($\vec{KH} \parallel \vec{BC}$) (чертеж 91, а). Из произвольной точки A прямой KH опустим перпендикуляр AD на пря-

мую BC ; он образует с параллелью $\vec{KH}$ по одну сторону (со стороны параллелизма) острый угол (угол параллельности) HAD , а по другую сторону — тупой угол DAK . В сторону тупого угла (3-я основная теорема) расстояния точек прямой KH от BC будут неограниченно воз-

растать, проходя через все возможные значения; в сторону же острого угла эти расстояния будут убывать и притом на всем протяжении луча $\overrightarrow{AH}$, ибо во всякой другой точке A' этого луча угол $HA'D'$ будет оставаться острым. Отсюда легко вывести, что в сторону параллелизма расстояние $A'D' (=h)$ принимает все значения, меньшие AD . В самом деле, пусть $h < AD$. Из произвольной точки D'_0 любой прямой (той же плоскости) B_0C_0 (черт. 91,б) восставим к ней перпендикуляр, а на нем отложим отрезок $D'_0A'_0 = h$. Через точку A'_0 проведем прямую $\overrightarrow{A'_0H_0}$, параллельную $\overrightarrow{B_0C_0}$. На этой параллели, как сейчас показано, найдется точка A_0 , расстояние которой A_0D_0 от прямой B_0C_0 будет равно $A_0D_0 (> h)$. Теперь передвинем плоскость в самой себе так, чтобы отрезок A_0D_0 совместился с равным ему отрезком AD . Тогда прямая B_0C_0 (D_0C_0) совместится с BC , параллель A_0H_0 совместится с AH и точка A'_0 совместится с точкой A' прямой KH , расстояние которой $A'D'$ от BC будет равно h .

Все эти результаты получают выражение в следующем предложении.

Теорема 2. Точки ориентированной прямой AH , параллельной $\overrightarrow{BC}$, неограниченно приближаются к $\overrightarrow{BC}$ в сторону параллелизма и неограниченно от нее удаляются в противоположную сторону; при этом расстояние точек прямой $\overrightarrow{AH}$ от $\overrightarrow{BC}$ принимает все возможные значения.

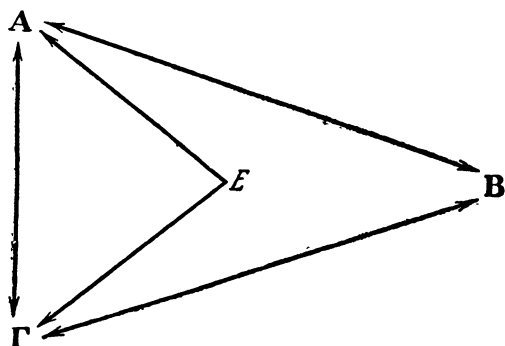
Это неограниченное приближение параллели $\overrightarrow{AH}$ к $\overrightarrow{BC}$ в сторону параллелизма часто выражают так: параллельные прямые в сторону параллелизма асимптотически друг к другу приближаются. Больви называет даже параллель $\overrightarrow{AH}$ асимптотой прямой $\overrightarrow{BC}$. Гильберт [90] говорит, что параллели имеют «общий конец», рассматривая его, как общую бесконечно удаленную точку,—термин, которым всегда и раньше пользовались авторы, писавшие о гиперболической геометрии. Говорят: все параллельные ориентированные прямые имеют общий конец, общую бесконечно удаленную точку. В соответствии с этим общую бесконечно удаленную точку двух параллельных прямых часто обозначают одной и той же буквой. Мы в дальнейшем изложении будем также это делать, пользуясь прописными греческими буквами для обозначения бесконечно удаленных точек. Сообразно этому размечены буквы и на чертеже 89. В связи с этим говорят также, что прямая в гиперболической плоскости имеет две бесконечно удаленные точки, тогда как в евклидовой плоскости прямая имеет только одну такую точку. Конкретный смысл этого заключается в том, что в евклидовой плоскости существует только один пучок прямых, параллельных данной прямой, тогда как в гиперболической плоскости их существует два—сообразно тому, обращена ли прямая в одну или в другую сторону.

В заключение заметим, что самое доказательство предыдущей теоремы попутно устанавливает следующее предложение.

Теорема 3. В гиперболической плоскости любые две полосы, ограниченные каждая двумя параллельными прямыми, конгруэнтны.

Существуют и другие особенности, отличающие расположение двух параллелей в гиперболической плоскости от их расположения в евклидовой плоскости.

Между параллелями $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{ГВ}$ (черт. 92) возьмем произвольную точку E и через нее проведем прямые, параллельные тем же прямым, обращенным в противоположные стороны: $\overrightarrow{EA} \parallel \overrightarrow{BA}$, $EG \parallel BG$. Пусть теперь AG будет заградительная прямая угла AEG , так что



Черт. 92.

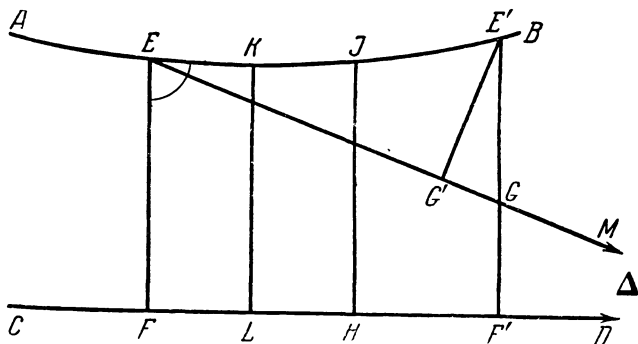
$$\overrightarrow{GA} \parallel \overrightarrow{EA} \parallel \overrightarrow{BA}; \quad \overrightarrow{AG} \parallel \overrightarrow{EG} \parallel \overrightarrow{BG}.$$

Ясно, что ни одна из прямых BA и BG не проникает за пределы «заградительной» прямой AG .

6. Взаимное расположение двух расходящихся прямых. Положим, что прямая AB (черт. 93) расходуется с прямой CD . Из точки E прямой AB опустим перпендикуляр EF на CD . Если бы он оказался также перпен-

дикулярным к AB , т. е. служил бы общим перпендикуляром к обеим прямым, то, в силу третьей основной теоремы, расстояния точек одной прямой от другой в обе стороны неограниченно бы возрастали, принимая все возможные значения, большие EF .

Если бы перпендикуляр EF составлял с AB острый угол BEF и, следовательно, тупой угол FEA , то в сторону $\overrightarrow{EA}$ происходило бы такое же расхождение прямых. В противоположную сторону $\overrightarrow{EB}$ расстояния $E'F'$ точек прямой AB от CD сначала уменьшались бы, но потом стали бы возрастать. В самом деле, через точку E проведем прямую $\overrightarrow{EM}(E\Delta)$, параллельную $\overrightarrow{CD}$. Так как прямая EB расходится с FD , то параллель EM проходит ближе к перпендикуляру EF , т. е. внутри угла FEB . Образуется угол BEM , и расстояния $E'G'$ точек E' его стороны EB от другой стороны EM по мере удаления от вершины будут неограниченно возрастать (теорема 1). Расстояния же $E'F'$ точки E' от прямой CD будут больше $E'G'$ ($E'F' > E'G' > E'G'$) и потому, по достаточном удалении от E , они также будут неограниченно возрастать. Пусть E' будет точка, расстояние которой от CD больше EF ($E'F' > EF$). Так как расстояние точки прямой AB от CD , как было показано, при удалении от E изменяется непрерывно, сначала уменьшаясь, то между точками E и E' существует такая точка I , расстояние которой IH от CD равно EF . Образуется четырехугольник Саккери $EFHI$, средняя линия которого KL перпендикулярна к обоим его основаниям (§ 16, рубр. 2, стр. 145). Мы приходим, таким образом, к следующему выводу.



Черт. 93.

Теорема 4. В гиперболической плоскости две расходящиеся прямые имеют общий перпендикуляр, по обе стороны которого они неограниченно удаляются одна от другой. Длина этого перпендикуляра принимается за расстояние между расходящимися прямыми.

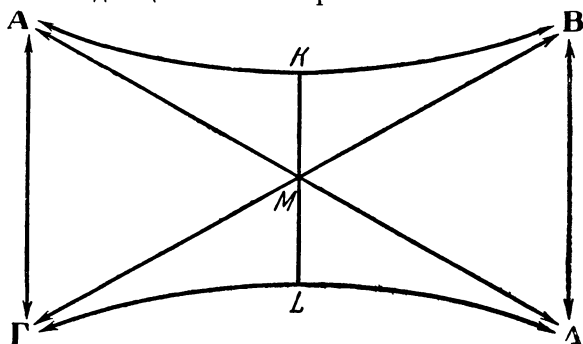
И в случае расходящихся прямых имеются заградительные прямые. Пусть AB и $\Gamma\Delta$ — две расходящиеся прямые. Из середины M их общего перпендикуляра KL (черт. 94)

проведем две прямые $\vec{MB}$ и $\vec{MD}$, соответственно параллельные $\vec{KB}$ и $\vec{LD}$.

Пусть BA будет заградительная прямая угла

$\angle BMD$ ($\vec{AB} \parallel \vec{MB} \parallel \vec{KB}$, $\vec{BA} \parallel \vec{MD} \parallel \vec{LD}$); лучи KB и LD не будут проникать за пределы этой прямой. Продолжения MA и $M\Gamma$ лучей MD и MB будут параллельны тем же прямым, обращенным в противоположные стороны ($\vec{MA} \parallel \vec{KA}$, $\vec{M\Gamma} \parallel \vec{L\Gamma}$). Заградительная прямая $A\Gamma$ угла $\angle AM\Gamma$ отделит часть плоскости, в которую не проникнут лучи KA и $L\Gamma$. Таким образом, прямые AB и $\Gamma\Delta$ останутся в полосе, ограничиваемой прямыми $A\Gamma$ и BA .

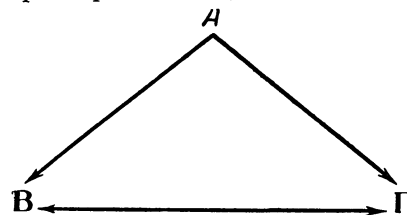
Конфигурация, к которой мы, таким образом, пришли, представляет собой своеобразный четырехугольник $AB\Delta\Gamma$ (черт. 94), четыре вершины которого лежат в бесконечно удаленных точках прямых, составляющих его стороны. С такой же конфигурацией мы уже встретились в рубр. 4 (черт. 89 на стр. 183). О таком четырехугольнике упоминает Швейкарт в заметке, которую он послал Гауссу (см. выше, § 20, рубр. 6, стр. 178).



Черт. 94.

§ 22. ВАЖНЕЙШИЕ СВОЙСТВА ВЫРОЖДЕННЫХ ТРЕУГОЛЬНИКОВ

1. Треугольники с бесконечно удаленными вершинами. Конфигурацию трех прямых AB , $B\Gamma$ и $A\Gamma$, к которой мы пришли в рубр. 5 предыдущего параграфа (черт. 92), можно рассматри-



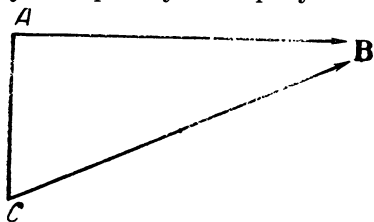
Черт. 95.

вать как треугольник, три вершины которого лежат в бесконечности, а стороны которого попарно параллельны. Точно так же конфигурацию, состоящую из двух лучей AB , $A\Gamma$ и прямой $B\Gamma$, которой они параллельны в одну и в другую сторону (черт. 95) (конфигурацию Лобачевского-Большаи), можно рассматривать как треугольник с одной конечной и двумя бес-

конечно удаленными вершинами. Наконец, конфигурацию, состоящую из отрезка AC и двух параллелей AB и CB , выходящих из его концов, можно рассматривать как треугольник с двумя конечными и одной бесконечно удаленной вершиной (черт. 96). Эти вырожденные треугольники сохраняют многие свойства обыкновенных треугольников. Так, для них остается справедливым предложение Паша:

Теорема 1. Если прямая, не проходящая через вершину вырожденного треугольника, встречается одну из его сторон, то она встречается еще одну и только одну из его сторон.

Когда мы говорим о прямой, проходящей через бесконечно удаленную вершину, то разумеем ориентированную прямую, параллельную

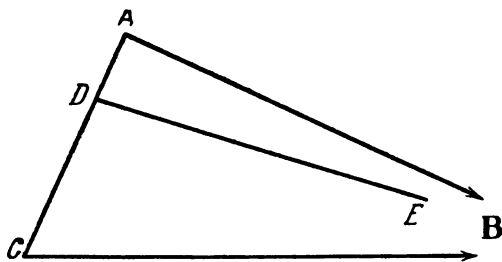


Черт. 96.

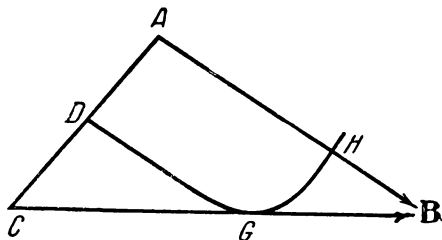
тем двум прямым, которые «сходятся» в этой бесконечно удаленной вершине. Читателя доказательство этой теоремы не затруднит. Мы здесь рассмотрим только случай, относящийся к треугольнику с одной бесконечно удаленной вершиной, изображенному на черт. 96.

Положим (черт. 97), что прямая DE проходит через внутреннюю точку D стороны AC и входит, таким образом,

внутрь вырожденного треугольника ACB . Если бы луч DE не встречал ни одного из лучей AB и CB (т. е. ни одной из двух других сторон вырожденного треугольника), то он проходил бы между ними, следовательно, был бы им параллелен (§ 19, рубр. 4, теорема 3, стр. 169); и потому проходил бы через бесконечно удаленную вершину треугольника.



Черт. 97.



Черт. 98.

Отметим еще, что встретить оба луча AB и CB (т. е. все три стороны вырожденного треугольника ACB) луч DE не может. В самом деле, если бы он встречал луч AB в точке H , а луч CB — в точке G (черт. 98), то одна из точек G и H должна была бы лежать между D и другой из них. Если бы, скажем, точка G лежала между D и H , то прямая CB встречала бы одну из сторон обыкновенного треугольника DAH , не встречая ни одной из двух других его сторон, что не может иметь места.

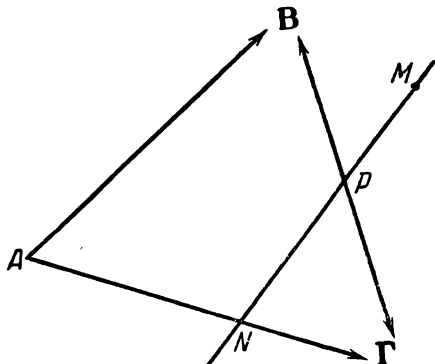
С последней теоремой тесно связана ошибка, в свое время допущенная Лежандром в его попытке доказать, не пользуясь постулатом о параллельных, что сумма углов треугольника равна $2d$ (§ 15, рубр. 4, стр. 134).

В самом деле, пусть $BA\Gamma$ будет произвольный угол (черт. 99), $B\Gamma$ — заградительная прямая, дополняющая его до треугольника с двумя бесконечно удаленными вершинами. Пусть M будет точка, лежащая по другую сторону заградительной прямой $B\Gamma$. Если соединим ее с точкой N на одной из сторон угла $BA\Gamma$, — скажем, на стороне $A\Gamma$, — то отрезок MN неизбежно пересечет заградительную прямую $B\Gamma$ в некоторой точке P . Пересекая, таким образом, две стороны вырожденного

треугольника $ABГ$, прямая MN не может пересечь третьей стороны AB . Поэтому допущение Лежандра, что через любую точку, лежащую внутри угла, можно провести прямую, пересекающую обе стороны угла, эквивалентно постулату Евклида.

Теорема 2. Прямая, входящая внутрь вырожденного треугольника через одну из его вершин, пересекает противоположную его сторону.

Рассмотрим случай, когда трансверсаль проходит внутрь треугольника через бесконечно удаленную его вершину. Если A есть бесконечно удаленная вершина треугольника ABC (черт. 100) и через нее проходит трансверсаль



Черт. 99.

AD , то это значит, что прямая $\vec{DA}$ параллельна двум сторонам треугольника $\vec{BA}$ и $\vec{CA}$, которые определяют вершину A . Если трансверсаль при этом проходит внутрь треугольника, то это означает, что она расположена между прямыми $\vec{BA}$ и $\vec{CA}$,

т. е. эти прямые расположены по разные стороны $\vec{DA}$. Если две другие вершины B и C конечные, то они расположены по разные стороны прямой AD , которая поэтому встречает отрезок BC .

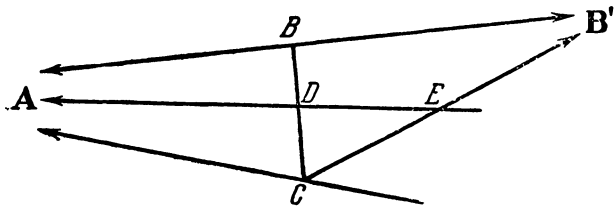
Если в треугольнике есть еще одна беско-

нечно удаленная вершина B' (треугольник ACB' на том же чертеже 100), то возьмем на AB' произвольную точку B ; прямая AD встретит отрезок BC в точке D , войдет в треугольник BCB' и, в силу теоремы 1, пересечет сторону CB' (поскольку стороны BB' она встретить не может).

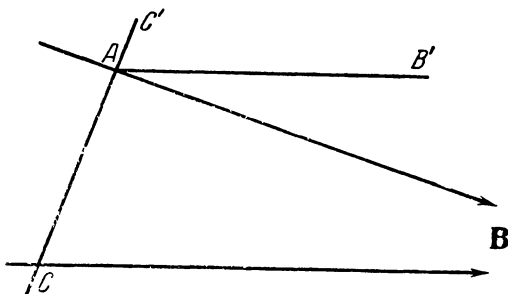
Читателя не затруднит рассмотрение других случаев, которые здесь могут встретиться.

Теорема 3. В вырожденном треугольнике внешний угол, прилежащий к одной из конечных его вершин, больше внутреннего, с ним не смежного угла.

В самом деле, пусть AC (чертеж 101) будет сторона такого треугольника, $AB \parallel CB$ —две другие его стороны. Пусть AC' будет продолжение стороны AC за точку A . При точке A и луче AC' построим угол $C'AB'$ с той же стороны, что и $C'AB$, равный углу ACB . Согласно теореме 1, рубр. 2, § 20 (стр. 174), прямые AB' и CB расходятся; поэтому луч AB , параллельный CB , проходит ближе к секущей AC , нежели AB' , так что $\angle BAC' > \angle B'AC'$, т. е. $\angle BAC' > \angle ACB$.

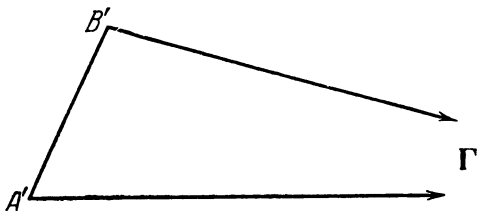
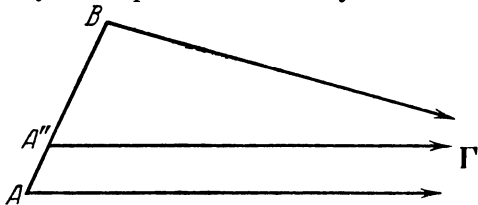


Черт. 100.



Черт. 101.

2. Условия конгруэнтности вырожденных треугольников. Мы знаем, что треугольник определяется тремя из шести основных своих элементов; в гиперболической плоскости—даже тремя своими углами (теорема 8, § 17, рубр. 7, стр. 161). Если имеем два вырожденных треугольника с двумя конечными и одной бесконечно удаленной вершиной каждый, то углы при бесконечно удаленных вершинах можно считать равными нулю; они равны между собой; такой треугольник должен определяться двумя своими элементами. Это подтверждается следующим предложением.



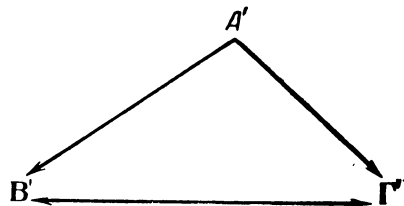
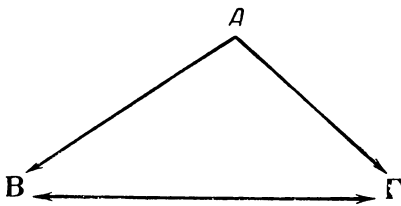
Черт. 102.

Теорема 4. Два треугольника, с двумя конечными и одной бесконечно удаленной вершиной каждый, конгруэнтны: а) если конечные их стороны равны и один из прилежащих к конечной стороне углов одного треугольника равен соответствующему углу другого

треугольника; б) если два угла, прилежащие к конечной стороне одного треугольника, равны соответствующим углам другого треугольника.

Доказательство. а) Предположим, что в двух вырожденных треугольниках, изображенных на черт. 102, $AB = A'B'$ и $\angle AB\Gamma = \angle A'B'\Gamma'$. Наложим треугольник (полосу) $A'B'\Gamma'$ на треугольник $AB\Gamma$ так, чтобы угол $A'B'\Gamma'$ совпал с углом $AB\Gamma$; ориентированная прямая $\vec{B'\Gamma'}$ совпадет с $\vec{B\Gamma}$. По равенству сторон BA и $B'A'$ точка A' упадет в точку A и луч $A'\Gamma'$, параллельный $B'\Gamma'$, совпадет с лучом $A\Gamma$, параллельным $B\Gamma$.

б) Если $\angle A'B\Gamma' = \angle AB\Gamma$ и $\angle B'A\Gamma' = \angle BA\Gamma$, то при том же совмещении углов $A'B\Gamma'$ и $AB\Gamma$ сторона $A'B'$ также совместится с AB . В са-



Черт. 103.

мом деле, если бы сторона $A'B'$ оказалась не равной AB ,—скажем, меньше AB , то луч $A'\Gamma'$ занял бы положение $A'\Gamma' \parallel B\Gamma$. Следовательно, лучи $A'\Gamma'$ и $A\Gamma$, параллельные $B\Gamma$, были бы параллельны между собой, имея при этом равные соответственные углы $BA'\Gamma'$ и $BA\Gamma$,—что невозможно.

Треугольник с двумя конечными и одной бесконечно удаленной вершиной часто называют **двуугольником**. Мы будем пользоваться этим термином.

В случае треугольников с двумя бесконечно удаленными вершинами каждый (основная конфигурация Лобачевского) углы при них равны (черт. 103, $\angle B = \angle B' = 0$, $\angle \Gamma = \angle \Gamma' = 0$). Конгруэнтность треугольников требует только одного дополнительного условия, что и подтверждается следующим предложением.

Теорема 5. Два треугольника с двумя бесконечно удаленными вершинами каждый, конгруэнтны, если углы при их конечных вершинах равны.

В самом деле, если привести в совмещение равные углы, то совместятся и их заградительные прямые.

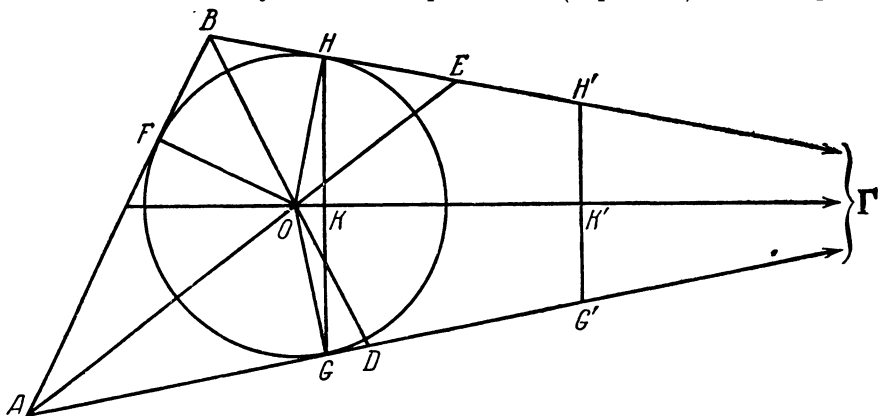
Треугольник с двумя бесконечно удаленными вершинами часто называют **одноугольником**.

Наконец, если оба треугольника имеют каждый все три вершины бесконечно удаленные, то можно считать, что три угла одного равны трем углам другого и треугольники должны быть конгруэнтны. Это подтверждается следующим предложением.

Теорема 6. Все треугольники с тремя бесконечно удаленными вершинами каждый, конгруэнтны.

В самом деле, если совместим две полосы, составленные двумя сторонами одного и двумя сторонами другого треугольника (что возможно, см. теорему 3, § 21, стр. 185), то совместятся и их заградительные прямые, т. е. третьи стороны двух треугольников.

3. Окружность, вписанная в вырожденный треугольник. В связи с этим стоят следующие соображения. Пусть $AB\Gamma$ — вырожденный треугольник с бесконечно удаленной вершиной Γ (черт. 104). Биссектриса AE



Черт. 104.

угла BAG , входя внутрь опорного угла BAG , встретит сторону $B\Gamma$ треугольника в некоторой точке E ; образуется треугольник ABE . Биссектриса угла ABE встретит сторону AE в некоторой точке O . Легко видеть, что расстояния OF , OG , OH точки O от сторон треугольника $AB\Gamma$ равны; она служит поэтому центром окружности, вписанной в этот треугольник.

Так как $\angle OGH = \angle OHG$, то GH есть секущая равного наклона параллелей $A\Gamma$ и $B\Gamma$: перпендикуляр OK , опущенный на нее из центра O , проходит через середину K отрезка GH ; в силу теоремы 4, рубр. 5, § 19 (стр. 170) он параллелен прямым $A\Gamma$ и $B\Gamma$. От точек G и H в одну и ту же сторону отложим равные отрезки GG' и HH' и соединим точки G' и H' . Перпен-

дикуляр OK войдет внутрь четырехугольника $GHH'G'$ и выйдет из него через точку K' на отрезке $G'H'$. Легко видеть, что четырехугольники $OGG'K'$ и $OHH'K'$ равны; поэтому $G'H'$ также есть секущая равного наклона параллелей $A\Gamma$ и $B\Gamma$, делится в точке K' пополам и перпендикулярна к OK' . Заметим, что двух секущих равного наклона к двум прямым через одну и ту же точку одной из них проходить не может, ибо при передвижении, скажем, точки H по прямой $B\Gamma$ один из двух углов $\angle GH\Gamma$ и $\angle H\Gamma\Gamma$ возрастает, а другой убывает.

Так как точки A и B могут быть выбраны на двух параллелях совершенно произвольно, то это приводит к теореме 4а (§ 19, рубр. 5, стр. 171), которую по ее важности мы вновь приводим здесь в уточненном виде.

Теорема 7. Через каждую точку одной из двух параллельных линий проходит одна и только одна секущая равного наклона этих параллелей; середины этих секущих отрезков лежат на одной прямой, перпендикулярной к ним, — на оси симметрии этих параллельных линий.

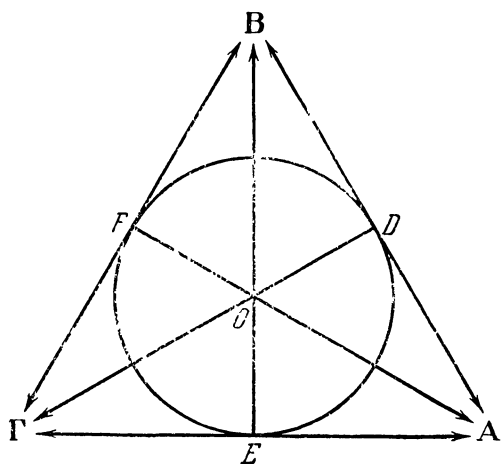
Так как в случае пересекающихся прямых каждая ось симметрии совпадает с биссектрисой двух вертикальных углов, ими образуемых, то в вырожденном треугольнике с бесконечно удаленной вершиной Γ ось симметрии параллелей $A\Gamma$ и $B\Gamma$ принимают за биссектрису нулевого угла Γ , который стороны $A\Gamma$ и $B\Gamma$ образуют в бесконечно удаленной вершине Γ (см. § 19, рубр. 5, теорема 4а, стр. 170). Как мы видим, эта биссектриса проходит через точку пересечения двух других биссектрис.

Предоставляя читателю рассмотреть треугольник с двумя или тремя бесконечно удаленными вершинами, формулируем следующее предложение.

Теорема 8. В вырожденном треугольнике биссектрисы трех внутренних его углов пересекаются, как и в обыкновенном треугольнике, в одной точке — в центре окружности, вписанной в этот треугольник.

Если биссектриса OG перпендикулярна к третьей стороне AB двугульника $AB\Gamma$, то она делит ее пополам; треугольник рассматривается как равнобедренный с основанием AB ; углы при основании равны. В треугольнике с тремя бесконечно удаленными вершинами каждая биссектриса перпендикулярна к соответствующей стороне треугольника (черт. 105). Основание этого перпендикуляра можно рассматривать как середину противоположной стороны.

В связи с тем, что две параллельные прямые имеют только одну ось симметрии, отметим, что и две расходящиеся прямые имеют только одну ось симметрии, которой служит прямая, перпендикулярная к отрезку, перпендикулярному к этим двум прямым, в его середине. Предоставляем это доказать читателю.



Черт. 105.

§ 23. ВАЖНЕЙШИЕ ТИПЫ ЧЕТЫРЕХУГОЛЬНИКОВ В ГИПЕРБОЛИЧЕСКОЙ ПЛОСКОСТИ

1. Четырехугольники Саккери. При развертывании гиперболической геометрии приходится иметь дело с четырехугольниками различных типов; мы рассмотрим здесь важнейшие из них.

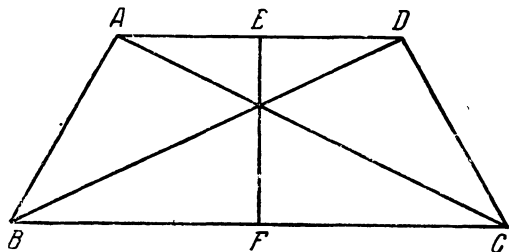
В предыдущей главе мы уже встречались с так называемыми четырехугольниками Саккери (§ 16, рубр. 2, стр. 145—146), т. е. с четырехугольниками, в которых при одном (нижнем) основании углы прямые, а боковые стороны равны. Углы при верхнем основании также равны; средняя линия (т. е. прямая, соединяющая середины оснований) перпендикулярна к обоим основаниям. Если в двух четырехугольниках Саккери как нижние основания, так и боковые стороны соответственно равны, то они конгруэнтны.

Этими предложениями нам уже приходилось пользоваться, но они допускают обобщения в различных направлениях.

Теорема 1. Если в двух четырехугольниках Саккери равны верхние основания и прилежащие к ним углы, то они конгруэнтны.

В самом деле, если наложим один из таких четырехугольников на другой так, чтобы верхние основания совпадали, то боковые стороны одного пойдут по боковым сторонам другого; но при этом должны совпасть и нижние основания, ибо в противном случае они составили бы с боковыми сторонами четырехугольник с четырьмя прямыми углами, что не может иметь места.

2. Равнобоочные четырехугольники. Две противоположные стороны выпуклого четырехугольника будем называть основаниями, а две остальные стороны — боковыми сторонами. Четырехугольник, в котором боковые стороны равны и образуют равные внутренние углы с одним из оснований, будем называть равнобоочным (черт. 106). Четырехугольники Саккери суть равнобоочные четырехугольники с прямыми углами при одном из оснований.



Черт. 106.

Теорема 2. В равнобоочном четырехугольнике равны как углы, прилежащие к одному основанию (по определению), так и прилежащие к другому основанию; средняя линия перпендикулярна к обоим основаниям.

Для доказательства накладываем четырехугольник на самого себя, предварительно его опрокинув. Разбивая четырехугольник диагоналями на треугольники, можно также провести доказательство, основываясь только на равенстве этих треугольников.

Теорема 2а. Если в четырехугольнике равны внутренние углы, прилежащие как к одному, так и к другому основанию, то он равнобоочный.

Доказательство (от противного). Положим, что в четырехугольнике $ABCD$ попарно равны как углы ABC и DCB , так и углы

BAD и CDA (черт. 107). Если бы боковые стороны при этом не были равны (скажем, $AB < CD$), то, отложив на CD отрезок $CD' = BA$, получили бы равнобокий четырехугольник $ABCD'$; углы BAD' и $CD'A$ были бы равны; между тем $\angle AD'C > \angle ADC$, $\angle BAD' < \angle BAD$; при равенстве углов BAD и CDA это невозможно.

Теоремы 2 и 2а суть обобщения теорем, относящихся к четырехугольникам Саккери.

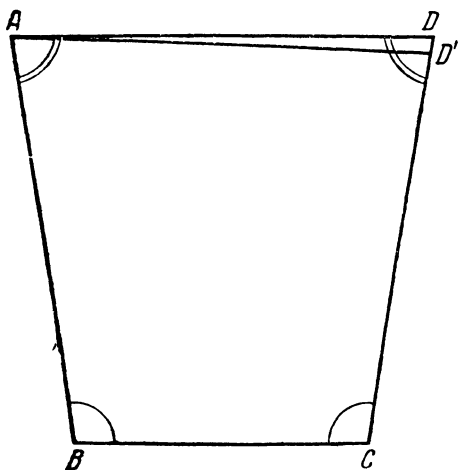
3. Двупрямоугольные четырехугольники. Четырехугольники, в которых имеются два прямых угла, будем называть двупрямоугольными. Существует два типа двупрямоугольных четырехугольников: в четырехугольниках первого типа прямые углы противолежат один другому (черт. 108, а — углы A и C прямые), в четырехугольниках второго

типа они прилежат к одному и тому же основанию (черт. 108, б — углы B и C прямые). Четырехугольники последнего типа будем называть короче двупрямоугольниками; сторону, к которой в двупрямоугольнике прилежат прямые углы, будем называть его нижним основанием, а противоположную сторону — верхним основанием. Четырехугольники Саккери суть равнобокие двупрямоугольники.

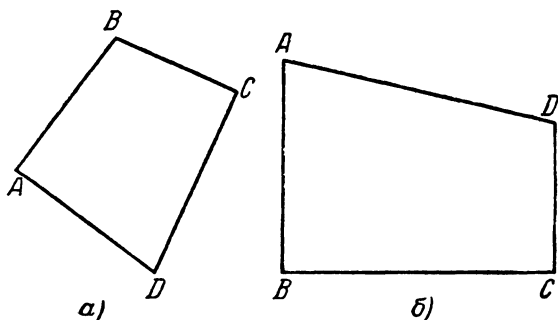
Теорема 3. Двупрямоугольник, в котором углы при верхнем основании равны, есть четырехугольник Саккери.

Это вытекает непосредственно из только что рассмотренной теоремы 2а.

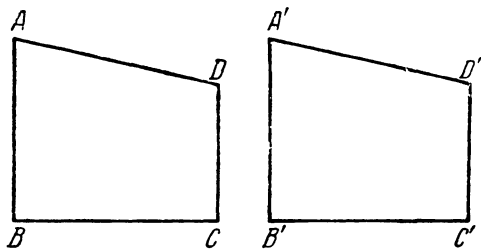
Теорема 4. Два двупрямоугольника $ABCD$ и $A'B'C'D'$ (черт. 109) конгруэнтны: а) если равны их нижние основания и попарно равны их боковые стороны ($B'C' = BC$, $A'B' = AB$, $D'C' = DC$); б) если равны верхние основания и попарно равны прилежащие к ним углы ($A'D' = AD$, $\angle A' = \angle A$, $\angle D' = \angle D$); в) если равны верхние основания, одна боковая сторона одного равна боковой стороне другого



Черт. 107.



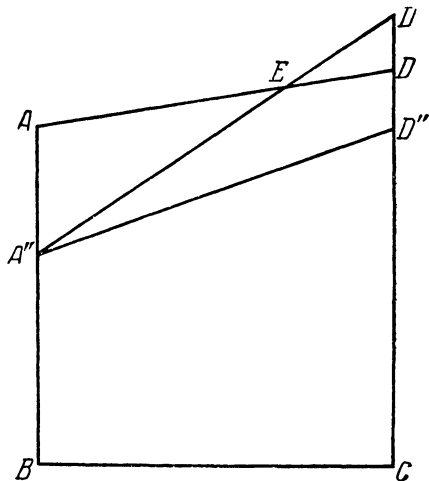
Черт. 108.



Черт. 109.

и равны заключенные между ними углы ($A'D' = AD$, $A'B' = AB$, $\angle A' = \angle A$); d) если равны нижние основания и попарно равны углы при верхних основаниях ($B'C' = BC$, $\angle A' = \angle A$, $\angle D' = \angle D$); e) если равны верхние основания и попарно равны боковые стороны ($A'D' = AD$, $A'B' = AB$, $D'C' = DC$).

Случаи а) и с) доказываются непосредственным наложением. Наложением же, однако от противного, доказываются случаи b) и d). Именно, в случае d) допустим, что $A'B' < AB$. Если наложим четырехугольник $A'B'C'D'$ на $ABCD$ так, чтобы нижние основания совпали, то точка A' упадет в некоторую точку A'' между A и B (черт. 110). Вершина D' упадет в некоторую точку D'' на прямой CD . Отрезок $A''D''$ не может иметь общей точки с отрезком AD , так как при общей точке E образовался бы треугольник AEA'' , в котором внешний угол $BA''E$ был бы равен внутреннему BAE . Следовательно, точка D'' будет лежать между C и D .

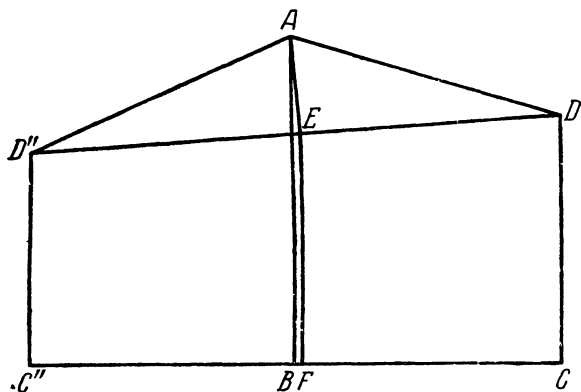


Черт. 110.

Но в таком случае при равенстве углов $BA''D''$ и BAD , $CD''A''$ и CDA в четырехугольнике $AA''D''D$ сумма внутренних углов была бы равна 2π , что не может иметь места. Случай b) предоставляем рассмотреть читателю.

Наконец, в случае e) прикладываем двупрямоугольник $A'B'C'D'$ к $ABCD$ так, чтобы совпали равные стороны $A'B'$ и AB и оба двупрямоугольника расположились по разные стороны

(черт. 111). Сторона $C'D'$ займет положение $C''D''$. Пусть E будет середина отрезка DD'' ; F — середина отрезка CC'' . Так как треугольник DAD'' — равнобедренный, то $AE \perp DD''$. С другой стороны, средняя линия EF четырехугольника Саккери $DCC''D''$ перпендикулярна к DD'' и CC'' . Прямые AE и EF составляют продолжение одна другой; а так как прямая $EF \perp CC''$, то сторона AF должна совпа-

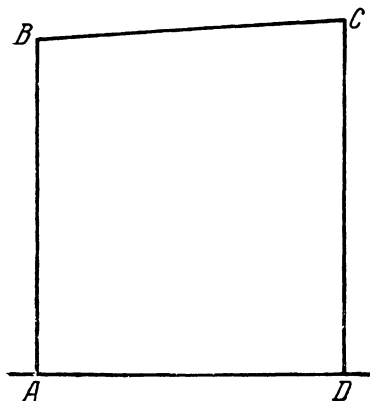


Черт. 111.

дать с перпендикуляром к прямой CC'' ; поэтому $CB = C''B$, и мы находимся в условиях случая а).

4. Трипрямоугольники. Если из точки, лежащей внутри прямого угла, опустим перпендикуляры на его стороны, то образуется четырехугольник, в котором три угла прямые, а четвертый — острый (черт. 112, острый

угол — C); такого рода четырехугольниками, как известно, занимался Ламберт (§ 16, рубр. 3. стр. 149); их называют поэтому четырехугольниками Ламберта или трипрямоугольниками¹⁾. Средняя линия четырехугольника Саккери делит его на два конгруэнтных трипрямоугольника. Две стороны, к которым прилежат только прямые углы, называются основаниями, две другие — высотами этого трипрямоугольника. Два трипрямоугольника конгруэнтны, если два элемента одного (конечно, помимо прямых углов) равны соответственным элементам другого; отметим следующие случаи.



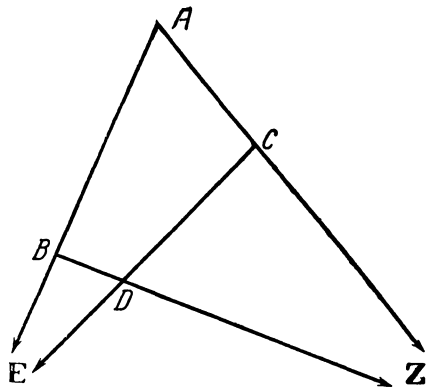
Черт. 112.

Теорема 5. Два трипрямоугольника конгруэнтны: а) если оба основания одного равны основаниям другого, б) если основание и прилежащая высота одного соответственно равны основанию и прилежащей высоте другого, с) если основание и противолежащая сторона (высота) одного равны соответственным элементам другого, д) если две высоты одного равны двум высотам другого, е) если высота и острый угол одного равны соответственным элементам

другого, ф) если основание и острый угол одного равны соответственным элементам другого.

Читателя не затруднит доказательство этих теорем: свдвигая трипрямоугольники (случаи д) и ф)), приведем эти теоремы к соответствующим теоремам, относящимся к четырехугольникам Саккери; случаи а) и б) доказываются непосредственным наложением; случаи с) и е) — наложением, от противного.

5. Гиперболический параллелограмм. Четырехугольник $ABDC$ в гиперболической плоскости, в котором противоположные стороны параллельны, и именно $AB \parallel CD$ и $AC \parallel BD$ (черт. 113) будем называть гиперболическим параллелограммом. Вершину A , из которой выходят стороны AB и AC , параллельные при этом их обращении противо-



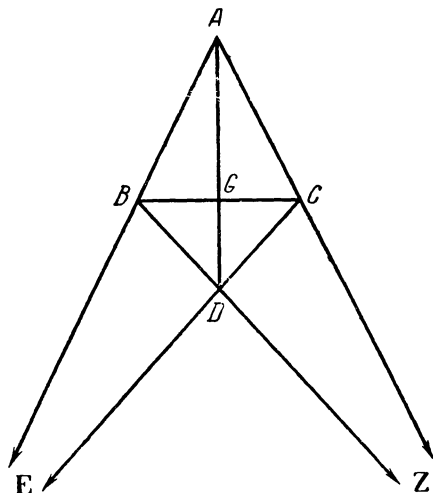
Черт. 113.

положенным сторонам, соответственно $\vec{CD}$ и $\vec{BD}$, будем называть первой основной вершиной параллелограмма, противоположную ей вершину D — его второй основной вершиной; две другие вершины (B и C) будем называть боковыми вершинами. Параллелограмм, в котором стороны, выходящие из одной из основных вершин, равны, называется гиперболическим ромбом (черт. 114).

¹⁾ Термин принадлежит проф. Д. Д. Мордухай-Болтовскому [91].

Теорема 6. В гиперболическом ромбе стороны, выходящие из каждой основной вершины, равны, а диагонали взаимно перпендикулярны.

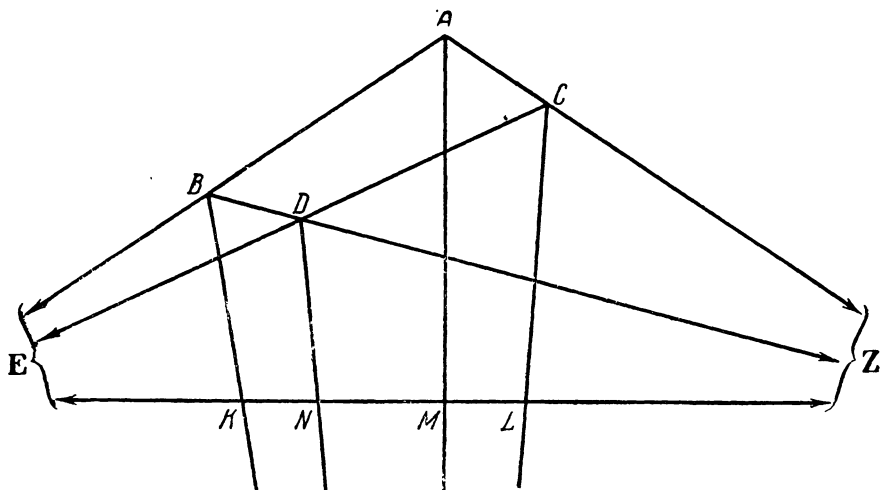
Доказательство. Если равны стороны AB и AC (черт. 114), то двугульники ACE и ABZ конгруэнтны (§ 22, рубр. 2, теорема 4, стр. 190); углы ABD и ACD равны; так как треугольник BAC равнобедренный, то углы ABC и ACB равны, а потому равны и углы DBC и DCB ; следовательно, стороны DB и DC также равны. Прямые, соединяющие основные вершины с серединой G диагонали BC , перпендикулярны к последней и образуют диагональ AD . Существенное отличие гиперболического ромба от евклидова заключается в том, что в нем противоположные стороны не равны.



Черт. 114.

Теорема 7. В гиперболическом параллелограмме биссектрисы внешних углов при боковых вершинах и биссектрисы внутренних углов при основных вершинах попарно расходятся.

Доказательство. Пусть $ABDC$ будет гиперболический параллелограмм (черт. 115); A — его первая основная вершина. Пусть EZ будет заградительная прямая угла BAC , так что $\vec{ZE} \parallel \vec{AB}$; $\vec{EZ} \parallel \vec{AC}$. Биссектриса AM угла A перпендикулярна к EZ . Но при этих условиях



Черт. 115.

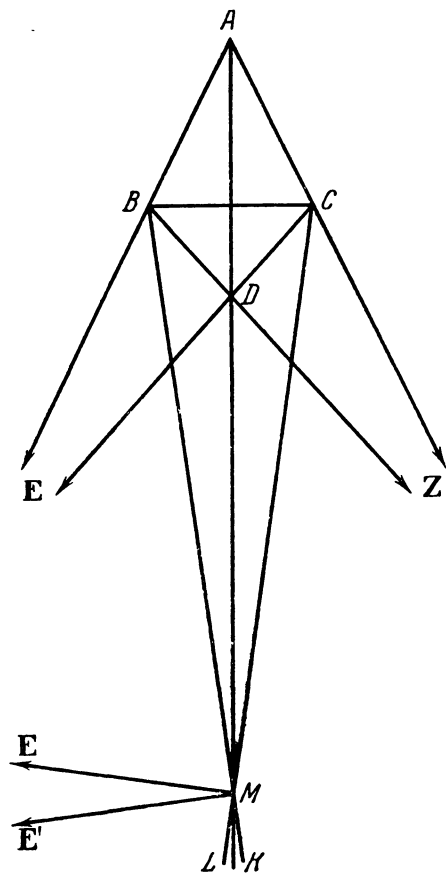
также $\vec{ZE} \parallel \vec{CE}$ и $\vec{EZ} \parallel \vec{BZ}$. Прямая EZ является поэтому заградительной для сторон угла EBZ , а также и для сторон углов EDZ и ECZ . Поэтому биссектрисы BK , DN и CL этих углов перпендикулярны к EZ , а потому

все четыре биссектрисы BK , DN , CL и AM попарно расходятся: они все перпендикулярны к одной и той же прямой $EKNMLZ$.

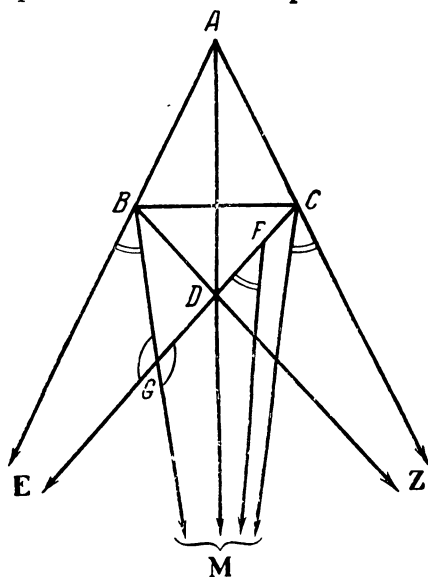
В частности, расходятся три биссектрисы гиперболического ромба. В этом именно виде теорема высказана Гильбертом [90]. Сформулированное выше ее обобщение и приведенное простое доказательство принадлежат Я. С. Дубнову. Однако доказательство теоремы Дубнова основано на существовании заградительной прямой сторон угла и, следовательно, на второй основной теореме (§ 20, рубр. 3, стр. 175). Для Гильберта, как мы увидим ниже (§ 29, рубр. 4, стр. 237), было очень существенно провести доказательство этого предложения, не опираясь на вторую основную теорему. Он дал поэтому другое, правда, более сложное, доказательство, не предполагающее существования заградительной прямой. Мы приведем здесь это доказательство.

6. Теорема Гильберта. Биссектрисы внешних углов гиперболического ромба расходятся.

Доказательство. Пусть $ABDC$ будет гиперболический ромб с первой основной вершиной A



Черт. 116.



Черт. 117.

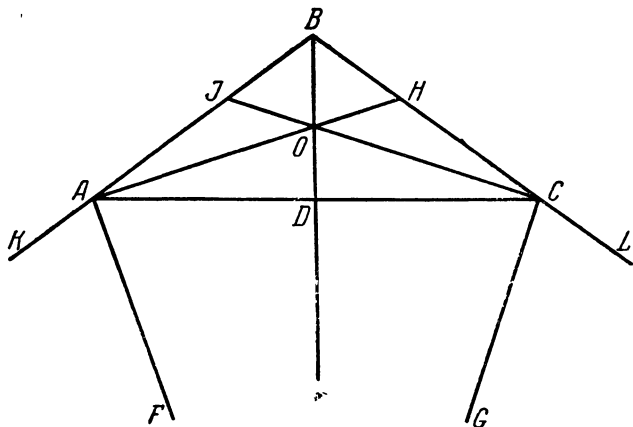
(черт. 116). Пусть BK и CL — биссектрисы его внешних углов при вершинах B и C . В порядке доказательства от противного допустим сначала, что эти биссектрисы пересекаются в точке M ; ясно, что эта точка должна лежать на биссектрисе AD угла A . Через E и Z обозначим бесконечно удаленные точки лучей $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$. Через точку M проведем луч ME , параллельный лучам AB (AE) и CD (CE). Теперь повернем плоскость с лежащими на ней лучами CE и ME вокруг точки M на угол CMB . Тогда точка C попадет в точку B , прямая CM совместится с BM ; по равенству углов EBM и ECM , MBZ и MCZ (половины равных углов) лучи CE и CZ пойдут соответ-

ственно по лучам BE и BZ . Луч ME , параллельный CE , повернется в положение ME' , параллельное BE . Таким образом, из точки M будут выходить два различных луча ME и ME' , параллельные лучу BE , что не может иметь места.

Теперь допустим, что биссектрисы, о которых идет речь — BM и CM (черт. 117), параллельны. По симметрии (или в силу приводимой ниже теоремы 1) (§ 24, рубр. 1, стр. 201) они параллельны также биссектрисе внутреннего угла A треугольника BAC . Луч CD , входя внутрь вырожденного треугольника BCM , встретит его сторону BM в точке G . В таком случае отрезки BG и GC равны. В самом деле, если $BG \neq GC$, то мы на луче GC от точки G отложим отрезок $GF = BG$ и через точку F проведем луч FM , параллельный биссектрисам BM и CM . Вырожденные треугольники GBE и GFM , имеющие равные стороны $GB = GF$ и равные углы $BGE = FGM$, конгруэнтны (§ 22, теорема 4, стр. 190), а потому $\angle GBE = \angle GFM$. А так как $\angle GBE = \angle GCM$, как половины равных углов, то $\angle GFM = \angle GCM$. Но лучи FM и CM , образующие равные соответственные углы с секущей CF , не могут быть параллельны. Итак, $BG = GC$. Но в таком случае $\angle GCB = \angle GBC$, что также не может иметь места, так как $\angle GCB = \angle DBC$. Биссектрисы внешних углов гиперболического ромба не могут быть ни сходящимися, ни параллельными; они расходятся.

§ 24. ЗАМЕЧАТЕЛЬНЫЕ ТОЧКИ И ПРЯМЫЕ ТРЕУГОЛЬНИКА

1. Биссектрисы внутренних и внешних углов треугольника. Соображения, которыми закончен параграф 22 (стр. 192), приводят к так называемым замечательным точкам и прямым треугольника в гиперболической плоскости. Как и в евклидовой плоскости, центр вписанной в треугольник окружности есть одна из таких замечательных точек: биссектрисы внутренних углов треугольника всегда пересекаются в одной точке, — это и есть центр вписанной окружности (см. § 17, рубр. 4, стр. 156). Но в евклидовой плоскости биссектриса внутреннего угла треугольника всегда пересекается также в одной точке с биссектрисами внешних углов, построенных при двух других вершинах треугольника; это — центр так называемой невписанной окружности; в евклидовой плоскости, кроме окружности, вписанной в треугольник, всегда существуют три невписанные в него окружности. Не так обстоит дело в гиперболической плоскости.



Черт. 118.

Читателю не представит, конечно, труда доказать, что в том случае, если биссектриса внутреннего угла пересекается с биссектрисой внешнего угла, построенного при другой вершине, через точку их пересечения, проходит также биссектриса внешнего угла при третьей вершине. Но такого пересечения может и не происходить. Возьмем, например, равнобедренный треугольник ABC (черт. 118). Приближая вершину B по высоте BD к основанию,

стояния EP и EQ этой точки от прямых BA и BC равны; равны и углы BER и BEQ . Далее, в трипрямоугольниках $PEJH$ и $QENM$ равны основания HJ и MN , а также противолежащие высоты EP и EQ ; эти трипрямоугольники поэтому конгруэнтны (теорема 5(с), § 23, стр. 196), а потому равны также углы JEP и NEQ . Вместе с тем равны углы JEB и NEB , т. е. биссектриса BE также перпендикулярна к прямой FG .

Если биссектрисы AF и CG параллельны (тот же чертеж 120), то ни одна из них не может встретить третьей биссектрисы BD , ибо через точку пересечения, если бы таковая существовала, проходила бы и третья биссектриса. А так как точка D , в которой биссектриса BD встречает сторону AC , лежит между A и C , то биссектриса BD расположена между двумя параллелями AF и CG , а потому параллельна им (§ 19, рубр. 4, теорема 3, стр. 169). Мы приходим, таким образом, к следующему выводу.

Теорема 1. Если биссектрисы двух внешних углов треугольника пересекаются, то через точку их пересечения проходит и биссектриса внутреннего угла при третьей вершине треугольника; точка их пересечения одинаково удалена от прямых, образующих треугольник. Если первые две биссектрисы параллельны, то им параллельна и третья биссектриса. Если первые две биссектрисы расходятся, то с ними расходятся и третья биссектриса, причем все три биссектрисы перпендикулярны к одной и той же прямой, одинаково удаленной от всех трех сторон треугольника.

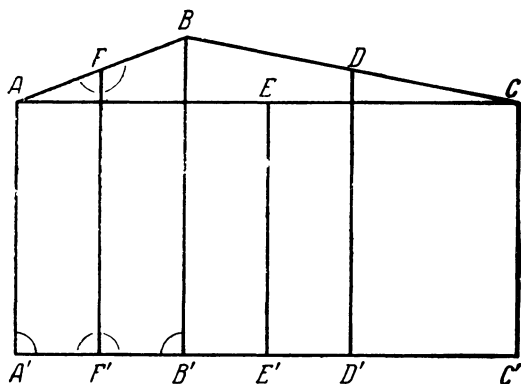
2. Серединные перпендикуляры треугольника. Как мы видели выше (§ 17, рубр. 4, стр. 156), теорема о том, что около всякого треугольника можно описать окружность, носит строго евклидов характер в том смысле, что принять это предложение эквивалентно тому, чтобы принять постулат о параллельных линиях. Причины этого теперь лучше уяснятся, когда мы детально исследуем, как в гиперболической плоскости обстоит вопрос о проведении окружности через три точки, не лежащие на общей прямой.

Теорема 2а. Если перпендикуляры, восстановленные к двум сторонам треугольника из их середин, пересекаются, то перпендикуляр, восстановленный к третьей стороне из ее середины, проходит через точку их пересечения.

Мы здесь приводим это предложение только для его сопоставления с двумя следующими; мы на нем уже останавливались выше (§ 17, рубр. 4, стр. 156—167); точка пересечения серединных перпендикуляров в этом случае служит центром окружности, описанной около треугольника. Но описанной окружности в гиперболической плоскости может и не существовать; поведение серединных перпендикуляров в этом случае характеризуется следующими двумя предложениями.

Теорема 2б. Если два перпендикуляра, восстановленные к сторонам треугольника из их середин, расходятся, то и перпендикуляр, восстановленный к третьей стороне из ее середины, расходится с каждым из них; в этом случае существует прямая, перпендикулярная ко всем трем серединным перпендикулярам, и все три вершины треугольника одинаково удалены от этой прямой.

Доказательство. Допустим, что перпендикуляры DD' и FF' , восстановленные к сторонам BC и AB треугольника ABC из их середин D и F , расходятся (черт. 121). В таком случае существует общий к DD' и FF' перпендикуляр $D'F'$. Из вершин треугольника опустим на $D'F'$ перпендикуляры AA' , BB' и CC' . Три прямоугольника $AA'F'F$ и $BB'F'F$



Черт. 121.

конгруэнтны [теорема 5 (b), § 23, стр. 196]; вместе с тем $AA' = BB'$. Таким же образом убедимся, что $BB' = CC'$, а следовательно, $AA' = CC'$. Поэтому $AA'C'C$ есть четырехугольник Саккери с нижним основанием $A'C'$ и боковыми сторонами AA' и CC' . Если E и E' суть середины верхнего основания AC и нижнего $A'C'$, то EE' есть средняя линия этого четырехугольника; в силу теоремы 2 § 23, (стр. 193) она перпендикулярна как к AC , так и к $A'C'$. Иначе говоря, EE' есть перпендикуляр к стороне AC треугольника

в ее середине E и он перпендикулярен к $A'C'$. Вместе с тем прямая $A'B'C'$ перпендикулярна ко всем серединным перпендикулярам треугольника ABC ; а так как $AA' = BB' = CC'$, то три вершины треугольника одинаково удалены от этой прямой.

Теорема 2с. Если перпендикуляры, восстановленные к двум сторонам треугольника из их середин, будучи ориентированы в надлежащую сторону, параллельны, то перпендикуляр, восстановленный к третьей стороне из ее середины, при надлежащей ориентации также параллелен им.

Предложение доказывается путем исключения на основе теорем 2а и 2б.

Таким образом, серединные перпендикуляры либо сходятся в одной точке, либо все три перпендикуляры к одной прямой, равно удаленной от вершин треугольника, либо все три параллельны.

Как видим, если в треугольнике расходятся три биссектрисы его углов (внутреннего и двух внешних), то общий их перпендикуляр одинаково удален от трех сторон треугольника; если расходятся три его серединных перпендикуляра, то общий к ним перпендикуляр одинаково удален от вершин треугольника.

3. Точка пересечения высот треугольника. Следующая группа особых прямых и точек в гиперболической плоскости, как и в евклидовой, связана с высотами треугольника.

Теорема 3а. Если две высоты треугольника пересекаются, то и третья высота проходит через точку их пересечения.

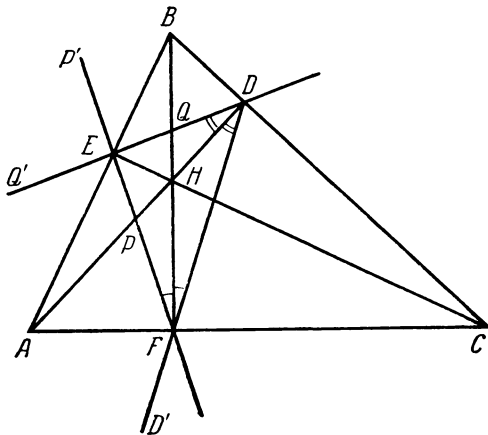
Доказательство. Если треугольник остроугольный, то все три высоты проходят внутри треугольника и поэтому попарно пересекаются; нужно доказать, что точки пересечения совпадают. Этот случай мы и рассмотрим.

Положим, что высоты AD и BF треугольника ABC пересекаются внутри его в точке H (черт. 122). Проведем прямую DF и две другие

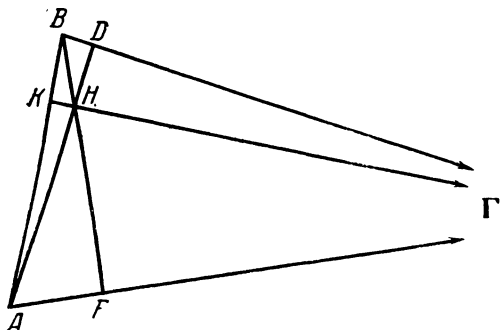
прямые FP и DQ , представляющие собой отражения прямой DF от высот BF и AD , так что

$$\angle BFP = \angle BFD, \quad \angle ADQ = \angle ADF;$$

точки их пересечения с соответствующими высотами AD и BF обозначим через P и Q . Прямая FA будет служить биссектрисой угла PFD' , смежного с EFD , а потому точка A равно удалена от прямых FE и FD' . Так как DA есть биссектриса угла QDF , то точка A одинаково удалена также от прямых DQ и DF . Поэтому точка A одинаково удалена также от прямых FP и DQ , т. е. лежит на их оси симметрии. Если бы эти прямые не пересекались, то точка A неизбежно лежала бы между ними, т. е. внутри отрезка PD (§ 22, рубр. 3, теорема 7, стр. 192), что не имеет места. Следовательно, прямые FP и DQ пересекаются в некоторой точке E , причем вершина A нашего треугольника лежит на биссектрисе угла FEQ' (где EQ' есть продолжение отрезка EQ). По совершенно таким же соображениям точка B лежит на биссектрисе угла DEP' , вертикального с углом FEQ' ; это значит, что лучи EA и EB составляют продолжения друг друга; иначе говоря, точка E лежит на стороне AB нашего треугольника. Точка H лежит на пересечении биссектрис FQ и DP двух внутренних углов треугольника EFD ; поэтому через нее проходит также биссектриса EH третьего угла DEF . Отсюда следует, что прямая EH перпендикулярна к биссектрисе AB двух углов FEQ' и DEP' , смежных с углом FED . Наконец, так как прямые AC и BC перпендикулярны соответственно к BF и AD , то они делят пополам два внешних угла (при вершинах F и D треугольника FED). А так как эти биссектрисы пересекаются в точке C , то через нее проходит и биссектриса третьего угла FED ;



Черт. 122.



Черт. 123.

эта биссектриса, таким образом, совпадает с третьей высотой CE треугольника ABC и вместе с тем проходит через точку пересечения H двух других его высот.

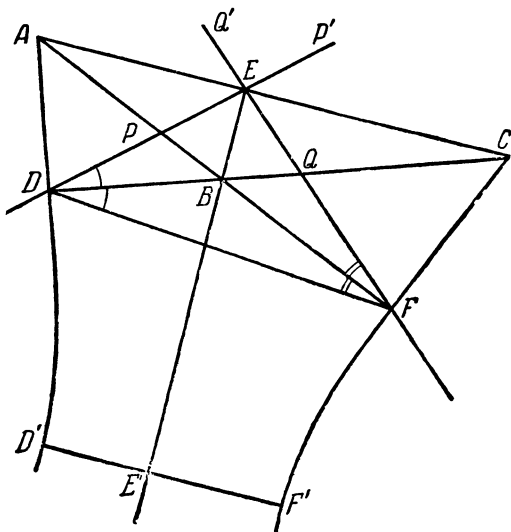
Легко видеть, что это рассуждение остается в силе и в том случае, когда третья вершина Γ лежит в бесконечности, т. е. треугольник $AB\Gamma$ — вырожденный (двуугольник). Высота, выходящая из вершины Γ , в этом случае есть прямая $K\Gamma$ (черт. 123), перпендикулярная к AB и параллельная $A\Gamma'$ и $B\Gamma'$. Такая прямая проходит через точку K , для которой $\Pi(AK) = \angle BA\Gamma$ (если угол $BA\Gamma$ острый).

Теорема 3б. Если две высоты треугольника расходятся, то и третья высота с ними расходится, причем все три высоты имеют общий перпендикуляр.

Как мы видели, высоты треугольника могут расходиться только в том случае, когда он имеет тупой угол. Впрочем, и в тупоугольном треугольнике две высоты иногда пересекаются; в этом случае через точку пересечения проходит также третья высота. Доказательство почти не отличается от того, которое изложено в применении к остроугольному треугольнику. Предоставляем читателю провести это рассуждение.

Положим, что ABC есть тупой угол (черт. 124), а высоты $AD (\perp BC)$ и $CF (\perp AB)$ расходятся, $D'E'F'$ — их общий перпендикуляр. Строим

$\angle CDP = \angle CDF$ и $\angle AFQ = \angle AFD$. Совершенно так же, как в предыдущем случае, доказываем, что прямые DP и FQ пересекаются в точке E на стороне AC нашего треугольника, которая делит пополам вертикальные углы DEQ' и FEP' . В треугольнике DEF биссектрисы DB и FB двух внутренних углов пересекаются в точке B ; через эту точку проходит поэтому также биссектриса третьего угла DEF , т. е. прямая EB есть биссектриса угла DEF и перпендикулярна к стороне AC . С другой стороны, биссектрисы DD' и FF' двух внешних углов треугольника DEF расходятся. Следовательно, по теореме 1 (стр. 201) биссектриса BE внутреннего угла DEF перпендикулярна к $D'F'$. Теорема доказана.



Черт. 124.

Теорема 3с. Если две высоты треугольника параллельны, то третья высота, будучи обращена в надлежащую сторону, также им параллельна.

Доказательство проводится путем исключения на основании теорем 3а и 3б.

4. Те же теоремы в другой терминологии. Предыдущие рубрики устанавливают три категории замечательных прямых и точек в гиперболической плоскости. Первую категорию составляют биссектрисы углов треугольника. При этом биссектрисы внутренних углов всегда пересекаются в одной точке; биссектрисы двух внешних и третьего внутреннего угла либо пересекаются в одной точке, либо параллельны, либо все три перпендикулярны к одной прямой. Совершенно так же ведут себя прямые второй категории (серединные перпендикуляры треугольника) и третьей категории (высоты треугольника).

Чтобы дать этим теоремам единообразное выражение, Либман предложил своеобразную терминологию. Мы уже не раз пользовались термином «бесконечно удаленная точка», вернее, «две прямые имеют общую бесконечно удаленную точку»; это означало, что прямые при ориентации в надлежащую сторону параллельны. Эту терминологию Либман в ука-

занных выше работах расширяет. Именно, относительно двух расходящихся прямых он говорит, что они «имеют общую идеальную точку». Выражение «две прямые имеют общую идеальную точку» при этом означает только, что эти прямые расходятся. Можно, однако, придать этому выражению и более конкретное содержание, если, как это Либман и делает, под «идеальной точкой» двух расходящихся прямых разуместь их общий перпендикуляр. При таком соглашении выражение «прямые (в каком угодно числе) имеют общую идеальную точку» означает, что все они перпендикулярны к одной и той же прямой. При этой терминологии установленные предложения допускают следующее, более простое выражение.

Теорема 4. Три биссектрисы внутренних углов треугольника, биссектрисы двух внешних и одного внутреннего угла треугольника, серединные перпендикуляры треугольника, три высоты треугольника—всегда имеют общую точку. В случае биссектрис двух внутренних углов это всегда действительная (конечная) точка; в остальных случаях она может быть действительной, бесконечно удаленной или идеальной.

Мы увидим ниже, что эта терминология допускает более четкое обоснование. Но существует еще другая терминология, не требующая обогащения гиперболической плоскости бесконечно удаленными и идеальными точками. Она ведет свое начало, повидимому, от М. Симона [⁹²] и заключается в следующем. Будем говорить, что три прямые образуют пучок, если они либо сходятся в одной (обыкновенной) точке, либо параллельны, либо перпендикулярны к одной прямой. Предыдущее предложение в этой терминологии допускает следующее выражение.

Теорема 5. Биссектрисы трех внутренних углов треугольника, биссектрисы двух внешних и третьего внутреннего угла, серединные перпендикуляры треугольника, высоты треугольника—всегда образуют пучок.

Эта терминология имеет то преимущество, что понятие о пучке прямых в гиперболической плоскости допускает развитие, которое оказывается очень полезным.

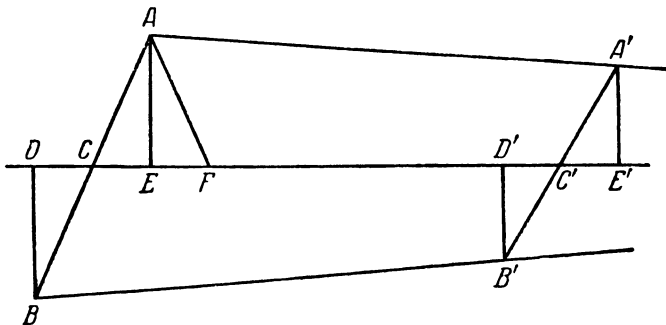
Заметим, что три медианы треугольника также образуют пучок, именно—пересекаются в одной точке. Однако доказательство этого предложения в гиперболической плоскости не осуществляется столь простыми средствами; оно найдет себе место ниже.

6. Теорема Гельмслева и Шура. Теоремы о замечательных точках и прямых в гиперболической плоскости имеют значение для решения основных двух конструктивных задач: построения угла параллельности, соответствующего данному отрезку, и построения отрезка параллельности, соответствующего данному углу. Однако решение этих задач элементарными средствами необходимо предпослать теореме, принадлежащую шведскому математику Гельмслеvu (H. Hjelmslev) [⁹³]. Теорема эта доказывается в евклидовой плоскости тривиальными средствами; Гельмслев обнаружил, что она принадлежит абсолютной геометрии, т. е. остается справедливой и в гиперболической плоскости. Теорема эта может быть сформулирована следующим образом.

Теорема 6. На двух прямых AA' и BB' (черт. 125) отложим от двух точек A и B , произвольно на них выбранных, в одну сторону равные отрезки ($AA'=BB'$). Соединим прямой линией середины C и C' отрезков AB и $A'B'$.

Прямая CC' не зависит от выбора расстояния $AA' = BB'$. Иначе говоря, середины отрезков $A'B'$, как бы они ни были выбраны при условии $AA' = BB'$, лежат на одной прямой (прямой Гельмслева, как ее называет Либман).

Доказательство. Если углы ABB' и BAA' равны, то прямая CC' (средняя линия равнобочного четырехугольника $AA'B'B$) перпендикулярна к AB и, следовательно, не зависит от выбора отрезка $A'B'$. Положим поэтому, что эти углы не равны, и из двух смежных углов при точке C угол ACC' острый. Из точек A и B опустим на прямую CC' перпендикуляры AE и BD . Треугольники ACE и BCD равны, а вместе с тем равны отрезки AE и BD , углы CAE и CBD . Таким же образом, если из точек A' и B' опустим перпендикуляры $A'E'$ и $B'D'$ на CC' , то равны отрезки $A'E'$ и $B'D'$. В двухпрямоугольниках $DBB'D'$ и $EAA'E'$, таким образом, равны верхние основания ($AA' = BB'$) и со-



Черт. 125.

ответствующие боковые стороны ($BD = AE$ и $B'D' = A'E'$); они поэтому конгруэнтны [теорема 4(е) предыдущего параграфа, стр. 195] и $\angle DBB' = \angle EAA'$. Если поэтому мы отразим прямую AC от AE , т. е. отложим $EF = EC$ и проведем прямую AF , то угол FAA' будет равен углу CBV' . Следовательно, если при точке A построим $\angle A'AF = \angle CBV'$, то прямая CC' будет перпендикулярна к биссектрисе AE угла CAF ; ее положение, таким образом, не зависит от выбора равных отрезков $AA' = BB'$.

Чертеж 125 сделан в предположении, что прямые AA' и BB' не встречаются, так что прямая CC' неизбежно проходит между ними. Читателя не затруднит рассмотреть и другой случай, который здесь может встретиться. Нам придется пользоваться только разобранным случаем и даже в том только частном предположении, что прямые AA' и BB' параллельны. В этом случае прямая CC' , проходя между этими параллелями, параллельна им.

Этой теоремой Либман воспользовался для доказательства другой теоремы, впервые точно сформулированной, повидимому, Шуром (F. Schur [**]).

Теорема 7. Если из конца A общего перпендикуляра AB к двум прямым $\vec{AM}$ и $\vec{BN}$ (черт. 126), обращенным в одну сторону, проведем прямую $\vec{AN}$, параллельную прямой $\vec{BN}$, и на этих параллелях отложим равные отрезки AA' и BB' , то прямая $A'B'$, соединяющая концы этих отрезков, встречает луч AM и притом под прямым углом.

точку пройдет и третья высота. Если поэтому из точки H опустим перпендикуляр HK на сторону AB , то он будет в сторону KH параллелен AI' и BI' , т. е. $BK(=x)$ будет отрезок параллельности, соответствующий углу $ABI' (= \omega)$:

$$\Pi(x) = \omega.$$

Решение обеих этих задач было впервые дано И. Больаи в его «Аппендиксе» [⁸⁷] (§§ 34, 35). Его решение первой задачи несущественно отличается от изложенного выше; решение второй значительно сложнее. Но обоснование этих построений было связано с соображениями, которые прямо или косвенно зависели от стереометрии гиперболического пространства. После этого другие построения были даны Жераром (L. Gérard [⁸⁸]), Энгелем (F. Engel [⁸³], [⁸⁶]) и другими авторами, которые для доказательства также пользовались тригонометрическими, иногда даже более сложными средствами. Изложенная выше теория этих построений, основанная на теореме Гельмслева, принадлежит Либману [⁸⁷]. Конечно, разыскание (в решении второй задачи) точки A , в которой угол ABI' острый, осуществляется, так сказать, ощупью. Ниже (в § 26, рубр. 7, стр. 226) приведено очень изящное построение Энгеля, свободное от этого недостатка.

ГЛАВА ЧЕТВЕРТАЯ

ПЕРВЫЕ МЕТРИЧЕСКИЕ СООТНОШЕНИЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОЙ ПЛОСКОСТИ

§ 25. ЛАТЕНТНЫЕ УРАВНЕНИЯ, СВЯЗЫВАЮЩИЕ СТОРОНЫ И УГЛЫ ПРЯМОУГОЛЬНОГО ТРЕУГОЛЬНИКА

1. Линейное задание углов. В рубр. 1 § 20 (стр. 173) было указано, что в гиперболической плоскости каждому прямолинейному отрезку a соответствует вполне определенный угол $\Pi(a)$. Теперь заметим, что основные теоремы Лобачевского (первая и вторая) дают возможность определять острый угол прямолинейным отрезком. В самом деле, согласно второй основной теореме, каждому острому углу A соответствует прямолинейный отрезок — его отрезок параллельности; следуя Лобачевскому, будем его обозначать соответствующей греческой буквой (при угле A — через α). Первая основная теорема показывает, что угол A этим отрезком определяется. Острый угол A может быть поэтому задан соответствующим отрезком α ; такое задание угла мы будем называть **линейным**. Если α есть отрезок, определяющий угол A , то

$$A = \Pi(\alpha); \quad (VI_1)$$

можно считать, что α есть положительное число, выражающее длину этого отрезка. Угол A определяется численным значением α , если установлена единица длины; численное значение этого угла определяется, если установлена единица для измерения углов.

Чтобы сделать линейное задание возможным и для тупого угла, Лобачевский устанавливает функцию $\Pi(x)$ также для отрицательных значений аргумента. Именно, если x есть положительное число, выражающее длину некоторого отрезка, то под $\Pi(-x)$, следуя Лобачевскому, разумеют угол, дополняющий $\Pi(x)$ до двух прямых углов, так что

$$\Pi(-x) + \Pi(x) = \pi. \quad (VI_2)$$

Ясно, что при таком соглашении это равенство остается в силе и для отрицательных значений x . Таким образом, отрицательному значению аргумента x всегда соответствует тупой угол $\Pi(x)$; и обратно, каждому тупому углу A всегда соответствует отрицательное число α , при котором имеет место равенство (VI_2) . При $x=0$ это соглашение дает $\Pi(0) = \frac{\pi}{2}$, что и соответствует тому, что $\Pi(x)$ стремится к $\frac{\pi}{2}$, когда x стремится к 0.

Напомним еще, что при численном задании аргумента x , функция $\Pi(x)$ имеет определенное значение только в предположении, что установлены единица длины и единица угла. Относительно меры угла мы остаемся при соглашении выражать прямой угол числом $\frac{\pi}{2}$.

Обращаясь к установлению уравнений, связывающих стороны и углы прямоугольного треугольника (с гипотенузой c , катетами a и b и острыми углами A и B), мы можем поэтому задавать их пятью линейными элементами (пятью отрезками или их длинами) a, b, c, α, β , причем

$$\Pi(\alpha) = A, \Pi(\beta) = B;$$

при численном задании отрезков все они выражаются положительными числами. Но в качестве аргумента функции $\Pi(x)$ можно x придавать и отрицательные значения.

2. Первая пара уравнений Лобачевского. Уже в первом своем мемуаре «О началах геометрии» Лобачевский указал зависимости, связывающие элементы a, b, c, α, β прямоугольного треугольника, и из них исходил при построении прямолинейной тригонометрии гиперболической плоскости. Вот как эти зависимости получаются.

Катет BC и гипотенузу AB треугольника ABC (черт. 129) продолжим за точку B . На продолжении гипотенузы отложим отрезок $BD = \beta$

и из точки D в сторону BB' восставим перпендикуляр DD' ; по значению отрезка β $DD' \parallel BB'$. Теперь из точки A проведем луч AA' , параллельный BB' . Так как он при этих условиях параллелен также DD' , то $\angle A'AB = \Pi(c + \beta)$. С другой стороны, так как при этих условиях луч AA' параллелен также CB' , то $\angle A'AC = \Pi(b)$. Следовательно, $\Pi(c + \beta) + A = \Pi(b)$, и, так как $A = \Pi(\alpha)$, то

$$\Pi(b) = \Pi(\alpha) + \Pi(c + \beta) \quad (1)$$

и, таким же образом,

$$\Pi(a) = \Pi(\beta) + \Pi(c + \alpha). \quad (2)$$

Отсюда, между прочим, видно, что $\Pi(b) > \Pi(\alpha)$ и $\Pi(a) > \Pi(\beta)$, откуда $b < \alpha, a < \beta$, как это, впрочем, ясно и из определения

отрезков α и β . Но каждый из отрезков α и β может оказаться больше или меньше гипотенузы.

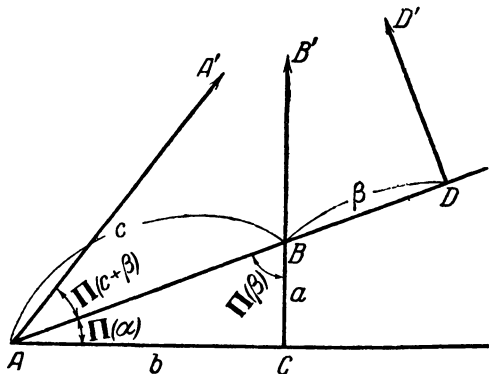
3. Вторая пара уравнений Лобачевского. Положим сначала, что $\alpha < c$. Отложив на гипотенузе AB отрезок $AD = \alpha$ (черт. 130) и восставив из D перпендикуляр DD' к гипотенузе, будем иметь $DD' \parallel AC$ (или $DD' \parallel AA'$). Если теперь проведем $BB' \parallel DD'$, то $BB' \parallel AA'$ ¹⁾. Таким образом,

$$\angle ABB' = \angle DBB' = \Pi(BD) = \Pi(c - \alpha), \angle CBB' = \Pi(a)$$

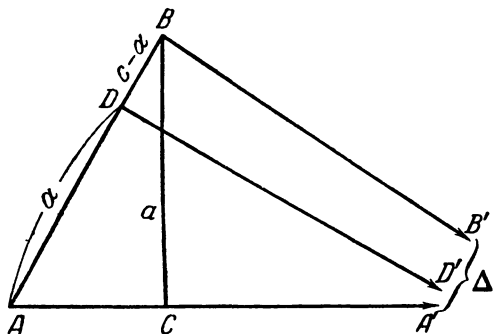
и потому

$$B + \Pi(a) = \Pi(c - \alpha)$$

¹⁾ Точки A', B' и D' могут быть заменены одной бесконечно удаленной точкой Δ .



Черт. 129.



Черт. 130.

или

$$\Pi(\beta) + \Pi(a) = \Pi(c - a); \quad (3)$$

и таким же образом при $\beta < c$

$$\Pi(a) + \Pi(b) = \Pi(c - \beta). \quad (4)$$

Положим теперь, что $a > c$. И теперь отложим на луче AB отрезок $AD = a$; точка D упадет за вершину B (черт. 131). Как и в первом случае, восставим из D перпендикуляр DD' к AD и проведем $BB' \parallel DD'$. Так как

теперь

$$\angle ABB' = \pi - \angle B'BD,$$

то

$$B + \Pi(a) = \pi - \Pi(a - c)$$

или

$$\Pi(\beta) + \Pi(a) = \pi - \Pi(a - c) \quad (3')$$

и совершенно так же при $\beta > c$

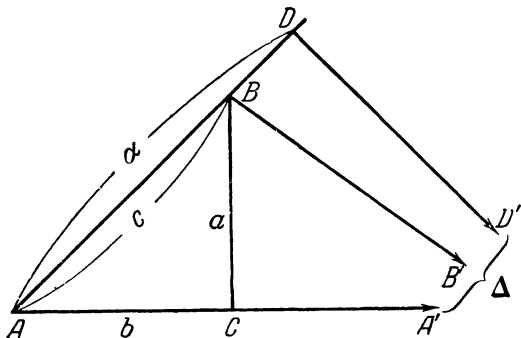
$$\Pi(a) + \Pi(b) = \pi - \Pi(\beta - c). \quad (4')$$

Совершенно ясно, что при соглашениях (VI₂), которым устанавливается значение функции

$\Pi(x)$ для отрицательных значений аргумента, уравнения (3') и (4') совпадают с уравнениями (3) и (4). Эти уравнения остаются, таким образом, в силе, независимо от того, будет ли $a > c$ или $a < c$, будет ли $\beta > c$ или $\beta < c$. Еще проще убедиться, что эти уравнения остаются в силе и при $a = c$ или $\beta = c$.

4. Латентные уравнения прямоугольного треугольника. Пять элементов прямоугольного треугольника могут быть связаны только тремя независимыми уравнениями. За такие три независимые уравнения могут быть, например, приняты (1), (2) и (4), при помощи которых по двум элементам прямоугольного треугольника можно определить остальные: если даны гипотенуза c и острый угол β , то уравнения (1) и (4) определят второй катет b и острый угол α ; после этого уравнение (2) определяет второй катет a ; четвертое уравнение (3) должно быть следствием этих трех, его следовало бы получить путем исключения из трех остальных; но мы этого не можем выполнить, потому что функция $\Pi(x)$ еще остается неизвестной. Вообще, вследствие того, что мы этой функции не знаем, мы не можем еще воспользоваться уравнениями (1)–(4) для фактического вычисления одних элементов треугольника по другим. Природа каждого из этих соотношений как бы скрыта за функцией $\Pi(x)$; мы будем называть их латентными уравнениями прямоугольного треугольника.

Под полной системой уравнений прямоугольного треугольника разумеют такую, которая по любым двум его элементам непосредственно определяет каждый из остальных. Чтобы это было возможно, нужно располагать такой системой уравнений, чтобы любые три элемента треугольника были связаны уравнением, входящим в состав этой системы. Число уравнений такой системы должно быть поэтому равно числу сочетаний из 5 элементов по 3, т. е. этих уравнений должно



Черт. 131.

быть 10. Лобачевский¹ в латентном виде дал две системы, которые в различной форме к такой системе [(XXIV), стр. 295 или (XXVI), стр. 297] приводят. Мы разрешим четыре уравнения (1)—(4) относительно $\Pi(a)$, $\Pi(b)$, $\Pi(\alpha)$, $\Pi(\beta)$ и соответственно этому напомним их в следующем виде:

$$2\Pi(a) = \Pi(c - \alpha) + \Pi(c + \alpha), \quad (\text{VII}_1)$$

$$2\Pi(b) = \Pi(c - \beta) + \Pi(c + \beta), \quad (\text{VII}_2)$$

$$2\Pi(\alpha) = \Pi(c - \beta) - \Pi(c + \beta), \quad (\text{VII}_3)$$

$$2\Pi(\beta) = \Pi(c - \alpha) - \Pi(c + \alpha). \quad (\text{VII}_4)$$

Это — четыре уравнения первой системы Лобачевского.

5. Первые два уравнения второй системы. На стороне BC прямоугольного треугольника ABC отложим отрезок $BD = \beta$ (черт. 132). Мы уже знаем, что $\beta > a$; поэтому точка D падает за вершину C . Перпендикуляр DD' к BD в сторону гипотенузы параллелен AA' . Далее на продолжении катета AC за точку A отложим отрезок $AE = \alpha$; перпендикуляр EE' к AE в сторону AA' также параллелен AA' и потому $EE' \parallel DD'$. Если теперь проведем луч CC' , параллельный DD' и EE' ¹⁾, то равенство

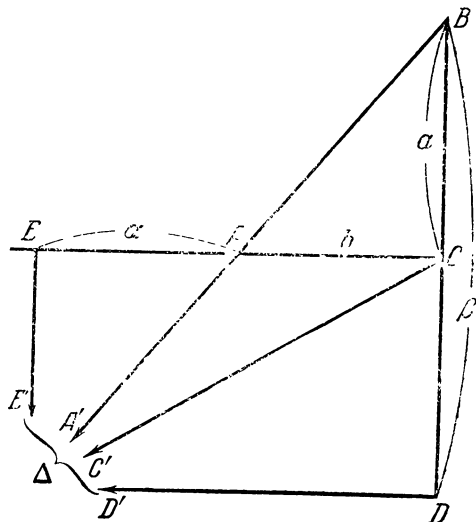
$$\angle ACD = \angle ACC' + \angle C'CD$$

можно написать так:

$$\Pi(b + \alpha) + \Pi(\beta - a) = \frac{\pi}{2} \quad (\text{VIII}_1)$$

и аналогично этому,

$$\Pi(a + \beta) + \Pi(\alpha - b) = \frac{\pi}{2}. \quad (\text{VIII}_2)$$



Черт. 132.

Чтобы развернуть десять уравнений как одной, так и другой системы, нужны еще вспомогательные средства.

6. Дополнительные отрезки. Два отрезка Лобачевский называет дополнительными, если соответствующие им углы параллельности дополняют друг друга до прямого угла. Отрезок, дополнительный отрезку x , Лобачевский, а вслед за ним и другие авторы обыкновенно обозначают через x' , так что

$$\Pi(x) + \Pi(x') = \frac{\pi}{2}. \quad (\text{IX})$$

Поскольку, следуя Лобачевскому, мы ввели положением (VI₂) отрицательное значение аргумента (стр. 210), ясно, что о дополнительном отрезке x' можно говорить только при $x > 0$, то-есть когда речь идет действительно об отрезке x . (При отрицательном x угол $\Pi(x')$ должен был бы также быть отрицательным, что непосредственно не имеет смысла.)

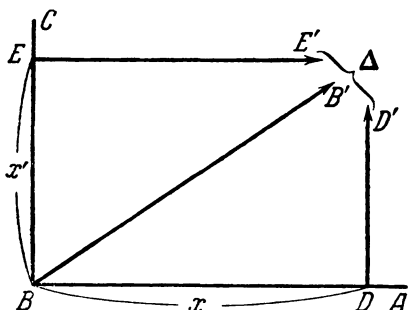
¹⁾ Точки A', C', D', E' можно заменить одной бесконечно удаленной точкой Δ .

Теорема. Если на сторонах BA и BC прямого угла ABC (черт. 133) отложим от вершины дополнительные отрезки ($BD=x$ и $BE=x'$), то перпендикуляры (DD' и EE') к сторонам угла, восстановленные из концов этих отрезков и обращенные внутрь угла, параллельны между собой.

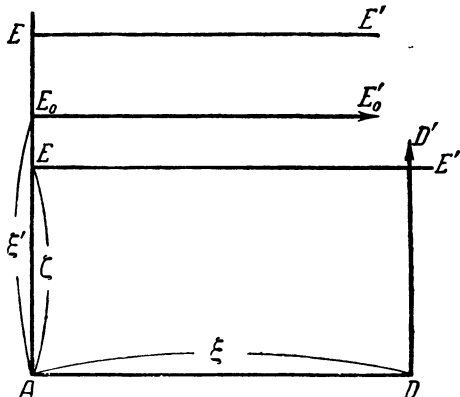
Чтобы в этом убедиться, проведем луч BB' , параллельный DD' . Тогда $\angle B'BD = \Pi(x)$, а потому $\angle B'BE = \Pi(x')$; следовательно, $EE' \parallel BB' \parallel DD'$.

Легко видеть, что и обратно, если перпендикуляры EE' и DD' параллельны, то x и x' суть дополнительные отрезки.

В тесной связи с этим находится следующий вопрос, с которым систематически придется встречаться в дальнейшем. Из точек E и D на сторонах прямого угла EAD



Черт. 133.



Черт. 134.

(черт. 134) восстановлены к ним перпендикуляры DD' и EE' ; в каком случае эти перпендикуляры пересекаются?

Обозначим отрезки AD и AE через ξ и ζ ; пусть $AE_0 = \xi'$ будет отрезок, дополнительный к ξ . Тогда перпендикуляры DD' и $E_0E'_0$ параллельны. Если точка E лежит ниже E_0 , то перпендикуляр EE' пересекает DD' ; если же точка E лежит выше E_0 , то пересечение не имеет места. Иными словами, если $\zeta = \xi'$, т. е. если

$$\Pi(\zeta) + \Pi(\xi) = \frac{\pi}{2}, \quad (5)$$

то пересечение происходит в бесконечно удаленной точке. Если же $\zeta < \xi'$, т. е.

$$\Pi(\zeta) + \Pi(\xi) > \frac{\pi}{2}, \quad (6)$$

то пересечение имеет место в конечной точке (образуется обыкновенный трипрямоугольник); если, наконец, $\zeta > \xi'$, т. е.

$$\Pi(\zeta) + \Pi(\xi) < \frac{\pi}{2}, \quad (7)$$

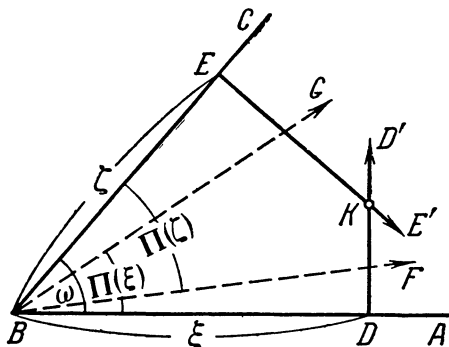
то пересечение не имеет места.

7. Исследование более общего случая. В предыдущей рубрике мы рассмотрели взаимное расположение двух перпендикуляров DD' и EE' , проведенных к сторонам прямого угла ABC внутрь его. В интересах дальнейшего применения¹⁾ исследуем еще взаимное расположение двух перпендикуляров DD' и EE' к сторонам острого угла $ABC = \omega$,

¹⁾ См. главу IX, стр. 395.

также обращенных внутрь его (черт. 135 а—е). Прямые DD' и EE' могут пересекаться, могут быть параллельными, могут расходиться; рассмотрим эти возможности отдельно.

1) Если эти прямые пересекаются, то их пересечение может произойти либо (а) внутри угла ABC , либо (б) вне его, либо (с) на одной

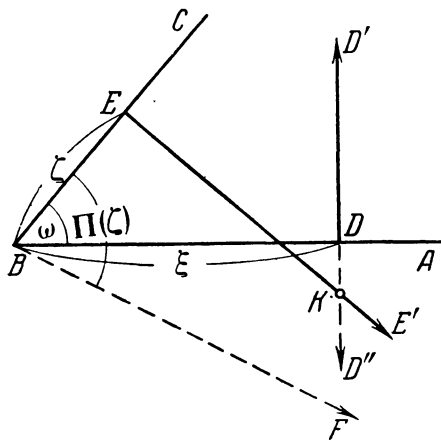


Черт. 135а.

из сторон его. В случае (а) пересекаются самые лучи DD' и EE' , идущие внутрь угла (черт. 135 а); если тогда проведем прямые $\vec{BG} \parallel \vec{DD'}$ и $\vec{BF} \parallel \vec{EE'}$, так что $\angle DBG = \Pi(\xi)$ и $\angle EBF = \Pi(\zeta)$, то явно

$$\Pi(\xi) + \Pi(\zeta) > \omega. \quad (6a)$$

В случае (б) один из этих лучей, скажем EE' , пересекает продолжение другого DD'' , ибо продолжения обоих лучей встретиться не могут



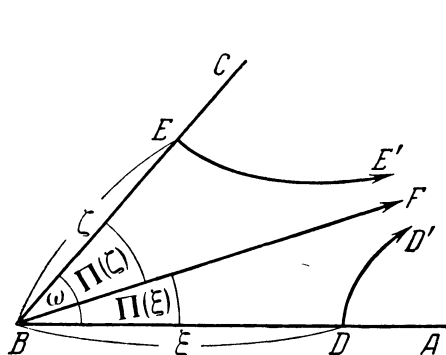
Черт. 135б.

(иначе образовался бы треугольник с двумя тупыми углами при вершинах D и E); при этом, следовательно, перпендикуляр EE' должен пересечь вторую сторону угла. Но тогда, если проведем прямую BF , параллельную EE' (черт. 135 б), то $\angle EBF = \Pi(\zeta)$ будет больше ω , и тогда подавно сохранится соотношение (6а). То же, очевидно, будет иметь место и в случае (с), когда перпендикуляр EE' проходит через основание перпендикуляра DD' .

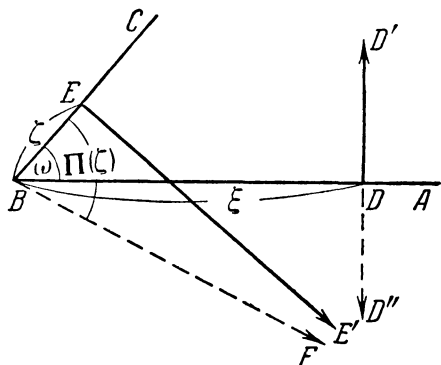
2) Если прямые EE' и DD' параллельны, то их общая бесконечно удаленная точка может лежать либо внутри угла ABC (случай 2а), либо вне его (случай 2б). В первом случае (черт. 135 в) параллельны лучи $\vec{EE'}$ и $\vec{DD'}$; при этом, если проведем $\vec{BF} \parallel \vec{DD'} \parallel \vec{EE'}$, то, очевидно,

$$\Pi(\xi) + \Pi(\zeta) = \omega. \quad (5a)$$

Во втором случае (черт. 135 г) один из этих перпендикуляров, скажем EE' , параллелен продолжению другого (ибо продолжения обоих



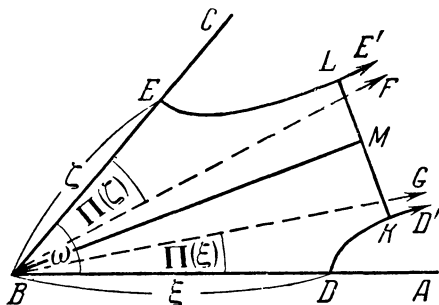
Черт. 135в.



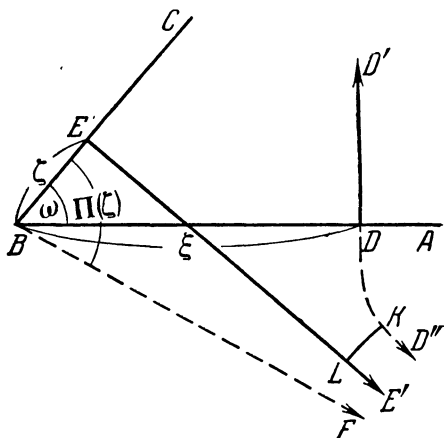
Черт. 135г.

перпендикуляров [не могут быть параллельны]); если теперь проведем $\vec{BF}$ параллельно $\vec{EE'}$, то, очевидно, $\angle EBF = \Pi(\zeta) > \omega$, и по-прежнему $\Pi(\xi) + \Pi(\zeta) > \omega$, т. е. снова имеем соотношение (6а).

3) Если прямые EE' и DD' расходятся, то их общий перпендикуляр KL проходит либо целиком внутри угла ABC (черт. 135 д), либо целиком вне его (черт. 135 е). В самом деле, в этом случае DK будет служить общим перпендикуляром прямых KL и BA , а EL — общим перпендикуляром прямых



Черт. 135д.



Черт. 135е.

KL и BC , и прямая KL будет поэтому расходиться как с BA , так с BC ; если поэтому один из концов отрезка KL лежит внутри угла ABC , то и другой лежит внутри угла; если один из концов лежит вне угла, то и другой лежит вне угла. Вместе с тем продолжения обоих перпендикуляров не могут иметь общего перпендикуляра, ибо иначе образовался бы четырехугольник $DELK$ с двумя тупыми и двумя пря-

мыми углами. Таким образом, общий перпендикуляр KL либо соединяет внутренние точки перпендикуляров EE' и DD' (случай 3а, черт. 135 д), либо соединяет некоторую точку одного из лучей, скажем EE' , с точкой, лежащей на продолжении другого перпендикуляра DD'' (случай 3б, черт. 135 е).

В случае 3а (черт. 135 д) перпендикуляр BM на прямую KL неизбежно упадет между точками K и L , так как если бы перпендикуляр BM пересекал какой-либо из отрезков DK или EL , то из точки пересечения выходили бы два перпендикуляра к KL . Прямая BM , следовательно, расходитсся с каждым из перпендикуляров DD' и EE' . Поэтому, если проведем лучи $BG \parallel DD'$ и $BF \parallel EE'$, то углы $DBG = \Pi(\xi)$ и $EBF = \Pi(\zeta)$ будут меньше соответственно углов DBM и EBM ; вместе с тем, в рассматриваемом случае

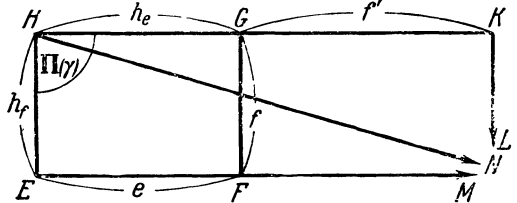
$$\Pi(\xi) + \Pi(\zeta) < \omega. \quad (7a)$$

Обращаясь, наконец, к случаю 3б (черт. 135 е) и предполагая, что точка K общего перпендикуляра KL лежит на продолжении луча DD'' , а точка L — на луче EE' , мы видим, что луч $\vec{BF}$, параллельный $\vec{EE'}$, пройдет вне угла ABC , т. е. $\Pi(\zeta) > \omega$, и по давню имеет место соотношение (6а).

Таким образом, лишь в случаях 3а и 2а имеют место соотношения (5а) и (7а); во всех же других случаях остается в силе неравенство (6а).

Заметим еще, что случай, когда ABC есть тупой угол, по существу не отличается от случая прямого угла, рассмотренного в предыдущей рубрике, с той разницей, что вместо прямого угла в правой части соответствующих соотношений будет стоять угол ω .

8. Уравнения трипрямоугольника. Трипрямоугольник имеет пять элементов (четыре стороны и острый угол) и, как вытекает из теоремы 5, рубр. 4, § 23 (стр. 196), определяется любыми двумя из них. Эти элементы связаны уравнениями, имеющими аналогию с уравнениями прямоугольного треугольника; мы их выведем в форме, аналогичной уравнениям (VII) и (VIII).



Черт. 136.

Обозначим стороны трипрямоугольника $EFGH$ с острым углом при вершине H (черт. 136): основания — через e, f , противолежащие высоты — через h_e и h_f , а острый угол H определим соответствующим отрезком, т. е. положим $H = \Pi(\gamma)$. На продолжении GK стороны $HG (= h_e)$ отложим отрезок $GK (= f')$, дополнительный к f , и из точки K восставим к GK перпендикуляр KL в сторону EF . Если FM есть продолжение стороны EF , то по теореме рубр. 6 (стр. 214) $KL \parallel FM$, или, что то же, $KL \parallel EF$. Если теперь проведем луч $HN \parallel EF$, то он будет также параллелен KL . Вследствие этого равенство

$$\angle NHK + \angle NHE = H$$

можно написать в таком виде:

$$\Pi(h_e + f') + \Pi(h_f) = \Pi(\gamma). \quad (8)$$

Это — первое из требуемых уравнений; совершенно ясно, что таким же образом можно получить аналогичное уравнение:

$$\Pi(h_f + e') + \Pi(h_e) = \Pi(\gamma). \quad (9)$$

Возвращаясь снова к тому же трипрямоугольнику $HEFG$, заметим, прежде всего, что $e < f'$ и $f < e'$, поскольку перпендикуляры GH и EH к сторонам прямого угла EFG пересекаются (см. рубр. 6, стр. 214). Что касается высоты h_e , то она может быть больше, меньше или равна отрезку f' .

Положим сначала $h_e > f'$. Если тогда на GH (черт. 137) отложим от точки G отрезок $GJ = f'$, то точка J упадет между G и H . Перпендикуляр JJ' к GH , согласно той же теореме рубр. 6, параллелен FE . Если теперь проведем луч $HH' \parallel JJ'$, то он будет также параллелен FE в ту же сторону. При этом

$$\angle H'NG = \angle H'NE + \angle ENG$$

или, иначе,

$$\Pi(h_e - f') = \Pi(h_f) + \Pi(\gamma).$$

Пусть теперь h_e меньше f' (чертеж 137а). В этом случае имеем

$$\angle H'NG = \pi - \angle H'NJ = \pi - \Pi(f' - h_e)$$

или, в силу формулы (VI₂),

$$\angle H'NG = \Pi(h_e - f').$$

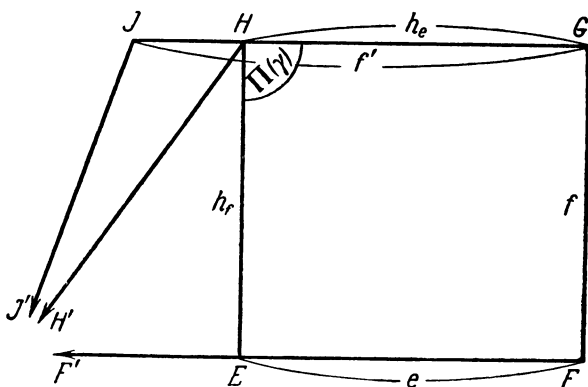
С другой стороны,

$$\angle H'NG = \angle H'NE + \angle ENG = \Pi(h_f) + \Pi(\gamma)$$

и, таким образом, снова

$$\Pi(h_e - f') = \Pi(h_f) + \Pi(\gamma). \quad (10)$$

Легко убедиться, что это соотношение остается в силе и в случае $h_e = f'$.



Черт. 137а.

Совершенно аналогично получим соотношение:

$$\Pi(h_f - e') = \Pi(h_e) + \Pi(\gamma). \quad (11)$$

Уравнения (8)—(11) явно можно написать в таком виде:

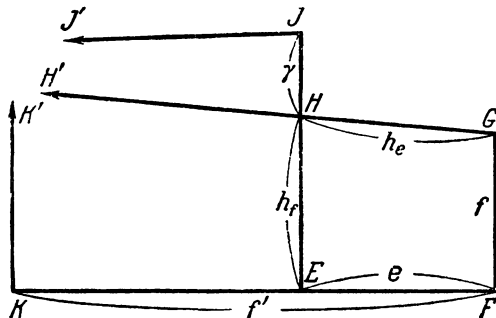
$$2\Pi(\gamma) = \Pi(h_f - e') + \Pi(h_f + e'), \quad (X_1)$$

$$2\Pi(\gamma) = \Pi(h_e - f') + \Pi(h_e + f'), \quad (X_2)$$

$$2\Pi(h_f) = \Pi(h_e - f') - \Pi(h_e + f'), \quad (X_3)$$

$$2\Pi(h_e) = \Pi(h_f - e') - \Pi(h_f + e'). \quad (X_4)$$

Наконец, в том же трипрямоугольнике $HEFG$ (черт. 138) на продолжении отрезка EH отложим отрезок $HJ = \gamma$, так что перпендикуляр JJ' к JE будет параллелен HH' . На FE отложим отрезок $FK = f'$ и проведем



Черт. 138.

$KK' \perp FK$. В силу теоремы рубр. 6, $GH' \parallel KK'$, а потому $KK' \parallel JJ'$. Значит, EK и EJ суть дополнительные отрезки, так что

$$\Pi(f' - e) + \Pi(h_f + \gamma) = \frac{\pi}{2} \quad (XI_1)$$

и совершенно так же

$$\Pi(e' - f) + \Pi(h_e + \gamma) = \frac{\pi}{2}. \quad (XI_2)$$

§ 26. ГРУППА ПРЯМОУГОЛЬНОГО ТРЕУГОЛЬНИКА

1. Сопоставление треугольника с трипрямоугольником. Трипрямоугольник определяется одним из оснований и примыкающей к нему высотой, например, при обозначениях предыдущей рубрики, основанием f и высотой h_e . Положим, что задан прямоугольный треугольник с элементами a, b, c, α, β . Построим трипрямоугольник с основанием $f = \beta'$ и высотой $h_e = c$. Уравнения (X) и (XI) с избытком определяют остальные элементы четырехугольника; в частности, уравнения (X_3) и (X_2) дают:

$$2\Pi(h_f) = \Pi(c - \beta) - \Pi(c + \beta),$$

$$2\Pi(\gamma) = \Pi(c - \beta) + \Pi(c + \beta).$$

Сопоставляя их с уравнениями (VII_2) и (VII_2) прямоугольного треугольника (стр. 213), видим, что $h_f = \alpha$, $\gamma = b$.

Теперь уравнение (XI_1) дает:

$$\Pi(\beta - e) + \Pi(\alpha + b) = \frac{\pi}{2}.$$

Сопоставляя это с уравнением $(VIII_1)$ (стр. 213), получим: $\beta - e = \beta - \alpha$, откуда $e = \alpha$. Приходим, таким образом, к следующему предложению.

Теорема 1. В гиперболической плоскости каждому прямоугольному треугольнику с элементами a, b, c, α, β отвечает трипрямоугольник с элементами

$$e = \alpha, \quad f = \beta', \quad h_e = c, \quad h_f = \alpha, \quad \gamma = b \quad (XII_1)$$

и обратно, каждому трипрямоугольнику с элементами e, f, h_e, h_f, γ отвечает прямоугольный треугольник с элементами a, b, c, α, β , определяемыми равенствами (XII₁).

Совершенно так же, заменяя в этом рассуждении основание f трипрямоугольника и прилежащую h_e другим основанием e и высотой h_f , можно получить прямоугольный треугольник с элементами $a_1, b_1, c_1, \alpha_1, \beta_1$, в котором

$$a_1 = f, \quad \beta_1 = e', \quad c_1 = h_f, \quad b_1 = \gamma, \quad \alpha_1 = h_e. \quad (\text{XII}'_1)$$

2. Цикл Лобачевского. Положим, что нам дан прямоугольный треугольник Δ с элементами a, b, c, α, β . Построим трипрямоугольник (XII₁), а по нему—прямоугольный треугольник (XII₂). Элементы последнего треугольника, таким образом, связаны с элементами исходного треугольника равенствами:

$$a_1 = \beta', \quad b_1 = b, \quad c_1 = \alpha, \quad \alpha_1 = c, \quad \beta_1 = a'. \quad (\text{XII})$$

Теорема 2. Каждому прямоугольному треугольнику $\Delta(a, b, c, \alpha, \beta)$ в гиперболической плоскости отвечает прямоугольный треугольник $\Delta_1(a_1, b_1, c_1, \alpha_1, \beta_1)$, элементы которого связаны с элементами исходного треугольника равенствами (XII).

Теперь по треугольнику Δ_1 можно построить другой треугольник $\Delta_2(a_2, b_2, c_2, \alpha_2, \beta_2)$ по той же схеме (XII); мы получим:

$$a_2 = \beta'_1 = a, \quad b_2 = b_1 = b, \quad c_2 = \alpha_1 = c, \quad \alpha_2 = c_1 = \alpha, \quad \beta_2 = \alpha'_1 = \beta.$$

Этот прием возвращает нас к исходному треугольнику Δ . Два треугольника Δ и Δ_1 образуют, таким образом, цикл (Δ, Δ_1) , замыкающийся в самом себе.

Этот цикл, как и уравнения (VII) и (VIII), был установлен Лобачевским в первом же его сочинении. Однако Лобачевский не пользовался при этом трипрямоугольником; он сопоставил прямолинейный прямоугольный треугольник со сферическим. Вывод Лобачевского основан, таким образом, на стереометрических соображениях; совершенно естественно было поэтому искать чисто планиметрическое доказательство этого предложения. Приведенное выше доказательство было дано Либманом в 1905 г.^[107].

Предыдущей теореме можно дать несколько иное выражение. С прямоугольным треугольником, кроме элементов a, b, c, α, β , связаны еще пять дополнительных отрезков $a', b', c', \alpha', \beta'$. Содержание предыдущей теоремы сводится к тому, что каждому прямоугольному треугольнику сопутствует другой прямоугольный треугольник, в котором эти десять элементов перетасованы в том смысле, что роль одних элементов играют другие, точнее—происходит перестановка элементов:

$$\left. \begin{array}{l} a, b, c, \alpha, \beta, a', b', c', \alpha', \beta', \\ \beta', b, \alpha, c, a', \beta, b', \alpha', c', a, \end{array} \right\} \quad (1)$$

т. е. катет a заменяется отрезком β' , катет b сохраняется, гипотенуза c заменяется отрезком α (т. е. в новом треугольнике гипотенузой служит угловой отрезок α); поскольку a заменяется через β' , a' заменяется через β , и т. д.

Всматриваясь в перестановку (1), мы видим, что отрезок a заменяется отрезком β' , а β' заменяется a ; как принято в учении о перестановках, это выражают циклом $(a\beta')$. Элемент b остается на месте, это выражают одночленным циклом (b) . Отрезки c и α образуют новый

цикл (cx) и т. д. Вся перестановка (1) может быть выражена в циклах таким образом:

$$T = (a\beta')(b)(c\alpha)(a'\beta)(b')(c'\alpha'). \quad (2)$$

Повторное производство этой перестановки (т. е. замена отрезка a отрезком β' , а затем β' через a , и т. д.) приводит к тождественному преобразованию T_0 . Предыдущая теорема устанавливает поэтому, что с прямоугольным треугольником (a, b, c, α, β) связана группа перестановок второго порядка его элементов (T_0, T) , приводящая от этого прямоугольного треугольника к другому прямоугольному же треугольнику. Мы будем это короче выражать так: прямоугольный треугольник (a, b, c, α, β) допускает группу преобразований (T_0, T) .

3. Группа прямоугольного треугольника. Однако совершенно ясно, что прямоугольный треугольник допускает еще одну группу преобразований (T_0, T') , тривиальную в том смысле, что перестановка T' просто транспонирует (заменяет друг другом) катеты и противолежащие острые углы треугольника; в отношении всех десяти элементов ее можно представить в таком виде:

$$T' = (ab)(c)(\alpha\beta)(c')(a'b')(a'\beta'). \quad (3)$$

Выполняя над элементами треугольника последовательно перестановку T , а за ней T' (составляя, как говорят, произведение перестановок T на T'), мы придем к новой перестановке:

$$T_1 \equiv T'T = (aa'c'\beta'b)(c\beta b'a'\alpha), \quad (4)$$

которую треугольник также допускает и которая состоит из двух циклов пятого порядка. Отсюда следует, что треугольник допускает группу перестановок пятого порядка:

$$T_0, T_1, T_2 \equiv T_1^2, T_3 \equiv T_1^3, T_4 \equiv T_1^4 \quad (T_1^5 \equiv T_0). \quad (5)$$

Допуская же группу (5) и группу второго порядка (T_0, T_1) , треугольник допускает также группу десятого порядка, которая получается последовательным (односторонним) перемножением перестановок (5) на перестановку T , — иначе говоря, к перестановкам (5) присоединяются перестановки

$$T_5 \equiv T, T_6 \equiv TT_1, T_7 \equiv TT_2, T_8 \equiv TT_3, T_9 \equiv TT_4. \quad (6)$$

Приводим все десять перестановок в развернутом виде:

$$\left. \begin{aligned} T_0 &= (a)(b)(c)(\alpha)(\beta)(a')(b')(c')(\alpha')(\beta'), \\ T_1 &= (aa'c'\beta'b)(a'\alpha c\beta b'), \\ T_2 &= (ac'ba'\beta')(a'cb'\alpha\beta), \\ T_3 &= (a\beta'a'bc')(\alpha'\beta\alpha b'c), \\ T_4 &= (ab\beta'c'\alpha')(a'b'\beta c\alpha), \\ T_5 &= (a\beta')(b)(c\alpha)(a'\beta)(b')(c'\alpha'), \\ T_6 &= (ac')(\alpha')(b\beta')(\alpha'c)(\alpha)(b'\beta), \\ T_7 &= (a\alpha')(\beta')(bc')(\alpha'\alpha)(\beta)(b'c), \\ T_8 &= (a)(b\alpha')(\alpha'\beta')(a')(b'\alpha)(c\beta), \\ T_9 &= (ab)(c')(\alpha'\beta')(a'b')(c)(\alpha\beta) \equiv T'. \end{aligned} \right\} \quad (\text{XIII}_1)$$

Мы, приходим, таким образом, к следующему предложению.

Теорема 3. В гиперболической плоскости элементы прямоугольного треугольника допускают группу перестановок десятого порядка.

Это значит, что каждому прямоугольному треугольнику сопутствуют еще 9 прямоугольных треугольников, составленных из тех же элементов (включая и дополнительные отрезки). Перестановки T_1, T_2, T_3, T_4 были

указаны Энгелем ([⁸³], стр. 327—328) в комментариях к изданному им переводу мемуара Лобачевского «Новые начала геометрии».

Следует отметить, что перестановки второго порядка T_5, T_6, T_7, T_8, T_9 сконструированы так, что каждая из них сохраняет один из основных элементов a, b, c, α, β данного треугольника (а с ним и дополнительный элемент). Таким образом, с каждым прямоугольным треугольником Δ связан следующий цикл треугольников:

$$\left. \begin{array}{lll} \Delta & a \ b \ c \ \alpha \ \beta & a' b' c' \alpha' \beta' \\ \Delta_1 \equiv T_1 \Delta & \alpha' a \ \beta \ c \ b' & \alpha \ a' \beta' c' b \\ \Delta_2 \equiv T_2 \Delta & c' \alpha' b' \beta a' & c \ \alpha \ b \ \beta' a \\ \Delta_3 \equiv T_3 \Delta & \beta' c' a' b' \alpha & \beta \ c \ a \ b \ \alpha' \\ \Delta_4 \equiv T_4 \Delta & b \ \beta' a' \alpha' c & b' \beta \ \alpha' a \ c' \\ \Delta_5 \equiv T_5 \Delta & \beta' b \ \alpha \ c \ a' & \beta \ b' \alpha' c' a \\ \Delta_6 \equiv T_6 \Delta & c' \beta' a' \alpha b' & c \ \beta \ a \ \alpha' b \\ \Delta_7 \equiv T_7 \Delta & \alpha' c' b' a' \beta & \alpha \ c \ b \ a \ \beta' \\ \Delta_8 \equiv T_8 \Delta & a \ \alpha' \beta \ b' c & a' \alpha \ \beta' b \ c' \\ \Delta_9 \equiv T_9 \Delta & b \ \alpha \ c \ \beta \ \alpha & b' \alpha' c' \beta' \alpha' \end{array} \right\} \quad (\text{XIII}_2)$$

(В правой колонке стоят элементы, соответственно дополнительные к элементам каждого треугольника.)

Треугольники $\Delta_5—\Delta_9$ могут быть получены из $\Delta—\Delta_4$ в ином порядке перестановкой катетов и соответствующих острых углов.

Табличку (XIII₂) надо понимать так, что в первой вертикали стоят элементы, заменяющие катет a , во второй—элементы, заменяющие катет b , в третьей—элементы, заменяющие гипотенузу c и т. д. И так как гипотенуза всегда больше катета, то

$$\beta > \alpha'; \ \beta > a; \ b' > c'; \ b' > \alpha'; \ a' > \beta'; \ a' > c'; \ \alpha > b; \ \alpha > \beta'. \quad (\text{XIII}_3)$$

К этому нужно сделать два замечания. Во-первых, самое существование исходного треугольника Δ предполагает неравенства:

$$\Pi(\alpha) + \Pi(\beta) < \frac{\pi}{2}, \quad a < c, \quad b < c, \quad b < \alpha, \quad a < \beta. \quad (\text{XIII}_4)$$

Только при соблюдении условий (XIII₄) существует треугольник Δ , а вместе с тем треугольники $\Delta_1—\Delta_9$. Существование этих последних треугольников влечет за собой дальнейшие неравенства; но они тривиально вытекают из неравенств (XIII₄). Так, например, существование треугольника Δ_1 с катетами a и α' и гипотенузой β требует, чтобы $a < \beta$ и $\alpha' < \beta$; первое неравенство уже содержится среди (XIII₄), а второе вытекает из того, что $\Pi(\alpha) + \Pi(\beta) < \frac{\pi}{2}$. В самом деле, $\Pi(\alpha') = \frac{\pi}{2} - \Pi(\alpha)$ и потому в силу предыдущего неравенства $\Pi(\alpha') > \Pi(\beta)$, $\alpha' < \beta$. Эти соотношения совпадают с неравенствами (XIII₃); но уже первое из неравенств (XIII₄) выражает условие, необходимое и достаточное для существования треугольников $\Delta—\Delta_9$ (см. ниже, стр. 231). Далее, существование каждого из девяти треугольников $\Delta_1—\Delta_9$ влечет за собой существование треугольника Δ (обратная перестановка), а следовательно, и всех остальных.

4. Две системы уравнений прямоугольного треугольника. Из предыдущей теоремы следует, что всякое соотношение, постоянно связывающее элементы прямоугольного треугольника, влечет за собой еще 9 соотношений, которые из него получаются перестановками элементов (XIII₁) или, что то же, заменой треугольника Δ любым треугольником (XIII₂).

Так, из уравнения (VII₁) (стр. 213) получаем (VII₂) с помощью перестановки T_9 (т. е. заменой треугольника Δ треугольником Δ_9). Далее, из того же уравнения (VII₁) при помощи перестановки T_1 (заменой треугольника Δ треугольником Δ_1) получаем:

$$2\Pi(\alpha') = \Pi(\beta - c) + \Pi(\beta + c).$$

Но

$$\Pi(\alpha') = \frac{\pi}{2} - \Pi(\alpha);$$

следовательно, предыдущее уравнение принимает также вид:

$$\pi - 2\Pi(\alpha) = \Pi(\beta - c) + \Pi(\beta + c).$$

Заменяя же $\Pi(\beta - c)$ через $\pi - \Pi(c - \beta)$, получаем уравнение (VII₃), а затем перестановкой T_9 —уравнение (VII₄). Производя теперь в уравнении (VII₁) перестановку T_2 , получаем:

$$2\Pi(c') = \Pi(b' - \beta) + \Pi(b' + \beta)$$

и далее, с помощью (VI₂) и (IX)

$$2\Pi(c) = \Pi(\beta - b') - \Pi(\beta + b') \quad (\text{VII}_5)$$

и отсюда перестановкой T_9

$$2\Pi(c) = \Pi(\alpha - a') - \Pi(\alpha + a'). \quad (\text{VII}_6)$$

Таким же образом при помощи перестановок T_3 и T_4 с последующей перестановкой T_9 , получаем уравнения:

$$2\Pi(\beta) = \Pi(b' - a') - \Pi(b' + a'), \quad (\text{VII}_7)$$

$$2\Pi(\alpha) = \Pi(a' - b') - \Pi(a' + b'), \quad (\text{VII}_8)$$

$$2\Pi(b) = \Pi(\alpha - a') + \Pi(\alpha + a'), \quad (\text{VII}_9)$$

$$2\Pi(a) = \Pi(\beta - b') + \Pi(\beta + b'). \quad (\text{VII}_{10})$$

Однако, уравнения (VII₁)—(VII₁₀) не составляют полной системы. Они распадаются на пять пар:

(VII₁) и (VII₆), (VII₂) и (VII₅), (VII₃) и (VII₄), (VII₇) и (VII₁₀), (VII₈) и (VII₉).

Уравнения каждой пары выражают зависимость между теми же элементами треугольника, а потому эквивалентны.

Обращаясь к уравнениям (VIII) (стр. 213), замечаем прежде всего, что уравнение (VIII₂) получается из (VIII₁) перестановкой T_9 . Производя же остальные перестановки (XIII₁), т. е. заменяя треугольник Δ треугольниками (XIII₂), получаем еще 8 уравнений:

$$\Pi(c - a) + \Pi(\alpha' + b') = \frac{1}{2}\pi, \quad (\text{VIII}_1 \cdot T_8) \quad (\text{VIII}_3)$$

$$\Pi(c - b) + \Pi(\beta' + a') = \frac{1}{2}\pi, \quad (\text{VIII}_1 \cdot T_4) \quad (\text{VIII}_4)$$

$$\Pi(\beta - \alpha') + \Pi(c' + a') = \frac{1}{2}\pi, \quad (\text{VIII}_1 \cdot T_7) \quad (\text{VIII}_5)$$

$$\Pi(\alpha - \beta') + \Pi(c' + b') = \frac{1}{2}\pi, \quad (\text{VIII}_1 \cdot T_3) \quad (\text{VIII}_6)$$

$$\Pi(b' - c') + \Pi(\beta' + \alpha) = \frac{1}{2}\pi, \quad (\text{VIII}_1 \cdot T_6) \quad (\text{VIII}_7)$$

$$\Pi(a' - c') + \Pi(\alpha' + \beta) = \frac{1}{2}\pi, \quad (\text{VIII}_1 \cdot T_2) \quad (\text{VIII}_8)$$

$$\Pi(a' - \beta') + \Pi(b + c) = \frac{1}{2}\pi, \quad (\text{VIII}_1 \cdot T_5) \quad (\text{VIII}_9)$$

$$\Pi(b' - \alpha') + \Pi(a + c) = \frac{1}{2}\pi. \quad (\text{VIII}_1 \cdot T_1) \quad (\text{VIII}_{10})$$

Уравнения (VIII) также распадаются на пять пар эквивалентных соотношений:

$$(VIII_1) \text{ и } (VIII_2), (VIII_3) \text{ и } (VIII_{10}), (VIII_4) \text{ и } (VIII_9), \\ (VIII_5) \text{ и } (VIII_8), (VIII_6) \text{ и } (VIII_7).$$

Обе системы уравнений (VII) и (VIII) были полностью установлены Лобачевским в «Новых началах геометрии». Но они остаются латентными, как бы скрытыми функцией $\Pi(x)$. Переход к явным уравнениям и полной системе был связан с исследованием кривых постоянной кривизны в гиперболической плоскости. Однако, прежде чем к ним обратиться, мы воспользуемся еще соотношениями, установленными в двух последних параграфах, для другой цели.

5. Совокупность трипрямоугольников, соответствующих данному прямоугольному треугольнику. Данному прямоугольному треугольнику Δ со сторонами a, b, c и углами $\Pi(\alpha)$ и $\Pi(\beta)$ соответствуют трипрямоугольники (XII_1) и (XII'_1) , которые, впрочем, конгруэнтны (отличаются один от другого наименованием сторон и высот). Но одновременно с треугольником Δ существуют прямоугольные же треугольники $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \Delta_4$ [(XIII₂) на стр. 222]. Если перейдем от треугольника Δ_1 по той же схеме (XII_1) к трипрямоугольнику, то в последнем (по сравнению с исходным треугольником Δ)

$$e = \alpha', \quad f = b, \quad h_e = \beta, \quad h_f = c, \quad \gamma = a. \quad (XII_2)$$

Таким образом, треугольники $\Delta_2, \Delta_3, \Delta_4$ приведут к трипрямоугольникам

$$e = c', \quad f = a, \quad h_c = b', \quad h_e = \beta', \quad \gamma = \alpha', \quad (XII_3)$$

$$e = \beta', \quad f = \alpha', \quad h_e = a', \quad h_f = b', \quad \gamma = c', \quad (XII_4)$$

$$e = b, \quad f = c', \quad h_e = \alpha, \quad h_f = a', \quad \gamma = \beta'. \quad (XII_5)$$

Остальные треугольники приведут к трипрямоугольникам, которые будут отличаться от этих только переименованием сторон. Таким образом, существование прямоугольного треугольника Δ влечет за собой существование пяти трипрямоугольников по схемам $(XII_1), (XII_2), (XII_3), (XII_4), (XII_5)$.

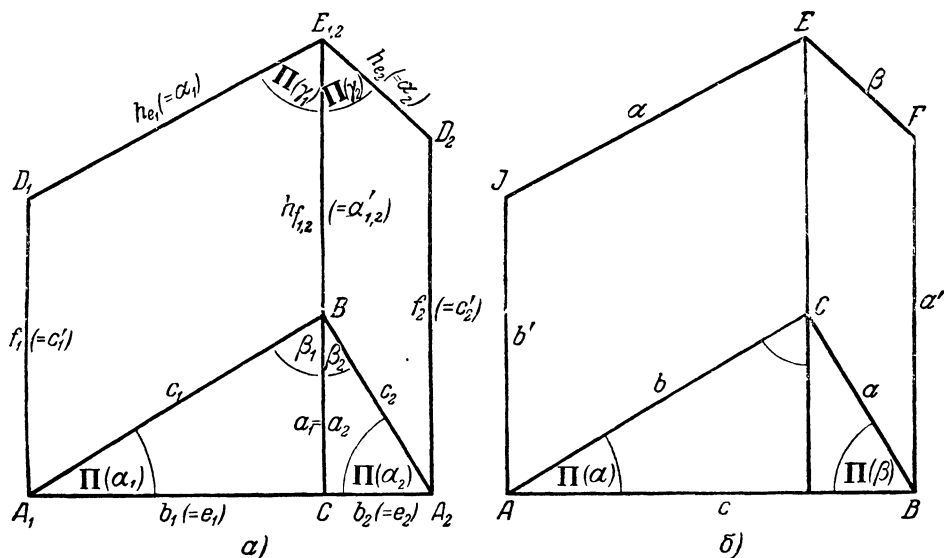
6. Pentagramma mirificum. В связи с изложенным сопоставлением прямоугольного треугольника с трипрямоугольником находится не лишенная интереса конфигурация, которую Либман, впервые обративший на нее внимание, назвал по образцу терминологии Гаусса (в применении к сферическим треугольникам) «pentagramma mirificum» [98]. Пусть A_1BA_2 будет прямоугольный треугольник с прямым углом при вершине B , с катетами c_1, c_2 и гипотенузой $b = A_1A_2$ (черт. 139, a). Из вершины прямого угла B опустим перпендикуляр BC на гипотенузу; получим два прямоугольных треугольника A_1BC и A_2BC , катеты которых обозначим через b_1, a_1 и b_2, a_2 ($a_1 \equiv a_2$), как указано на чертеже. Их острые углы (линейно заданные) обозначим через α_1, β_1 и α_2, β_2 тоже как указано на чертеже. Теперь по схеме (XII_5) построим соответствующие трипрямоугольники:

$$e_1 = b_1, \quad f_1 = c'_1, \quad h_{e_1} = \alpha_1, \quad h_{f_1} = a'_1, \quad \gamma_1 = \beta'_1,$$

$$e_2 = b_2, \quad f_2 = c'_2, \quad h_{e_2} = \alpha_2, \quad h_{f_2} = a'_2, \quad \gamma_2 = \beta'_2.$$

Так как в первом из этих трипрямоугольников $e_1 = b_1$, то самое его построение мы можем выполнить следующим образом. Отрезок A_1C примем за e_1 . В его концах восставим к нему перпендикуляры A_1D_1 и CE и на них

отложим $A_1D_1 = f_1 = c'_1$, $CE_1 = h_1 = a'_1$; $E_1D_1A_1C$ и будет трипрямоугольник, соответствующий треугольнику A_1BC ; $E_1D_1 = h_{e_1} = a_1$. Таким же образом построим трипрямоугольник $E_2D_2A_2C$, соответствующий прямоугольному треугольнику A_2BC . То обстоятельство, что эти треугольники имеют



Черт. 139.

общий катет a ($a_1 \equiv a_2$), ведет к тому, что оба трипрямоугольника имеют общую вершину E ($E_1 \equiv E_2$). Так как теперь

$$\angle D_1EC = \Pi(\gamma_1) = \Pi(\beta'_1) = \frac{\pi}{2} - \Pi(\beta_1) = \frac{\pi}{2} - \angle A_1BC,$$

$$\angle D_2EC = \Pi(\gamma_2) = \Pi(\beta'_2) = \frac{\pi}{2} - \Pi(\beta_2) = \frac{\pi}{2} - \angle A_2BC,$$

$$\text{то } \angle D_1ED_2 = \pi - \Pi(\beta_1) - \Pi(\beta_2) = \frac{\pi}{2}.$$

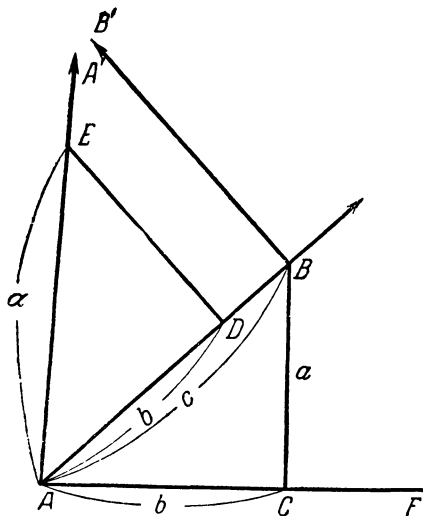
При E образуется, таким образом, прямой угол, и мы приходим к пятиугольнику $D_1A_1A_2D_2E_{1,2}$ с пятью прямыми углами. Если для более удобного сопоставления обозначим исходный прямоугольный треугольник через ABC (черт. 139, б), то сторонами пятиугольника служат отрезки c, a', b', α, β , т. е. те и только те, которые служат гипотенузами в дополнительных треугольниках ($XIII_2$). Если мы будем строить пятиугольники, соответствующие всей совокупности связанных между собой прямоугольных треугольников, то получим тот же пятиугольник. Мы приходим, таким образом, к следующему любопытному предположению.

Теорема. С каждой системой взаимно дополнительных прямоугольных треугольников ($XIII_2$) связан один и только один пятиугольник с пятью прямыми углами. Сторонами этого пятиугольника служат отрезки, линейно определяющие пять элементов прямоугольного треугольника; он может быть построен по каждому из совокупности связанных между собой треугольников, и обратно—по этому пятиугольнику могут быть построены все эти треугольники.

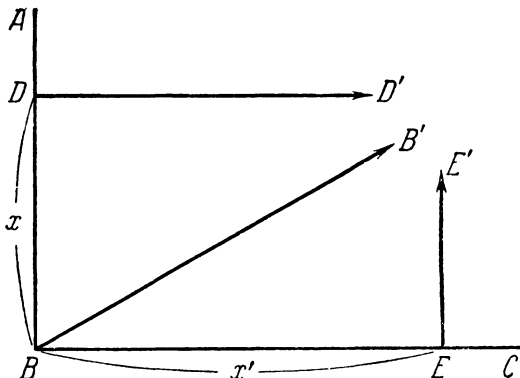
7. Построение отрезка параллельности, соответствующего данному углу и построение дополнительного отрезка. Опираясь на группу прямоугольного треугольника, Энгель ([⁸⁸], стр. 256) в своих комментариях к сочинению Лобачевского «О началах геометрии» дал следующий простой

и изящный метод построения отрезка параллельности α , соответствующего данному острому углу BAC , так что $BAC = \Pi(\alpha)$.

На стороне AB данного угла (черт. 140) отложим произвольный отрезок $AB = c$



Черт. 140.



Черт. 141.

и из точки B опустим перпендикуляр BC на другую сторону угла. Получим прямоугольный треугольник ABC (Δ), элементы которого, как обычно, обозначим через a, b, c, α, β , так что данный угол $BAC = \Pi(\alpha)$; этот отрезок α требуется построить. Треугольнику Δ соответствует по схеме ($XIII_2$) (стр. 222) треугольник Δ_4 , имеющий катет b , гипотенузу a и острый угол $\Pi(c)$. Имея это в виду, восставим из точки B перпендикуляр BB' к AB (как указано на чертеже) и проведем $AA' \parallel BB'$, так что $\angle BAA' = \Pi(c)$. Если на гипотенузе AB отложим отрезок $AD = b$ ($< c$), то перпендикуляр DE к AB встретит прямую AA' в некоторой точке E . В образовавшемся треугольнике AED катет $AD = b$, а острый угол EAD равен $\Pi(c)$; это и есть треугольник Δ_4 , а потому его гипотенуза AE равна α .

Пользуясь этими соображениями, легко показать, как построить отрезок x' , дополнительный к данному отрезку x . Для этого на одной стороне BA прямого угла ABC (черт. 141) откладываем отрезок $BD = x$; из его конца D восставляем перпендикуляр DD' к стороне BA угла ABC и из точки B проводим луч $BB' \parallel DD'$. Теперь строим на стороне BC отрезок параллельности BE , соответствующий углу $CB B'$; BE и будет требуемый отрезок x' .

ГЛАВА ПЯТАЯ

ПОСТРОЕНИЕ ГЕОМЕТРИИ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОЙ ПЛОСКОСТИ, НЕ ОПИРАЮЩЕЕСЯ НА ЕЕ НЕПРЕРЫВНОСТЬ

§ 27. КОНСТРУКТИВНЫЕ МЕТОДЫ ПОСТРОЕНИЯ НАЧАЛ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ

1. Задача конструктивных методов. Развернутое выше построение начал гиперболической геометрии опирается на постулат о непрерывности прямой, установленный выше в форме принципа Дедекинда. На этом принципе основаны доказательства I и II основных теорем; доказательство III основной теоремы на этот принцип не опирается, но тем существеннее его роль при доказательстве IV основной теоремы. Однако не только в дальнейшем, но даже во всем предыдущем изложении принцип непрерывности помимо этого уже не получает применения в том смысле, что мы на него опираемся только в той мере, в какой мы пользуемся основными теоремами I, II и IV.

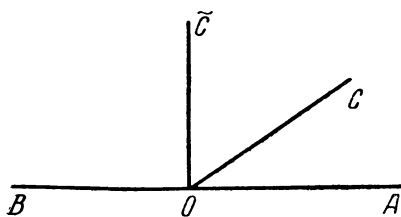
С начала текущего столетия возникает стремление вовсе избежать применения постулата о непрерывности, т. е. выяснить возможность гиперболической геометрии, в которой прямая (а вследствие этого и плоскость, пространство) не непрерывны. Замысел заключается в том, чтобы во всех тех случаях, где требуется доказать существование той или иной точки или той или иной прямой, выполнить это непосредственным построением требуемой точки или прямой, не пользуясь принципом непрерывности. Можно, впрочем, сказать, что речь всегда идет о построении одной или нескольких точек, так как прямая строится по двум точкам.

Какими средствами мы располагаем для доказательства существования той или иной точки? Этой цели, в первую очередь, служит постулат (или аксиома) Паппа; ей часто служит также постулат о параллельных линиях (как постулат о существовании или несуществовании точки пересечения двух прямых); наконец, для этой цели приходится пользоваться и постулатом о непрерывности прямой (принцип Дедекинда). Тенденция, ведущая свое начало, главным образом, от Гильберта, направлена к тому, чтобы выяснить, в какой мере возможно вовсе освободить все построения от принципа Дедекинда. Прием, которым пользуются для этой цели, заключается в том, что дается непосредственное построение требуемых точек, обоснование которого на постулат о непрерывности не опирается. Этого рода конструктивным методам построения начал гиперболической геометрии посвящены настоящий и следующие параграфы. И, поскольку постулат о непрерывности получает применение только при доказательстве I, II и IV основных теорем, нужно выяснить, в какой мере эти доказательства могут быть от использования этого постулата освобождены.

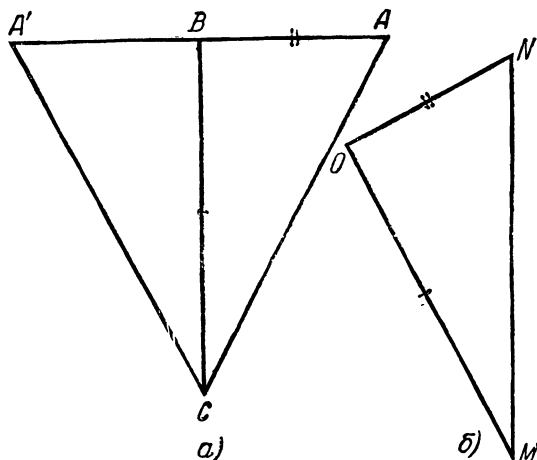
2. Решение элементарных задач без помощи постулата о непрерывности. При попытке освободить построение гиперболической геометрии от применения постулата о непрерывности посредством конструктивного метода необходимо прежде всего выяснить, в какой мере от этого постулата свободны элементарные построения абсолютной геометрии, которыми мы систематически пользуемся. Речь идет об основных задачах, которые при построении абсолютной геометрии находят место на первых же шагах и потом получают применение при самом построении геометрии. Эти задачи следующие: 1) разделить данный угол пополам (построить его биссектрису; «Начала» Евклида, I.9); 2) разделить данный отрезок пополам (построить его середину; «Начала», I.10); 3) из точки, лежащей на данной прямой, восстановить к ней перпендикуляр («Начала», I.11); 4) из точки, лежащей вне данной прямой, опустить на нее перпендикуляр («Начала», I.12). Заметим при этом, что вопрос, прежде всего, заключается в том, можно ли утверждать, не принимая постулата о непрерывности, но сохраняя остальные постулаты, что в плоскости существует биссектриса любого угла, середина любого отрезка, существует прямой угол и перпендикуляр к данной прямой через точку, заданную на прямой или лежащую вне ее.

Утвердительный ответ на эти вопросы можно считать обоснованным в хорошо (хотя и не безукоризненно) продуманном курсе элементарной геометрии Тиме (Н. Thieme [99], 1909), в большой мере даже несколько раньше в курсе Гальстета (G. B. Halsted [100], 1907) и в новой книге Фордера (Н. G. Forder [101], 1927).

Начнем с предложения о существовании прямого угла. Его доказательство (чаще всего опускаемое) проводится обыкновенно следующим образом. Если луч OC (черт. 142) вращается, начи-



Черт. 142.



Черт. 143.

ная с положения OA , скажем, в сторону, обратную движению часовой стрелки, то сначала угол AOC меньше смежного угла COB , а затем становится больше его. Если к первой категории отнести те лучи OC , для которых $\angle AOC < \angle COB$, а ко второй — те, для которых $\angle AOC > \angle COB$, то образуется дедекиндово сечение; в силу непрерывности оно производится некоторым лучом $O\tilde{C}$, для которого, как это очень легко показать, $\angle AOC = \angle COB$. Этот луч образует с OA и OB прямые углы.

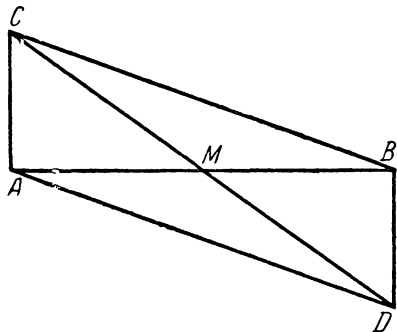
Это предложение, однако, доказывается очень просто с помощью следующих соображений, не опирающихся на принцип Дедекинда. Взяв произвольный угол ACB (черт. 143, а), повернем его вокруг точки C таким образом, чтобы луч CA совместился с лучом CB ; это выполняется

движением, существование которого допущено. Луч CB при этом займет положение CA' , причем $\angle ACB = \angle BCA'$. Вместе с тем образуется угол ACA' , биссектрисой которого служит луч CB . Отложим на сторонах этого угла равные отрезки $CA = CA'$; получим треугольник ACA' , внутрь которого входит луч CB . Согласно аксиоме Паша¹⁾, которую мы, как уже указано, сохраняем, он встретит противоположную сторону AA' в точке B ; треугольники ACB и $A'CB$ будут равны, вследствие чего будут равны углы ABC и $A'BC$; они будут прямые.

Установив существование прямого угла, мы можем на основании законов движения перенести его в любую точку, приложить любой стороной к любому лучу. Более того, мы можем построить прямой угол при любой точке O и любом же луче OM циркулем и линейкой, отложив на OM (черт. 143, б) отрезок $OM = BC$ и описав из точек O и M окружности радиусами $ON = BA$ и $MN = CA$. Эти окружности должны пересечься, поскольку они пересекаются на конфигурации a ; однозначность перпендикуляра доказывается очень просто.

Существенным отличием этого рассуждения от предыдущего (обычного) является то, что вместо принципа непрерывности мы пользуемся постулатом Паша.

Следующий момент — это доказательство существования и построение середины данного отрезка. Это производится таким образом. Из точек A и B проводим перпендикуляры AC и BD



Черт. 144.

к прямой AB (черт. 144) и на них в различные стороны от AB откладываем равные отрезки AC и BD ; так как точки C и D лежат по разные стороны прямой AB , то отрезок CD встречает прямую AB в некоторой точке M (это также вытекает из аксиомы Паша); эта точка лежит от A по ту же сторону, что и B , и от B — по ту же сторону, что и A ; она лежит между точками A и B . Из равенства прямоугольных треугольников CAB и DBA следует, что $\angle CBA = \angle BAD$ и $CB = AD$ («Начала», I.4); треугольники CBD и DAC равны поэтому по трем сторонам («Начала», I.8) и потому $\angle BCD = \angle ADC$; вследствие этого (по стороне и углам) равны треугольники CMB и DMA («Начала», I.26), а вместе с тем $AM = MB$; M есть середина отрезка AB)²⁾.

Установив существование середины отрезка, можно провести доказательство теоремы о внешнем угле (I.16) и вытекающие из него следствия.

Существование биссектрисы угла и ее построение теперь устанавливается очень просто. На сторонах угла ABC откладываем равные отрезки BA и BC (черт. 145), середину M отрезка AC соединяем с B и получаем биссектрису угла.

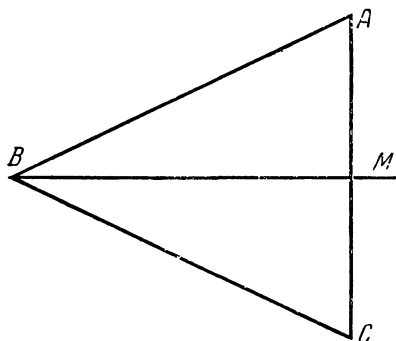
Наконец, чтобы показать, что через точку A , лежащую вне прямой BC (черт. 146), проходит к ней перпендикуляр, соединяем точку A

¹⁾ Здесь получает применение, строго говоря, не самая аксиома Паша, а непосредственное ее развитие.

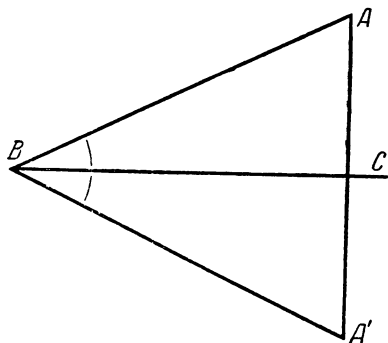
²⁾ Ссылки на соответствующие предложения «Начал» сделаны для того, чтобы отметить, что доказательство опирается на такие предложения, которые не предполагают (как это имеет место при доказательстве теоремы о внешнем угле I.16) существования середины отрезка.

с произвольной точкой B прямой BC . По другую сторону прямой BC проводим прямую BA' , образующую с ней угол $A'BC$, равный углу ABC ; на стороне BA' откладываем отрезок $BA' = BA$ и соединяем точки A и A' .

Все эти рассуждения и построения мы провели, не опираясь на принцип непрерывности, заменяя его для доказательства существования тех



Черт. 145.



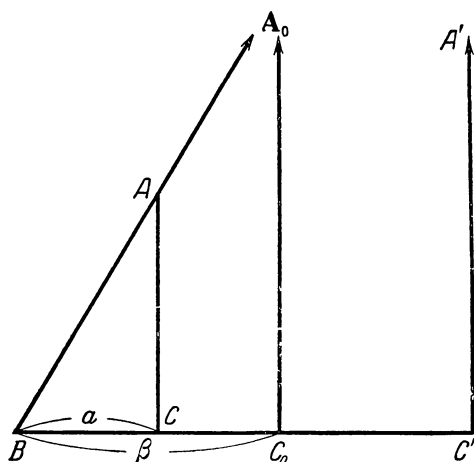
Черт. 146.

или иных точек преимущественно постулатом Паша. Все эти построения принадлежат абсолютной геометрии.

3. Построение прямоугольных треугольников в гиперболической плоскости. К изложенным соображениям

тесно примыкает вопрос о построении прямоугольных треугольников по тем или иным заданиям. Этого рода построения в одних случаях выполняются средствами абсолютной геометрии; в других случаях они требуют в гиперболической плоскости иных приемов, которые в первой стадии связаны с принципом непрерывности.

Построение прямоугольного треугольника по двум катетам a и b требует только построения прямого угла и откладывания на его сторонах от вершины заданных отрезков. Каковы бы ни были отрезки a и b , прямоугольный треугольник с катетами a и b всегда существует и может быть построен циркулем и линейкой. Точно так же, каковы бы ни были заданный от-



Черт. 147.

резок c и острый угол A , всегда существует прямоугольный треугольник, имеющий гипотенузой отрезок c и острый угол A . Как доказательство существования, так и способ построения треугольника в этих случаях принадлежат абсолютной геометрии.

Дело обстоит в гиперболической плоскости несколько иначе, если задан катет a и прилежащий острый угол $B(\beta)$. Построив этот острый угол (черт. 147), на одной из его сторон откладываем отрезок $BC = a$ и из точки C восстанавливаем перпендикуляр CA к прямой BC из точки C ;

третья вершина A требуемого треугольника определяется пересечением перпендикуляра со второй стороной угла. В евклидовой геометрии существование этой точки устанавливается постулатом о параллельных линиях. Чтобы выяснить, как обстоит дело в гиперболической плоскости, откладываем на стороне угла BC отрезок $BC_0 = \beta$, линейно определяющий угол B . Перпендикуляр C_0A_0 к BC будет параллелен второй стороне угла BA_0 . Если заданный отрезок $a < \beta$, то перпендикуляр CA встретит вторую сторону угла; требуемый треугольник существует и может быть построен циркулем и линейкой. В рубрике 2 параграфа 25 (стр. 214) уже было указано, что в прямоугольном треугольнике ABC $a < \beta$. Если $a = \beta$, то требованию удовлетворяет только вырожденный треугольник BC_0A_0 . При $a > \beta$ требуемого треугольника вовсе нет. Однако это рассуждение предполагает существование отрезка β , однозначно определяющего угол B , что всецело основано на II основной теореме.

Еще несколько сложнее рассуждение в том случае, когда для построения прямоугольного треугольника заданы катет a и противолежащий острый угол A (α). Прием, который при таком задании применяется в евклидовой геометрии, основан на предположении теории параллельных линий, которое здесь неприменимо. Чтобы найти выход из этого положения, попробуем построить треугольник Δ_1 ¹⁾, который составляет с требуемым треугольником Δ цикл Лобачевского (XII) (стр. 220). В этом треугольнике теперь заданы гипотенуза $c_1 = a$ и острый угол, определяемый отрезком $\beta_1 = a'$. Треугольник Δ_1 , таким образом, существует, а вместе с тем существует и треугольник Δ ¹⁾ (§ 26, заключение рубр. 3, стр. 222). Более того, треугольник Δ_1 мы можем построить, а вместе с тем найдем катет $b = b_1$ искомого треугольника Δ . Требуемый треугольник, таким образом, существует и может быть построен циркулем и линейкой.

Далее рассмотрим случай, когда заданы гипотенуза c и катет $a < c$ прямоугольного треугольника. В прямоугольном треугольнике Δ_1 (XIII₂) в этом случае заданы катет $b_1 = a$ и прилежащий острый угол $\alpha_1 = c$, причем $\alpha_1 > b_1$; треугольник Δ_1 может быть построен, а вместе с тем может быть построен и треугольник Δ . Впрочем, треугольник в этом случае может быть, конечно, построен и непосредственно, без помощи вспомогательного треугольника.

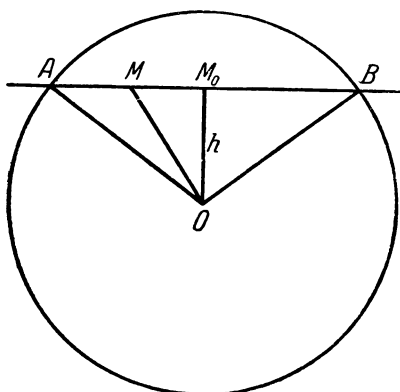
Если даны острые углы A (α) и B (β), то прямоугольный треугольник с этими острыми углами может существовать только в том случае, если $A + B < \frac{\pi}{2}$, т. е. $\Pi(\alpha) + \Pi(\beta) < \frac{\pi}{2}$; $\Pi(\beta) < \Pi(\alpha')$, а следовательно, $\beta > \alpha'$; таким же образом приходим к условию $\beta' < \alpha$, эквивалентному предыдущему (см. XIII₂). Если углы этому условию удовлетворяют, то в соответствующем треугольнике Δ_1 (XIII₂) $c_1 = \beta$, $a_1 = \alpha'$ и $c_1 > a_1$; треугольник Δ_1 может быть построен, а следовательно, существует и может быть также построен треугольник Δ . В дополнение к тому, что в гиперболической плоскости сумма острых углов прямоугольного треугольника меньше $\frac{\pi}{2}$, мы, таким образом, доказали, что, каковы бы ни были два угла, сумма которых меньше $\frac{\pi}{2}$, всегда существует прямоугольный треугольник, имеющий эти острые углы.

Еще раз отметим, что рассуждения этой рубрики существенно опираются на II основную теорему.

¹⁾ Этот треугольник совпадает с Δ_5 в схеме (XIII₂) на стр. 222.

4. Построение трипрямоугольника. Со всяким трипрямоугольником связан прямоугольный треугольник (XII_1) (стр. 219), существованием и построением которого определяется существование и построение этого трипрямоугольника. Вопрос о существовании и построении трипрямоугольника по тем или иным данным сводится поэтому к тому, может ли быть построен по соответствующим заданиям прямоугольный треугольник. Не входя в рассмотрение всех возможных заданий, остановимся только на том случае, когда заданы основание e и противолежащая высота h_e , причем, конечно, $h_e > e$. Согласно теореме 1 предыдущего параграфа (стр. 219), с искомым трипрямоугольником связан прямоугольный треугольник Δ (XII_1), в котором катет $a = e$ и гипотенуза $c = h_e$. Так как $h_e > e$, то треугольник Δ может быть построен, а следовательно, существует и может быть построен соответствующий трипрямоугольник.

5. Пересечение прямой и окружности. В тесной связи с предыдущими построениями стоит доказательство того, что прямая, имеющая точку внутри окружности, всегда пересекает ее в двух точках. В самом деле, если прямая MM_0 (черт. 148) проходит через точку M , лежащую внутри окружности, то расстояние OM_0 этой прямой от центра окружности во всяком случае меньше радиуса окружности r . Если поэтому отрезок OM_0 обозначим через h , то $h < r$, и разыскание точек пересечения окружности с данной прямой сводится к построению прямоугольного треугольника с гипотенузой r и катетом $h < r$. Как показано в рубрике 3, такой треугольник всегда существует, а потому существует и точка пересечения этой окружности с данной прямой. Отсюда следует, что существуют две точки пересечения (A и B — по обе стороны точки M_0).



Черт. 148.

Совершенно так же проведение касательной к окружности из точки, лежащей вне ее, сводится к построению прямоугольного треугольника по гипотенузе и катету.

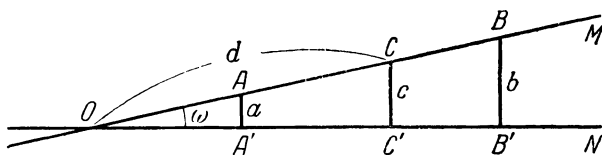
§ 28. КОНСТРУКТИВНОЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВО IV ОСНОВНОЙ ТЕОРЕМЫ И ВЫТЕКАЮЩИХ ИЗ НЕЕ ПРЕДЛОЖЕНИЙ

1. Постановка вопроса. Наиболее важным для нас моментом в рассуждениях предыдущего параграфа является то, что ни одно из них не опирается ни на IV основную теорему, ни непосредственно на постулат о непрерывности. Совершенно так же, как и рассуждения главы третьей, они зависят от этого постулата лишь постольку, поскольку на него опираются доказательства основных теорем I и II, которыми они пользуются. Но теперь оказывается возможным пойти в этом направлении дальше, именно, освободить также доказательство IV основной теоремы от непосредственного применения принципа Дедекинда, провести его, опираясь в отношении непрерывности только на первые две основные теоремы, конструктивным приемом. Припомним, что четвертая основная теорема заключается в следующем: если a и b суть расстояния двух точек прямой AB от другой прямой $A'B'$,

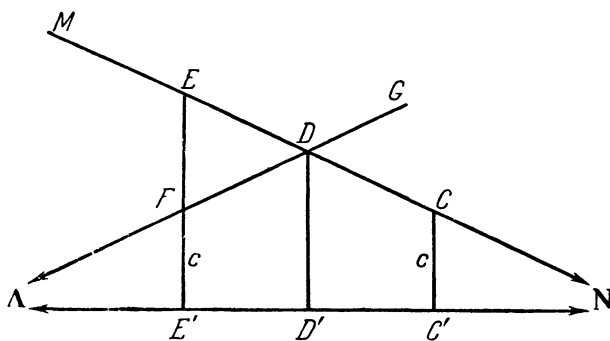
а с содержится между a и b , то на прямой AB между точками A и B существует по крайней мере одна точка C , отстоящая на расстояние c от прямой $A'B'$. При этом в первоначальной формулировке этой теоремы под a , b и c разумелись числа, выражающие соответствующие отрезки. Мы покажем теперь, что эта теорема также может быть доказана без непосредственного применения принципа Дедекинда, на основе первых двух основных теорем. Однако под a , b и c мы будем при этом понимать не числа, а отрезки, существующие в рассматриваемой плоскости, как это уже выяснено выше¹⁾. Мы проведем доказательство отдельно для трех случаев, когда прямые AB и $A'B'$ пересекаются, параллельны или расходятся.

2. Случай пересекающихся прямых. Для случая пересекающихся прямых установим несколько более общую теорему. Пусть MON (ω) (черт. 149) будет острый угол, образуемый пересекающимися прямыми OM и ON (случай, когда

прямые пересекаются под прямым углом, как тривиальный по отношению к рассматриваемому вопросу, мы опускаем). В этом случае, каков бы ни был заданный отрезок c , на луче OM существует одна и только одна точка C , расстояние которой от прямой ON представлено отрезком c . В самом деле, как показано в рубрике 3 предыдущего параграфа, каков бы ни был острый угол ω и отрезок c , всегда существует прямоугольный треугольник, имеющий катет c и противолежащий ему угол ω . Если d есть гипотенуза этого треугольника и на луче OM мы отложим отрезок $OC = d$, а из точки C опустим на ON перпендикуляр CC' , то он будет равен c . В силу третьей основной теоремы расстояние точки луча OM от другой стороны угла монотонно возрастает по мере ее удаления от вершины. Если поэтому точки A и B того же луча отстоят от ON на расстояния $AA' = a$ и $BB' = b$, причем $a < b$, то точка C неизбежно лежит между A и B . Случай, когда точки A и B лежат по разные стороны вершины, приводится к предыдущему.



Черт. 149.



Черт. 150.

Если d есть гипотенуза этого треугольника и на луче OM мы отложим отрезок $OC = d$, а из точки C опустим на ON перпендикуляр CC' , то он будет равен c . В силу третьей основной теоремы расстояние точки луча OM от другой стороны угла монотонно возрастает по мере ее удаления от вершины. Если поэтому точки A и B того же луча отстоят от ON на расстояния $AA' = a$ и $BB' = b$, причем $a < b$, то точка C неизбежно лежит между A и B . Случай, когда точки A и B лежат по разные стороны вершины, приводится к предыдущему.

3. Случай параллельных прямых. И в этом случае докажем, что на любой из двух параллелей (скажем, на MN (черт. 150)) существует точка, отстоящая от другой параллели AN на расстояние, представляемое любым существующим в рассматриваемой плоскости отрезком c . В самом деле,

¹⁾ Можно понимать и числа, но такие, которые при некотором выборе единицы выражают существующие в плоскости отрезки.

согласно теореме 2 рубр. 5 § 21 (стр. 185), на прямой MN существует точка E , отстоящая от ΔN на расстояние $EE' > c$. На перпендикуляре EE' отложим отрезок $E'F = c$ и через точку F проведем прямую $\vec{F\Delta}$, параллельную $\vec{N\Delta}$ в ту сторону, в которую расстояния от нее точек параллели MN возрастают. Луч FG , составляющий продолжение луча $F\Delta$, входя внутрь вырожденного треугольника $E'EN$, встретит луч EN в некоторой точке D . Отложив от D на луче DN отрезок $DC = DF$, придем к точке C , отстоящей от ΔN на расстояние $CC' = c$. В самом деле, если из D опустим на ΔN перпендикуляр DD' , то он разделит угол FDC пополам; двупрямоугольники $DD'E'F$ и $DD'C'C$ будут конгруэнтны, а потому будут равны отрезки FE' и CC' . Остальные соображения, относящиеся к доказательству теоремы IV, в этом случае тривиальны.

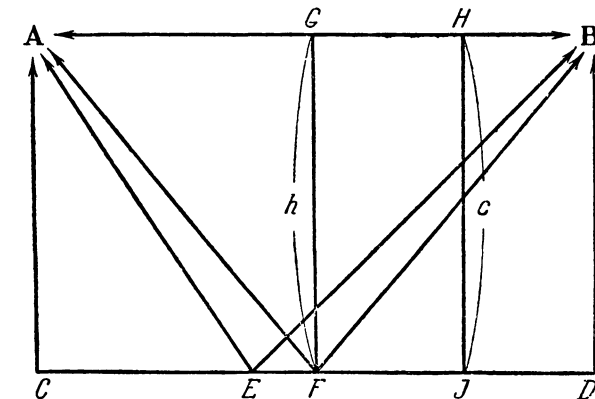
Приведенное доказательство заимствовано у М. Симона [82].

4. Построение общего перпендикуляра двух расходящихся прямых.

Имея в виду перейти к случаю расходящихся прямых, отметим, прежде всего, что именно существование общего перпендикуляра двух расходя-

щихся прямых было доказано выше (теорема 4, § 21, стр. 187) непосредственным применением постулата о непрерывности. Покажем здесь, что это предположение можно доказать без нового применения этого постулата, т. е. опираясь только на I и II основные теоремы, и притом конструктивным методом, т. е. указанием построения этого перпендикуляра.

Пусть AB и CD будут две расходящиеся прямые (черт. 151). Из произволь-



Черт. 151.

ной точки E второй прямой проведем параллели EA и EB к прямой AB в одну и в другую сторону. Так как прямая AB , расходящаяся с CD , расположена по одну сторону от последней, то и эти параллели будут расположены с той же стороны от прямой CD . Из двух углов CEA и DEB по крайней мере один должен быть острый. Если это угол CEA , то мы на луче EC отложим соответствующий ему отрезок параллельности ES , так что перпендикуляр SA , восстановленный из точки S в ту сторону, с которой лежит луч EA , будет ему параллелен, а вместе с тем будет параллелен ориентированной прямой $\vec{BA}$. Если угол DEB также острый, то на луче ED отложим соответствующий ему отрезок параллельности ED ; перпендикуляр DB к прямой ED , обращенный в ту же сторону от CD , будет параллелен EB и $\vec{AB}$. Если бы угол DEB оказался тупым (что, конечно, может иметь место), то мы построили бы отрезок параллельности, соответствующий смежному углу; точка D оказалась бы от E с той же стороны, что C , но перпендикуляры SA и DB были бы обращены в ту же сторону от прямой CD . Построение точек S и D выполняется указанными выше средствами.

Пусть F будет середина отрезка CD . Из точки F опустим перпендикуляр FG на прямую AB и проведем лучи FA и FB , параллельные соответственно EA и EB ; они будут также параллельны $\vec{BA}$ и $\vec{AB}$, а значит и лучам CA и DB . Перпендикуляр FG делит угол между параллелями FA и FB пополам; но углы CFA и DFB также будут равны, как углы параллельности, соответствующие равным отрезкам FC и FD . Поэтому $\angle CFG = \angle DFG$; это углы прямые.

Это построение заимствовано из статьи П. А. Широкова [102].

5. Доказательство четвертой основной теоремы для случая расходящихся прямых. Положим, что h есть кратчайшее расстояние FG (тот же чертеж 151) двух расходящихся прямых AB и CD , а c — произвольный отрезок, больший h . Легко видеть, что с каждой стороны точки G на прямой AB имеется точка H , расстояние которой от прямой CD определяется отрезком c . В самом деле, если такая точка H существует, то, опустив из нее перпендикуляр HJ на прямую CD , получим трипрямоугольник $HGFJ$, в котором основание $GF = h$, а противолежащая высота $HJ = c > h$. Но такой трипрямоугольник всегда существует и может быть построен, а вместе с тем существует и может быть построена и точка H .

Дополнения, необходимые для доказательства теоремы IV, в этом случае также тривиальны.

§ 29. ПОСТРОЕНИЯ ГИЛЬБЕРТА

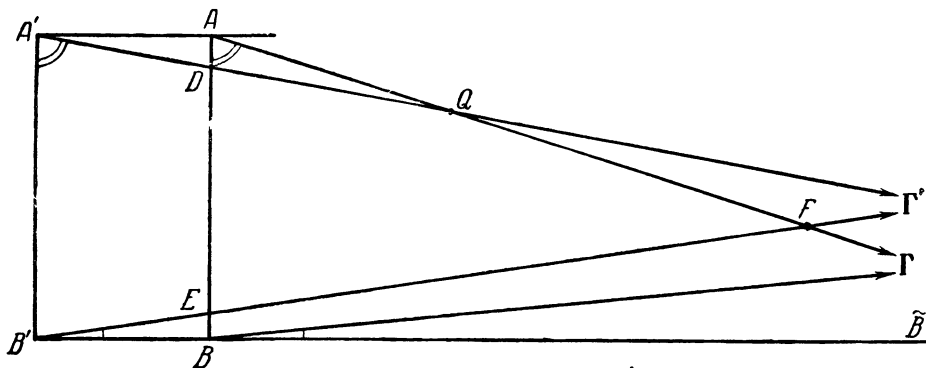
1. Постановка задачи. Первые начала гиперболической геометрии (глава III — учение о расположении прямых в гиперболической плоскости), по существу, изложены так, как они построены Лобачевским. В общем, тому же пути следовали Больаи в своем «Аппендиксе» и Гаусс в тех немногих набросках, которые до нас дошли. Существенная особенность их рассуждений заключается в том, что построение основывается на четырех основных теоремах, из которых I, II и IV доказываются при помощи принципа непрерывности (у этих авторов не всегда явно выраженного), теорема же III (теорема Лобачевского) на этот принцип не опирается. Как уже было указано, с начала текущего столетия возникла тенденция установить те же начала гиперболической геометрии, не опираясь на постулат о непрерывности, воспроизводить доказательства конструктивным методом, т. е. непосредственным построением тех точек и прямых, существование которых нужно установить. Изложение, содержащееся в §§ 27—28, в общем, следует Г. Либману, который, начиная с 1901 г., посвятил этому вопросу ряд мемуаров [103]—[110] и окончательно оформил свой метод в небольшой монографии по неевклидовой геометрии [88], три издания которой значительно отличаются одно от другого; этому пути, по существу, следует и Я. Успенский [111], а также М. Симон [92]. Характерным здесь является то, что рассуждения не опираются на четвертую основную теорему, даже доказывают ее без непосредственного применения принципа Дедекинда, но опираются на I и II основные теоремы; это значит, всегда предполагается, что каждому существующему в плоскости отрезку отвечает определенный угол параллельности и, обратно, каждому острому углу отвечает определенный отрезок параллельности. В предположении существования угла параллельности и отрезка параллельности указываются способы их построения.

Естественно возникает, таким образом, вопрос — нельзя ли и эти теоремы освободить от принципа непрерывности, на котором существенно

основывается их доказательство. Это и составило замысел Гильберта. Его мемуар, посвященный новому обоснованию гиперболической геометрии [90], действительно освобождает доказательство II основной теоремы от постулата о непрерывности. Независимо от этого, большой интерес имеют самые построения Гильберта — именно, его построение общего перпендикуляра двух расходящихся прямых и отрезка параллельности, соответствующего острому углу.

2. Вспомогательное предложение. Чтобы по методу Гильберта дать построение общего перпендикуляра двух расходящихся прямых, установим сначала следующую вспомогательную теорему.

Лемма. Через вершины A и A' верхнего основания четырехугольника Саккери $ABB'A'$ в сторону нижнего основания ближе к перпендикулярам AB и $A'B'$ проводим лучи AG и $A'T'$ под равными соответственными



Черт. 152.

углами ΓAB и $\Gamma'A'B'$ к боковым сторонам (черт. 152). Если оба эти луча расходятся с прямой $B'B$, на которой лежит нижнее основание четырехугольника Саккери, то они пересекаются в некоторой точке Q .

Доказательство. Заметим прежде всего, что лучи AG и $A'T'$ расположены относительно прямой $B'B$ совершенно одинаково; поэтому, если один из них расходится с прямой $B'B$, то с нею расходится и другой. Разумея, для некоторого упрощения рассуждения, под Γ и Γ' бесконечно удаленные точки лучей AG и $A'T'$, проведем через точки B и B' параллельные им лучи, которые соответственно этому обозначим через $B\Gamma$ ($\parallel AG$) и $B'\Gamma'$ ($\parallel A'T'$); ясно, что они образуют с $B'B$ равные соответственные углы $\tilde{B}B\Gamma$ и $\tilde{B}'B'\Gamma'$ и потому расходятся между собой (теорема 1 § 20, стр. 174). Так как прямая $B'B$ расходится с AG и $A'T'$, то эти параллели должны быть ближе к соответствующему перпендикуляру, т. е. лучи $B\Gamma$ и $B'\Gamma'$ входят внутрь прямых углов BBA и $\tilde{B}'B'A'$.

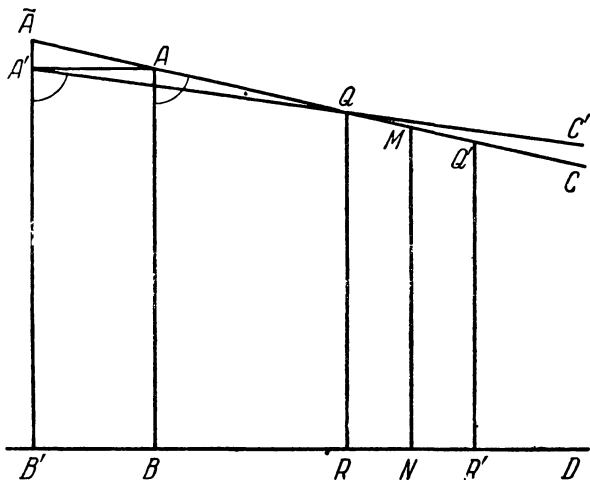
Луч $A'T'$ входит внутрь угла $B'A'A$, следовательно, внутрь нашего четырехугольника Саккери; расходясь с прямой, на которой лежит нижнее основание четырехугольника, он выйдет из него через точку D стороны AB . С другой стороны, луч $B'\Gamma'$ входит внутрь четырехугольника $A'DBB'$ и так как он параллелен лучу $A'T'$, на котором лежит сторона $A'D$ этого четырехугольника, то он выходит из него через точку E , лежащую на стороне DB . При этом он входит внутрь (вырожденного) треугольника $AB\Gamma$ с бесконечно удаленной вершиной Γ ; так как он расходится

с лучом $B\Gamma$, то он пересекает $A\Gamma$ в точке F ; образуется обыкновенный треугольник AEF , внутри которого через точку D входит луч $A'\Gamma'$; будучи параллелен прямой $B'\Gamma'$, на которой лежит сторона EF этого треугольника, он из него выходит через точку Q на прямой $A\Gamma$; это и есть точка пересечения лучей $A\Gamma$ и $A'\Gamma'$.

3. Существование и построение общего перпендикуляра двух расходящихся прямых.

Теорема 1. Две расходящиеся прямые всегда имеют общий перпендикуляр.

В самом деле, пусть AC и BD будут расходящиеся прямые (черт. 153). Из точек A и $\tilde{A}$ первой прямой опустим перпендикуляры AB и $\tilde{A}B'$ на вторую прямую. Если бы эти перпендикуляры оказались равными, то образовался бы четырехугольник Саккери $\tilde{A}B'BA$, средняя линия которого служила бы общим перпендикуляром прямых AC и BD . Оставляя в стороне этот частный случай, предпо-



Черт. 153.

ложим, что эти перпендикуляры не равны, скажем $\tilde{A}B' > AB$. Тогда на $\tilde{A}B'$ отложим отрезок $A'B' = AB$, так что образуется четырехугольник Саккери $A'B'BA$. Из точки A' проведем луч $A'C'$ в сторону перпендикуляра AB так, чтобы $\angle B'A'C' = \angle BAC$. Если луч $A'C'$ пройдет выше верхнего основания $A'A$ четырехугольника $A'B'BA$, то он войдет внутрь треугольника $AA'\tilde{A}$ и выйдет из него через точку Q , лежащую на стороне $\tilde{A}A$, следовательно, на прямой $\tilde{A}C$; если луч $A'C'$ пройдет (как на нашем чертеже) ниже прямой $A'A$, то он пересечет луч AC в некоторой точке Q в силу установленной леммы. Таким образом, луч $A'C'$ во всяком случае пересекает луч $\tilde{A}C$ в некоторой точке Q .

Из точки Q опустим на прямую BD перпендикуляр QR . Теперь передвинем четырехугольник $A'B'RQ$ по прямой BD так, чтобы сторона $A'B'$ совместилась с AB ; по равенству углов $B'A'C'$ и BAC сторона $A'C'$ пойдет по AC , и QR займет положение $Q'R'$. Образуется четырехугольник Саккери $QRR'Q'$, средняя линия которого MN будет общим перпендикуляром прямых AC и BD .

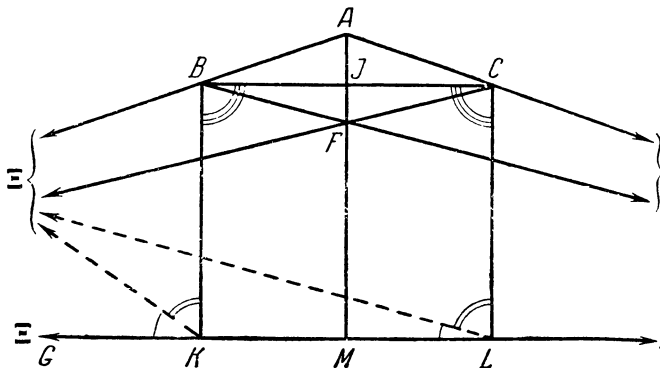
Случай, когда точка Q падает между A и $\tilde{A}$, обрабатывается совершенно так же.

4. Общая параллель к сторонам угла. Имея в виду дать конструктивное доказательство II основной теоремы, Гильберт выражает ее следующим образом.

Теорема 2. Каковы бы ни были лучи AB и AC , выходящие из общей точки A и образующие угол BAC , существует одна и только одна прямая, которая в

одну сторону параллельна лучу AB , в другую — лучу AC (черт. 154).

Доказательство. Отложим на этих лучах равные отрезки $AB=AC$ и через точки B и C проведем лучи BD и CE , соответственно параллельные сторонам угла $CAB (\equiv \angle DAE)$. При их пересечении образуется четвертая вершина гиперболического ромба $ABFC$. Биссектрисы BK и CL его внешних углов EBD и ECF , согласно теореме Гильберта (§ 23, рубрика 6, стр. 198), расходятся¹⁾, а потому имеют общий



Черт. 154.

перпендикуляр KL . Нетрудно доказать, что этот перпендикуляр в сторону $\vec{LK}$ параллелен $\vec{AE}$, а в сторону $\vec{KL}$ параллелен $\vec{AD}$.

Чтобы это обнаружить, допустим противное: предположим, что луч LK (или KG) не параллелен лучам AE и CE , так что им параллельны другие лучи

KE и LE . Диагональ ромба AF , входя внутрь четырехугольника $BKLC$ через середину J стороны BC , к которой она перпендикулярна, выходит из него через точку M на стороне KL . Углы EBF и ΔCF равны, как смежные равным углам ABF и ACF ; поэтому равны и их половины — углы KBF и LCF , а вместе с тем равны и углы KBC и LCB . Поэтому (§ 23, рубрика 3, стр. 194) $BKLC$ есть четырехугольник Саккери со средней линией JM ; получим два вырожденных треугольника BKE и CLE с одной бесконечно удаленной вершиной E каждый, с равными сторонами BK и CL и равными углами EBK и ECL ; эти треугольники конгруэнтны (§ 22, теорема 4, а, стр. 190), а вместе с тем равны углы EKB и ELC ; вследствие этого равны также углы EKG и ELG , т. е. параллельные лучи KE и LE одинаково наклонены к секущей KL , что не может иметь места.

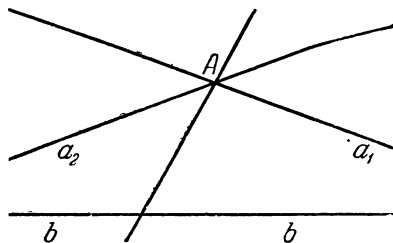
Итак, KL есть прямая, которая в сторону $\vec{KL}$ параллельна $\vec{AD}$, а в сторону $\vec{LK}$ параллельна $\vec{AE}$, т. е. это прямая — заградительная для угла BAC . Так как она при этом перпендикулярна к биссектрисе AF угла EAD , то другой такой прямой быть не может, иначе два перпендикуляра к AF были бы параллельны, что невозможно.

Отрезок AM есть отрезок параллельности, соответствующий углу EAM ; а так как за EAM (т. е. за половину угла BAC) может быть взят любой острый угол, то тем самым доказано, что каждому острому углу соответствует определенный отрезок параллельности.

5. Постулат Гильберта. Итак, вторая основная теорема доказана конструктивным методом без непосредственного применения постулата о непрерывности (принципа Дедекинда); но доказательство все же опирается на первую основную теорему: оно принимает существование

¹⁾ Напомним, что доказательство этой теоремы, данное Гильбертом, не опирается на II основную теорему.

двух параллелей к данной прямой в точке, на ней не лежащей; доказательство же этого предложения основывается на постулате Лобачевского (§ 17, рубр. 5, стр. 158) и существенно опирается на принцип Дедекинда. Предыдущие рассуждения приводят, таким образом, к заключению, что гиперболическая геометрия в своих начальных предложениях основывается на постулате о непрерывности лишь постольку, поскольку на него опирается доказательство первой основной теоремы. При этих условиях для построения гиперболической геометрии возможен двойкий путь. Можно принять постулат о непрерывности, скажем, в форме принципа Дедекинда; это приводит к геометрии непрерывной гиперболической плоскости. Можно этого постулата не принимать, но постулировать первую основную теорему; это дает возможность построить гиперболическую геометрию пространства, которое может и не быть непрерывным.



Черт. 155.

По первому пути шли Лобачевский, Больаи и их ближайшие последователи; этому пути следует изложение главы третьей настоящего сочинения. На второй путь стал Гильберт; вместо принципа Лобачевского он в мемуаре, посвященном новому обоснованию гиперболической геометрии [9], вводит следующий постулат.

Постулат о параллельных линиях в формулировке Гильберта. Если b есть произвольная прямая и A —точка, вне ее лежащая, то из этой точки A в плоскости (A, b) всегда выходят два луча a_1 и a_2 (черт. 155), не составляющие продолжения друг друга и не встречающие прямой b , между тем как всякий луч, выходящий из точки A и расположенный внутри угла (a_1, a_2) , встречает прямую b .

Установка Гильберта, как уже сказано, имеет то достоинство, что она дает возможность строить геометрию плоскости, которая может и не быть непрерывной. Развертывая геометрию Лобачевского, мы будем в дальнейшем этой установки придерживаться; отметим, однако, что она отличается также своим конструктивным характером, что имеет очень существенное значение. Плоскость, определяемую постулатом Гильберта, мы будем обозначать через H_2 . Плоскость H_2 отличается, таким образом, от плоскости Лобачевского, которую мы будем обозначать через L_2 , тем, что в ней может не иметь места непрерывность прямой, но остаются в силе все остальные аксиомы, на которые фактически опираются рассуждения Лобачевского (в том числе, отметим это, и аксиома Паша); сохраняется также и постулат о параллельных в той форме, которую ему придал Гильберт. Можно сказать, что в дальнейшем мы будем развертывать геометрию плоскости H_2 . Само собой разумеется, что все, что имеет место в плоскости H_2 , конечно, имеет место и в плоскости L_2 ; но противоположное утверждение было бы несправедливо. Поскольку, однако, в плоскости H_2 через точку, лежащую вне данной прямой, проходит бесчисленное множество прямых, ее не встречающих, такую плоскость также называют гиперболической.

ГЛАВА ШЕСТАЯ

КРИВЫЕ ПОСТОЯННОЙ КРИВИЗНЫ В ГИПЕРБОЛИЧЕСКОЙ ПЛОСКОСТИ

§ 30. ПУЧОК ПРЯМЫХ И ЕГО ТРАЕКТОРИИ

1. Определение пучка прямых в гиперболической плоскости. При исследовании замечательных точек и прямых треугольника в гиперболической плоскости (§ 24) мы пришли к тому, что серединные перпендикуляры к сторонам треугольника либо сходятся в одной точке, либо параллельны, либо все три перпендикулярны к одной прямой; то же имеет место относительно биссектрис, включая и биссектрисы внешних углов, и высот треугольника. Это привело к терминологии (§ 24, рубр. 4, стр. 205), по которой три прямые образуют пучок, если они либо пересекаются в одной точке, либо (в надлежащей ориентации) параллельны, либо все три перпендикулярны к одной прямой. Это определение получило дальнейшее развитие: именно, о всякой совокупности (множестве) прямых говорят, что они образуют пучок, если таковой образуют любые три прямые этой совокупности. Сопоставляя любую прямую такого пучка с двумя определенными другими его прямыми, приходим к тому, что прямые пучка либо все проходят через одну точку (центр пучка), либо все в определенной ориентации параллельны, либо все перпендикулярны к одной и той же прямой (базисная прямая пучка). В первом случае говорят о пучке сходящихся прямых, во втором — о пучке параллельных прямых, в третьем — о пучке расходящихся прямых.

Как в случае сходящихся, так и в случае расходящихся прямых каждая прямая пучка распадается на два луча, составляющие продолжения один другого; в пучке сходящихся прямых это разбиение прямой на два противоположно ориентированных луча производится центром пучка, в пучке расходящихся прямых — его базисной прямой. В случае параллельных прямых такое разбиение не имеет места; но ориентированные прямые пучка часто называют его лучами¹⁾ (Либман, Симон) и, таким образом, можно всегда говорить о пучке лучей. Пучок лучей будем называть полным, если через каждую точку плоскости проходит луч этого пучка.

Теорема 1. Во всяком пучке лучей через каждую точку любого луча проходит к любому другому лучу одна и только одна секущая равного наклона.

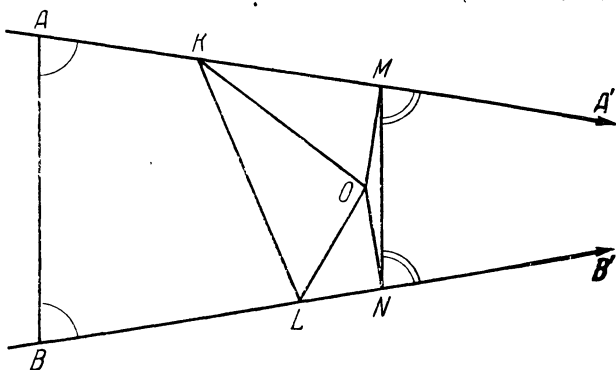
В случае сходящихся лучей с центром O секущая равного наклона от точки A луча OA проходит к точке B луча OB , если $OB = OA$.

¹⁾ Это несколько расходится с определением луча, которого мы придерживались выше.

В случае расходящихся лучей секущая AB равного наклона лучей $A'A$ и $B'B$, перпендикулярных к базисной прямой $A'B'$, проходит через точки A и B , равноудаленные от базиса (т. е. при $AA' = BB'$).

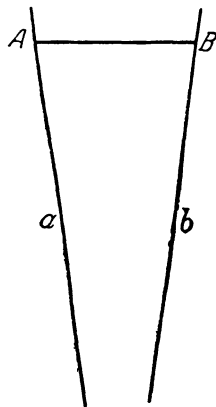
В случае параллелей построение секущей равного наклона производится следующим образом. Проведем произвольную секущую

(черт. 156) KL и биссектрисы KO и LO углов, которые она образует с параллелями. Эти биссектрисы всегда пересекаются в некоторой точке O , которая равноудалена от этих параллелей (перпендикуляры OM и ON равны); MN есть, таким образом, секущая равного наклона данных параллелей. Чтобы получить секущую равного наклона AB , проходящую через точку A , откладываем отрезок $NB = MA$, обращенный в ту же сторону, что и последний (MA). Существование единственной секущей равного наклона обуславливается тем, что при вращении секущей AB вокруг точки A один из углов наклона убывает, а другой возрастает. (Отметим конструктивный характер доказательства.)



Черт. 156.

2. Соответственные точки на лучах пучка. Пусть A будет произвольная точка луча a некоторого пучка, b — произвольный другой луч того же пучка. Из точки A проведем секущую равного наклона AB к лучам a и b (черт. 157); точку B будем называть соответствующей точке A на луче b . Термин принадлежит Гауссу, который его, однако, применял только к пучку параллелей (*correspondirende Punkte* [70], стр. 207). Совершенно ясно, что такое соответствие двух точек есть свойство взаимное.



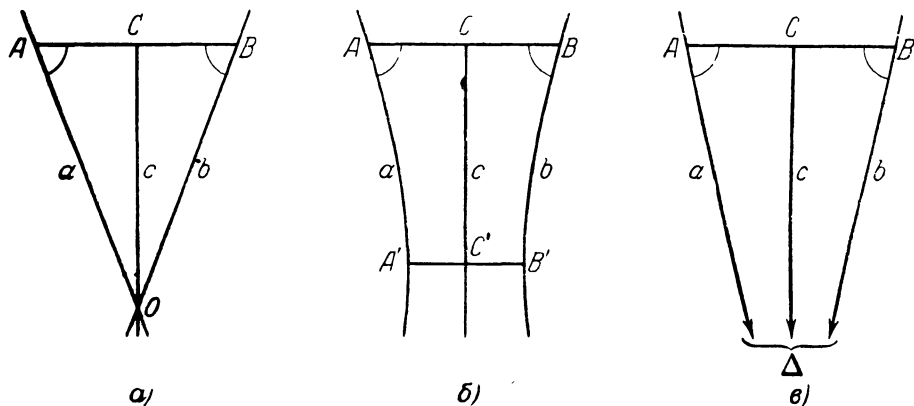
Черт. 157.

Теорема 2а. Если A и B суть соответственные точки лучей a и b пучка, то перпендикуляр s к отрезку AB из его середины C , будучи обращен в надлежащую сторону, принадлежит тому же пучку.

Если лучи a и b сходятся в точке O (черт. 158, а), то перпендикуляр s также проходит через точку O . Если лучи a и b расходятся (черт. 158, б), то перпендикуляры AA' и BB' на базисную прямую $A'B'$ равны, а потому $AA'B'B$ есть четырехугольник Саккери; средняя линия CC' перпендикулярна к обоим основаниям, т. е. принадлежит к тому же пучку. Наконец, если лучи пучка параллельны (черт. 158, в), то серединный перпендикуляр им параллелен в силу теоремы 4 § 19 (стр. 170).

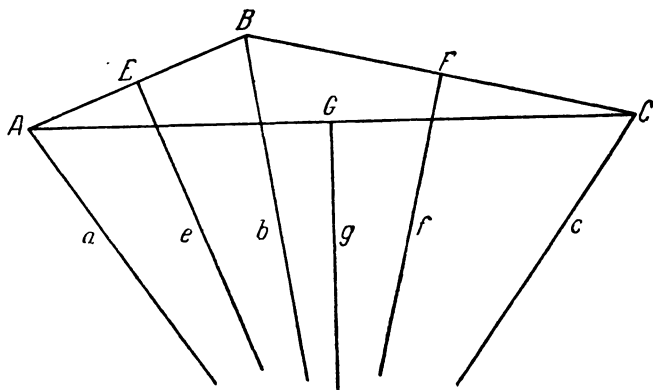
Теорема 2б. Если точки A и B лежат на лучах a и b пучка и перпендикуляр s из середины C отрезка AB принадлежит тому же пучку, то A и B суть соответственные точки на лучах a и b .

В самом деле, легко показать, что при этом условии AB есть секущая равного наклона лучей a и b , к какому бы пучку ни принадлежали эти прямые. Это совершенно ясно в случае пучка сходящихся лучей (черт. 158, *а*). В случае пучка параллелей (черт. 158, *б*) углы, которые параллели a и b образуют в точках A и B с хордой AB , при условиях задания суть углы параллельности, соответствующие половине отрезка AB $\left[\Pi \left(\frac{1}{2} AB \right) \right]$. В случае пучка расходящихся прямых (черт. 158, *б*)



Черт. 158.

лучи a , b , c перпендикулярны к базисной прямой: если они пересекают последнюю в точках A' , B' , C' , то образуются два трипрямоугольника $AA'C'C$ и $BB'C'C$ с острыми углами при вершинах A и B ; они конгруэнтны, потому что $CA = CB$ и сторона CC' — общая (теорема 5, б § 23, стр. 196); поэтому равны углы при вершинах A и B .

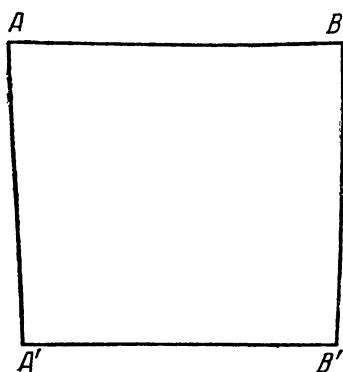


Черт. 159.

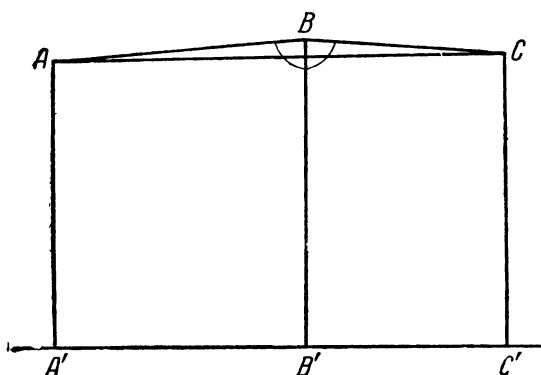
Теорема 3. Если точки A и B соответствуют друг другу на лучах a и b пучка, а точки B и C соответствуют друг другу на лучах b и c того же пучка, то точки A и C также соответствуют друг другу на лучах a и c .

В самом деле, в силу теоремы 2а, перпендикуляры e и f , восстановленные из середины E и F отрезков AB и BC , принадлежат тому же пучку (черт. 159). В силу теорем 2а—2с § 24 (стр. 201—202), откуда следует,

Таким образом, всякая траектория пучка, как она определена выше, есть ортогональная его траектория.



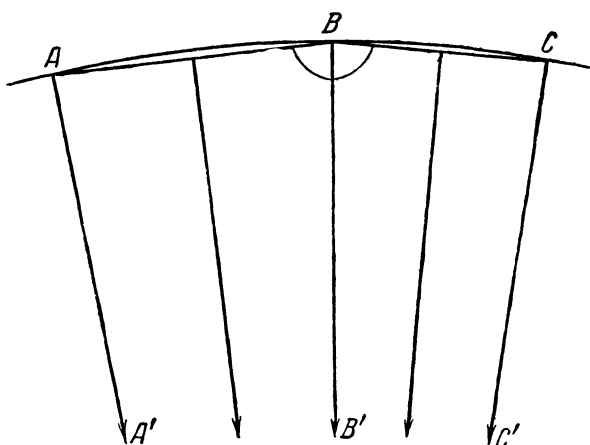
Черт. 161.



Черт. 162.

Теорема 7. Прямая может пересекать траекторию пучка не более чем в двух точках.

Пусть A, B, C будут три точки траектории пучка. Если прямые



Черт. 163.

пучка сходятся, то точки A, B, C лежат на одной окружности и потому не могут лежать на одной прямой. В случае расходящегося пучка возьмем точки A, B и C на траектории и предположим, что точка B лежит на ней между точками A и C (черт. 162). Если $A'B'C'$ есть базисная прямая пучка, то $AA'B'B$ и $BB'C'C$ суть четырехугольники Саккери, углы ABB' и $B'BC$ острые, прямые BA и BC не могут быть продолжениями одна другой, если траектория не сов-

падает с базой пучка. В случае пучка параллелей (черт. 163) углы ABB' и CBB' также острые.

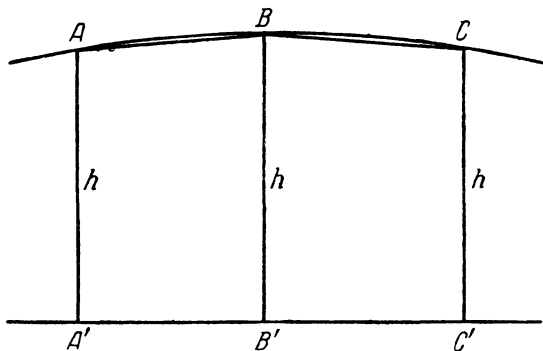
§ 31. ЭКВИДИСТАНТНЫЕ ЛИНИИ

1. Кривые постоянной кривизны в гиперболической плоскости. В евклидовой плоскости существуют два типа кривых, имеющих постоянную кривизну—прямая и окружность; их общим характеристическим признаком можно здесь считать то их свойство, что каждая из этих кривых может скользить сама по себе без деформации. Точнее, существует такое движение плоскости в себе, при котором заданная кривая постоянной кривизны скользит сама по себе; каждая ее точка при этом может быть совмещена с любой другой ее точкой. В настоящем параграфе мы

исследуем кривые, обладающие тем же свойством на гиперболической плоскости, т. е. кривые постоянной кривизны в H_2 . Мы покажем, что этим свойством обладают ортогональные траектории любого пучка лучей. Мы познакомимся с этими кривыми ближе: они играют в гиперболической геометрии очень важную роль.

Что касается указанного свойства, то траектории пучка сходящихся лучей — окружности — им явно обладают; нам нужно обнаружить, что им обладают также траектории пучков двух других типов — расходящихся и параллельных лучей.

2. Эквидистанта. Положим, что ABC есть траектория пучка расходящихся прямых, $A'B'C'$ — их базисная прямая (черт. 164). Мы уже видели выше, что перпендикуляры AA' , BB' , CC' равны между собой. Иначе говоря, все точки траектории отстоят на одно и то же расстояние от базисной прямой. Но и обратно, геометрическое место точек, отстоящих от данной прямой на данное расстояние h и расположенных по одну сторону ее, есть траектория пучка расходящихся прямых, для которой данная прямая служит базисной прямой. В самом деле, перпендикуляры, восстановленные из всех точек данной прямой $A'B'$, образуют расходящийся пучок. Отложив на них по одну сторону расстояния



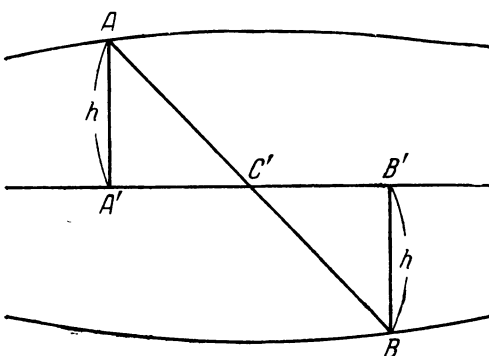
Черт. 164.

$A'A = B'B = C'C = \dots = h$, получим геометрическое место $ABC \dots$ точек, отстоящих от данной прямой на данное расстояние. Четырехугольник $A'ABB'$ будет четырехугольником Саккери, углы $A'AB$ и $B'BA$ будут равны; точка B будет соответствовать точке A на луче $B'B$ пучка; геометрическое место точек, находящихся от прямой $A'B'$ на том же расстоянии, что и точка A , совпадает с траекторией пучка, проходящей через точку A . Эту кривую называют эквидистантой. Впрочем, часто под эквидистантой разумеют совокупность всех точек плоскости, отстоящих от данной прямой на данное расстояние h , т. е. расположенных от этой прямой как по одну, так и по другую сторону данной прямой. Эквидистанта в этом смысле слова состоит из двух ветвей, траекторий двух пучков, если считать прямые пучка ориентированными лучами, как это предусмотрено в рубрике 1 § 30 (стр. 240). Постоянное расстояние h называется параметром эквидистанты. Ясно, что эквидистанта может передвигаться по себе без деформации и притом так, что любая ее точка может быть совмещена с любой другой ее точкой. Такое движение имеет место, когда плоскость движется так, что базисная прямая движется по себе самой.

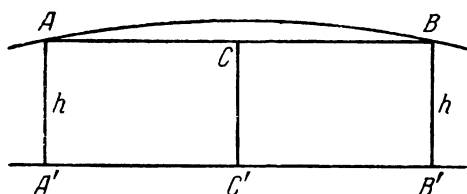
3. Пересечение эквидистанты прямой линией. Прямая может пересекать эквидистанту не более чем в двух точках; это пересечение определяется точные следующие тремя теоремами.

Теорема 1. Прямая, пересекающая базисную прямую, встречает каждую ветвь эквидистанты в одной точке.

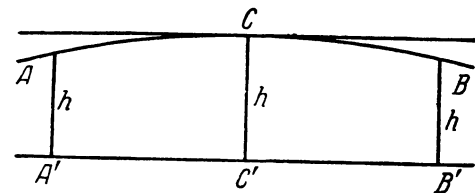
В самом деле, положим, что прямая AB пересекает базисную прямую $A'B'$ в точке C' (черт. 165). Случай, когда прямая AB перпендикулярна к $A'B'$, совершенно тривиален; если углы $A'C'A$ и $B'C'B$ острые, то на каждом из лучей $C'A$ и $C'B$ имеется одна и только одна точка, отстоящая на расстояние h от другой стороны угла; ее разыскание сводится к построению прямоугольного треугольника по катету h и противолежащему острому углу (§ 27, рубр. 3, стр. 231).



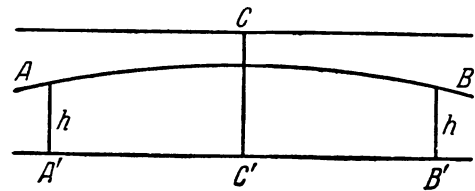
Черт. 165.



а)



б)



в)

Черт. 166.

Теорема 2. Прямая, параллельная базисной прямой, пересекает ту ветвь эквидистанты, со стороны которой она проходит, в одной точке.

В самом деле, на параллели имеется одна и только одна точка, отстоящая от базисной прямой на расстояние h (§ 28, рубр. 3, стр. 233 — 234).

Теорема 3. Прямая, расходящаяся с базисной прямой, пересекает одну ветвь эквидистанты в двух точках, если кратчайшее ее расстояние от базисной прямой меньше параметра эквидистанты h ; касается ее, если это расстояние равно h ; не встречается эквидистанты вовсе, если кратчайшее расстояние больше h .

Если кратчайшее расстояние CC' прямой AB от базиса эквидистанты меньше h (черт. 166, а), то по одну и другую сторону от CC' существует точка (A или B), отстоящая от $A'B'$ на расстояние h (§ 28, рубрика 5, стр. 235). Эти точки A

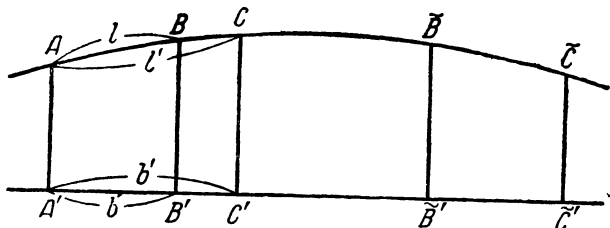
и B лежат на эквидистанте. Эти две точки сливаются в одну, если $CC' = h$ (черт. 166, б). Точек пересечения нет, если $CC' > h$ (черт. 166, в).

4. Длина дуги эквидистанты.

Теорема 4. Две дуги эквидистанты относятся между собой, как их проекции на базу.

Мы можем считать дуги эквидистанты сведенными к общему началу A (AB и AC на черт. 167) и воспользуемся евклидовым определением пропорциональности.

Повторим дугу AB m раз, AC — n раз, где m и n целые числа. Получим дуги $\tilde{AB}$ и $\tilde{AC}$. Вместе с тем и их проекции $A'\tilde{B}'$ и $A'\tilde{C}'$ получатся в результате m -кратного и n -кратного повторения проекций $A'B'$ и $A'C'$ данных отрезков. Теперь ясно, что точка $\tilde{B}'$ предшествует точке $\tilde{C}'$, совпадает с нею или следует за нею в зависимости от того, предшествует ли $\tilde{B}$ точке $\tilde{C}$, совпадает с нею или следует за ней. А это и означает, что дуги AB и AC пропорциональны своим проекциям $A'B'$ и $A'C'$. В предположении, что дуги имеют определенные длины, выражающиеся соответственно числами l и l' , а b и b' — длины их проекций, то получим, что $l:b = l':b'$. На каждой эквидистанте отношение дуги к ее проекции остается, таким образом, постоянным; при переходе же от одной эквидистанты к другой оно представляет собой функцию параметра h :



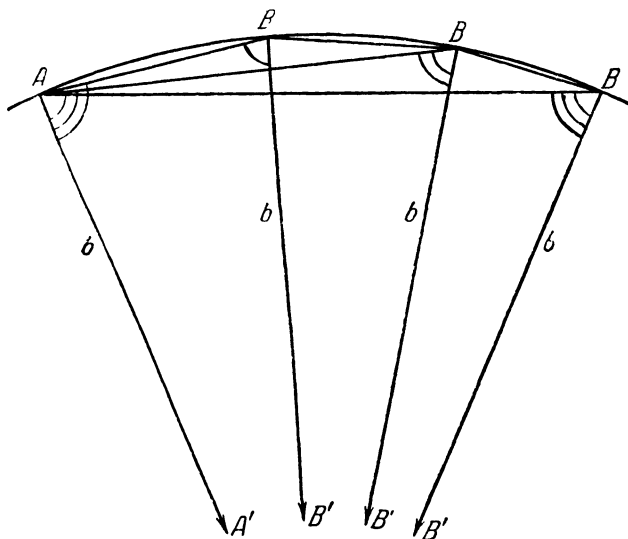
Черт. 167.

$$l = b \varphi(h), \quad (1)$$

значение которой мы установим ниже (§ 39, рубр. 2, стр. 312).

§ 32. ПРЕДЕЛЬНЫЕ ЛИНИИ

1. Определение предельной линии. Траектория пучка параллельных прямых называется предельной линией. Термин принадлежит Н. И. Лобачевскому, который пользуется для наименования этой



Черт. 168.

кривой также названием «орицикл». Предельные линии играют очень важную роль в дальнейшем развитии гиперболической геометрии. Остановимся на важнейших их свойствах.

Построение предельной линии предполагает заданным пучок параллелей. На одной из параллелей a берем произвольную (так называемую начальную) точку A и на каждой другой параллели b — соответствующую ей точку B (черт. 168). Совокупность всех точек, соответствующих

точке A на лучах пучка определяет, данному в § 30, рубр. 3 (стр. 243), траекторию пучка параллелей, — предельную линию, определяемую начальной точкой A и проходящей через нее прямой a пучка

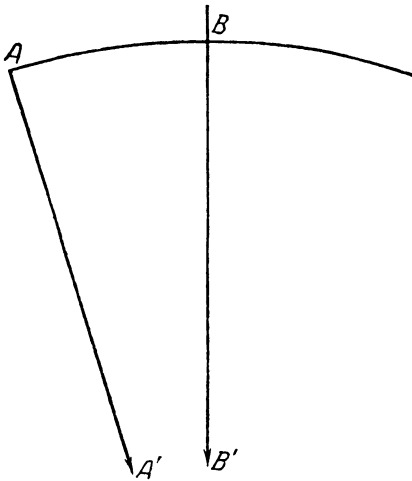
параллелей. Ориентированные прямые пучка параллелей, на которых предельная линия строится (лучи пучка), называются ее осями. Иногда ось, проходящую через начальную точку, называют главной осью предельной линии. Предельная линия, как уже сказано, определяется начальной точкой и главной осью. Но согласно теореме 4 § 30, рубр. 3 (стр. 243) любая точка предельной линии может быть принята за начало, а проходящая через нее ось — за главную ось.

2. Важнейшие свойства предельной линии.

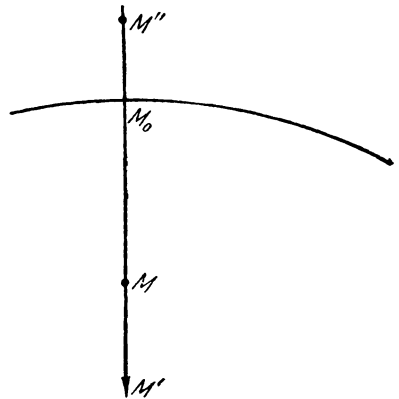
Теорема 1. Предельная линия определяется одной из своих точек и направлением любой ее оси (т. е. заданием какой-либо прямой пучка параллелей, на котором эта линия строится, с указанием стороны обращения ориентированной прямой).

Если дана точка A предельной линии и прямая $\overrightarrow{BB'}$, определяющая направление ее оси (черт. 169), то мы проводим через точку A прямую $\overrightarrow{AA'}$,

параллельную $\overrightarrow{BB'}$; предельная линия определится точкой A и осью $\overrightarrow{AA'}$.



Черт. 169.



Черт. 170.

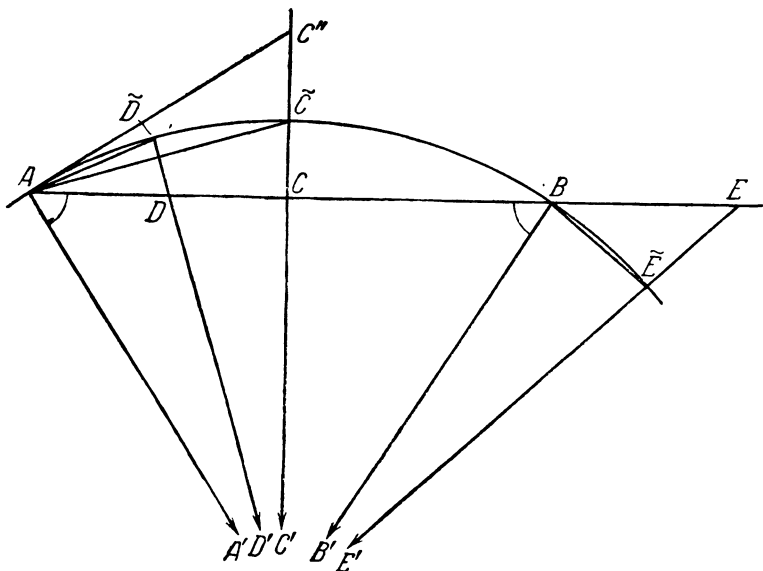
На каждой оси существует одна и только одна точка, принадлежащая данной предельной линии. Это можно выразить следующим предложением.

Теорема 2. Каждая ось предельной линии встречается с ней в одной и только в одной точке.

Предельную линию следует, таким образом, представлять себе как разомкнутую кривую. Тем не менее отличают внутреннюю и внешнюю стороны предельной линии. Именно, через произвольную точку M плоскости, не лежащую на предельной линии (черт. 170), проведем ось кривой, которая встречается предельную линию в некоторой точке M_0 . Если точка M расположена относительно M_0 в ту сторону, в которую обращена ось M_0M' («ниже M_0 »), т. е. на луче M_0M' , то говорят, что точка лежит с внутренней стороны предельной линии, или, короче, внутри предельной линии. Если же эта точка (как, например, M'') расположена на оси по другую сторону от точки M_0 («выше M_0 »), т. е. на продолжении луча M_0M' , то говорят, что точка расположена с внешней стороны, вне предельной линии.

Теорема 3. Перпендикуляр CC' , восстановленный из середины C хорды AB предельной линии и обращенный в сторону осей $\vec{AA'}$ и $\vec{BB'}$, проходящих через концы этой хорды, есть ось этой предельной линии. Хорда образует с этими осями $\vec{AA'}$ и $\vec{BB'}$ равные острые углы.

Доказательство. Согласно теореме 4 § 19 (стр. 170), перпендикуляр $\vec{CC'}$ (черт. 171) параллелен осям $\vec{AA'}$ и $\vec{BB'}$. Углы ABB'



Черт. 171.

и BAA' суть углы параллельности, соответствующие равным отрезкам $AC = BC$ (см. также теорему 2а на стр. 241).

Теорема 4. Все внутренние точки хорды предельной линии лежат внутри этой линии; все внешние точки хорды лежат вне предельной линии.

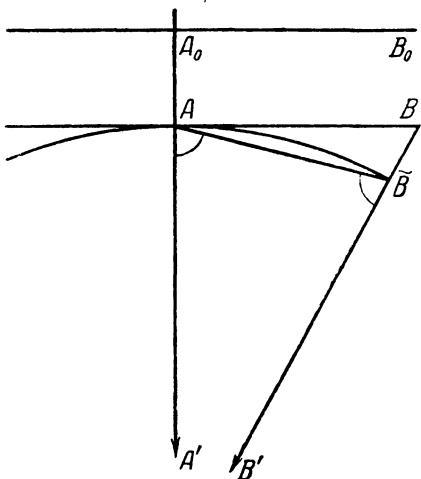
Доказательство. Если A и B суть концы хорды AB , C — ее середина (черт. 171), AA' и BB' — оси предельной линии, то углы $A'AC$ и $B'BC$ острые. Если $\tilde{C}$ есть точка, в которой ось $\vec{CC'}$ пересекает предельную линию, то угол $\tilde{A}\tilde{C}C'$ острый; а так как ACC' есть прямой угол, то точка C лежит на луче $\tilde{C}C'$ (т. е. ниже $\tilde{C}$), ибо в противном случае (C'') угол $\tilde{A}\tilde{C}C'$, как внешний по отношению к треугольнику $\tilde{A}\tilde{C}C''$, был бы больше угла $AC''\tilde{C}$. Если D есть точка хорды, лежащая между A и C , и проходящая через нее ось $\vec{DD'}$ встречается предельную линию в точке $\tilde{D}$, то угол $D'DC$ острый, угол ADD' тупой, между тем как угол $\tilde{A}\tilde{D}D'$ острый. Точка D лежит на оси ниже $\tilde{D}$.

Положим теперь, что точка E лежит на продолжении хорды AB , скажем, со стороны точки B . Проходящая через нее ось $\vec{EE'}$ встречается

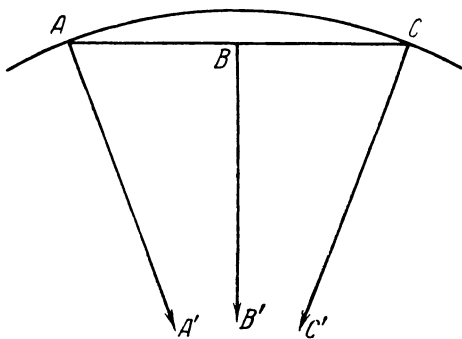
предельную линию в точке $\tilde{E}$. Угол ABB' острый, поэтому угол $\tilde{B}'BE$ — тупой. Но угол $B'VE$ острый, поэтому луч VE не может войти внутрь угла $B'VE$, а потому не может встретить луча $\tilde{EE}'$; следовательно, точка E лежит на этой оси выше точки $\tilde{E}$.

Теорема 5. а) Прямая, проходящая через точку предельной линии перпендикулярно к оси, идущей из этой точки, встречается предельную линию только в этой точке; б) прямая, проходящая через точку предельной линии под острым углом к оси, встречается предельную линию еще в одной точке (со стороны острого угла).

Доказательство. Теорема а), собственно, вытекает непосредственно из общей теоремы 6 § 30, рубр. 3 (стр. 243). Пусть AB — касательная к предельной линии в точке A (черт. 172), AA' — ось предельной линии, проходящая через эту точку. Если возьмем на касательной другую точку B и проведем через нее ось BB' ,



Черт. 172.



Черт. 173.

так что $BB' \parallel AA'$, и через $\tilde{B}$ обозначим точку, в которой ось BB' встречается предельную линию, то углы $A'\tilde{A}B$ и $B'\tilde{B}A$ будут острыми. Луч $\tilde{A}B$ проходит внутрь прямого угла $A'AB$, точка $\tilde{B}$ лежит на луче BB' ниже точки B , иначе говоря, точка B лежит вне предельной линии. Это значит, что все точки касательной, кроме точки касания, лежат вне предельной линии; вся кривая расположена по одну сторону от касательной, и именно по ту сторону, в которую обращен луч AA' .

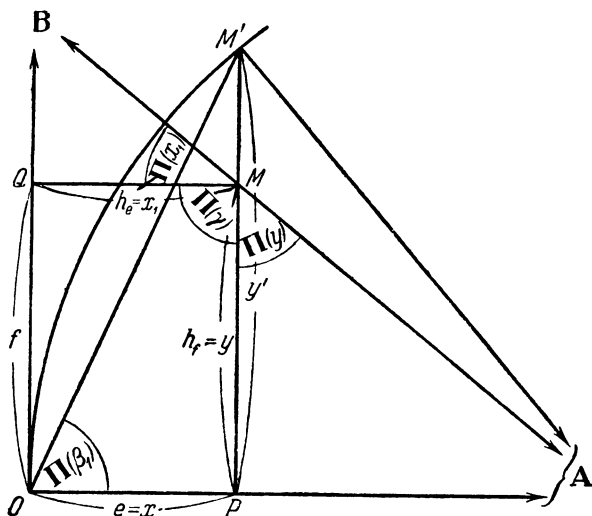
Если на оси AA' возьмем точку A_0 на продолжении луча AA' , т. е. выше точки A — вне предельной линии, то перпендикуляр A_0B_0 к оси AA' будет расположен по другую сторону AB , т. е. не только не встречается предельной линии, но неограниченно от нее удаляется по обе стороны точки A_0 .

б) Положим теперь, что луч AB образует с осью AA' в точке A предельной линии острый угол $A'AB$ (черт. 173). На луче AB отложим отрезок параллельности, соответствующий этому углу. Если на продолжении отрезка AB отложим равный ему отрезок BC и проведем ось CC' , то угол BCC' будет равен углу BAA' , т. е. точка C будет лежать на предельной линии.

Теорема 5б. Прямая, проходящая через внутреннюю точку предельной линии и не совпадающая с осью, встречается предельную линию в двух точках.

Доказательство. Предположим сначала, что прямая PM , проходящая через внутреннюю точку P предельной линии (черт. 174), перпендикулярна к оси OA , проходящей через эту точку и встречающей предельную линию в точке O . В этой точке проведем к оси перпендикуляр OB

в ту сторону, в которую обращен луч PM нашей прямой. Пусть AB будет заградительная линия прямого угла AOB , так что $AB \parallel OB$, $BA \parallel OA$. Так как точка P лежит на стороне этого угла, то луч PM , входя внутрь вырожденного треугольника AOB , встречает его сторону AB в некоторой точке M . Обозначим отрезок PM через y , а дополнительный отрезок через y' . Если на луче PM отложим отрезок $PM' = y'$, то его конечная точка M' будет лежать на нашей предельной линии. Чтобы это обнаружить, опустим из точки M перпендикуляр MQ на вторую сторону OB прямого угла; стороны и высоты трипрямоугольника $POQM$ с острым углом при вершине M обозначим:



Черт. 174.

$$OP = e = x, OQ = f, MP = h_f = y, MQ = h_e = x_1. \quad (1)$$

Угол PMQ будем обозначать через M , а его линейное значение—через γ , так что

$$\Pi(\gamma) = \angle PMQ = \angle M. \quad (2)$$

Так как

$$\angle PMA = \Pi(y), \quad \angle QMB = \Pi(x_1),$$

то

$$\Pi(\gamma) = \pi - \Pi(y) - \Pi(x_1). \quad (3)$$

Отсюда, между прочим, следует, что

$$\Pi(x_1) + \Pi(y) > \frac{\pi}{2}. \quad (4)$$

Согласно теореме 1 § 26, по схеме (XII₁, стр. 219), существование этого трипрямоугольника обуславливает существование прямоугольного треугольника с элементами:

$$a = e = x, b = \gamma, c = h_e = x_1, \alpha = h_f = y, \beta = f'. \quad (5)$$

Подвергая этот треугольник преобразованию T_8 , т. е. составляя соответствующий треугольник Δ_8 (XIII₁, стр. 221), придем к тому, что существует прямоугольный треугольник с элементами:

$$a_1 = x, b_1 = y', c_1 = f', \alpha_1 = \gamma', \beta_1 = x_1. \quad (5a)$$

А так как прямоугольный треугольник вполне определяется своими катетами, то треугольник Δ_8 (5а) совпадает с треугольником OPM' . Поэтому, согласно равенству (3),

$$\angle OM'P = \Pi(\alpha_1) = \Pi(\gamma') = \frac{\pi}{2} - \Pi(\gamma) = \Pi(x_1) + \Pi(y) - \frac{\pi}{2}. \quad (3a)$$

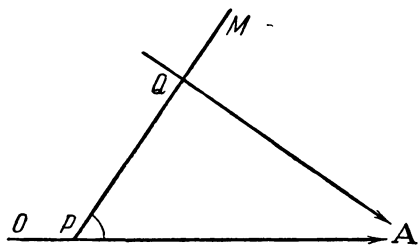
Мы уже знаем, что выражение, стоящее справа, имеет положительное значение. Если теперь из точки M' проведем луч $M'A \parallel OA$, то $\angle PM'A = \Pi(y')$ и, следовательно,

$$\angle OM'A = \Pi(x_1) + \Pi(y) + \Pi(y') - \frac{\pi}{2} = \Pi(x_1).$$

Но согласно (5а) $\angle POM' = \Pi(\beta_1)$ также равен $\Pi(x_1)$; следовательно, OM' есть секущая равного наклона параллелей OA и $M'A$, т. е. точка M' принадлежит нашей предельной линии.

Продолжение луча PM встретит предельную линию в точке M'' , причем $PM'' = PM'$.

Доказательство носит конструктивный характер и проводится в геометрии H_2 . Оно дает построение точек пересечения предельной линии, заданной началом и осью, с прямой, перпендикулярной к этой оси.



Черт. 175.

Если луч PM не перпендикулярен к оси OA (черт. 175) и образует с лучом PA , направленным в сторону оси, острый угол APM , то отложим от P отрезок параллельности PQ , соответствующий углу APM . Перпендикуляр QA к PM будет осью предельной линии. Если бы точка Q лежала вне предельной линии или на ней, то прямая PM не имела бы точек, лежащих внутри предельной линии; но, по условию, точка P — внутренняя, следовательно, мы находимся в условиях уже рассмотренного случая; прямая PM встречает предельную линию в двух точках, одинаково удаленных от Q .

Изложенное доказательство, как уже сказано, конструктивное; оно содержит построение точек пересечения предельной линии с секущей прямой, выполнимое с помощью циркуля и линейки.

3. Элементы, определяющие предельную линию и ее части. Мы знаем, что предельная линия определяется одной своей точкой и направлением оси (какой-либо своей осью). К этому присоединяется следующее предложение.

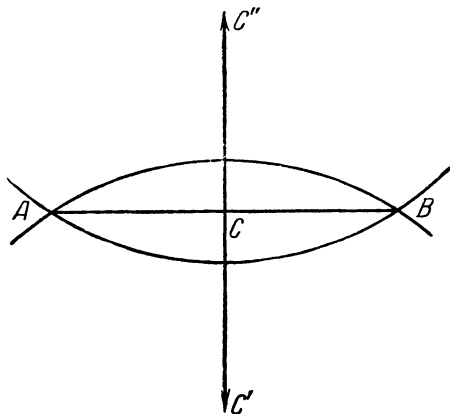
Теорема 6. Через любые две точки плоскости проходят две и только две предельные линии; они симметричны относительно прямой, соединяющей эти точки.

В самом деле, если предельная линия проходит через точки A и B , то отрезок AB служит ее хордой, а перпендикуляр CC' (или CC''), восстановленный к хорде из ее середины и обращенный в надлежащую сторону, представляет собою ось кривой (§ 32, рубр. 2, теорема 3, стр. 249). Иначе говоря, если предельная линия должна проходить через заданные две точки A и B (черт. 176), то перпендикуляр, восстановленный из середины отрезка AB , должен служить осью этой предельной линии; но этот перпендикуляр можно обратить в одну или в другую сторону (CC' или

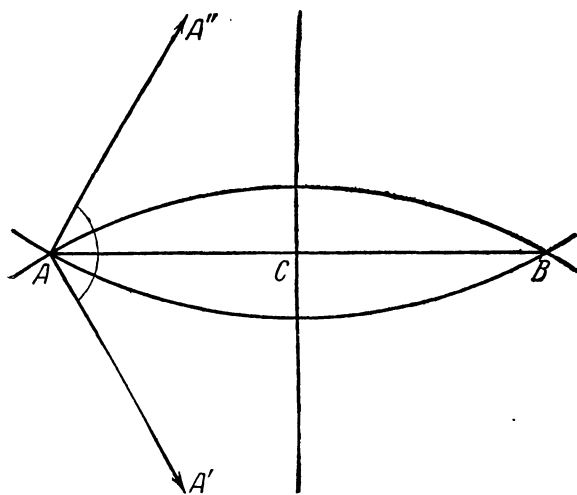
CC''); этим определяются две предельные линии, проходящие через две данные точки; они симметричны относительно прямой, соединяющей эти две точки. Можно сказать, две точки определяют предельную линию с точностью до симметрии относительно прямой, проходящей через эти точки¹⁾.

Теорема 6а. Две предельные линии, имеющие общую точку, но не касающиеся одна другой, имеют еще одну общую точку.

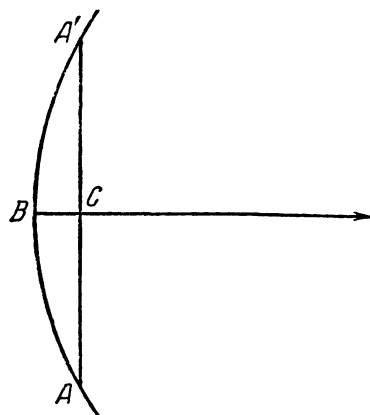
В самом деле, пусть две предельные линии пересекаются в точке A (черт. 177). Проведем в точке A оси AA' и AA'' обеих предельных линий и, разделив угол $A'A''$ пополам прямой AC , отложим на ней отрезок параллельности AC равных углов $A'AC$ и $A''AC$, так что $\angle A'AC = \angle A''AC = \Pi(AC)$. Перпендикуляр к прямой AC в точке C будет в одну сторону параллелен оси AA' , а в другую — оси AA'' . Если на продолжении отрезка AC отложим отрезок CB , равный AC , то точка B , в силу симметрии, будет принадлежать обеим предельным линиям.



Черт. 176.



Черт. 177.



Черт. 178.

Перпендикуляр AC (черт. 178), опущенный из одного конца предельной дуги AB на ось, проходящую через другой ее конец, называется высотой предельной дуги; отрезок BC — ее основанием.

¹⁾ В § 14 рубр. 4 (стр. 116) мы упоминали о доказательстве Шмидта, появившемся в журнале Крелля в 1893 г. Ошибка Шмидта заключалась в следующем. Он допустил, что две предельные линии пересекаются в двух точках, не будучи симметричными относительно хорды, соединяющей эти точки. Это, естественно, привело к неправильным выводам.

Теорема 7. Дуга предельной линии определяется своей хордой, или высотой, или основанием.

Что дуга предельной линии определяется хордой дуги, вытекает непосредственно из теоремы 6. Если AC (черт. 178) есть высота предельной дуги AB , то, удвоив ее, получим хорду AA' двойной дуги ABA' . Таким образом, заданием высоты AC определяется двойная дуга ABA' , а вместе с тем и дуга AB . Если дано основание BC , то возьмем пре-

дельную линию, проходящую через точку B и имеющую ось $\vec{BC}$. Перпендикуляр CA к BC встретит эту предельную линию в точке A , т. е. во второй конечной точке дуги BA .

Теорема 8. Все предельные линии конгруэнтны.

Так как при движении плоскости в себе пучок параллелей переходит снова в пучок параллелей, то и ортогональные траектории пучка, т. е. предельные линии, переходят в предельные же линии. Пусть AB и $\tilde{A}\tilde{B}$ будут две предельные линии (черт. 179). Так как предельная линия, с одной стороны, вполне определяется одной своей точкой и проходящей через нее осью, а с другой стороны, при движении плоскости остается предельной линией, то при таком смещении плоскости в себе, при котором точка A будет приведена в $\tilde{A}$, а луч AA' будет совмещен с осью $\tilde{A}\tilde{A}'$, предельная линия AB будет совмещена с предельной линией $\tilde{A}\tilde{B}$.

Таким образом, каждая предельная линия может быть движением плоскости в себе совмещена с каждой другой предельной линией, и притом таким образом, чтобы любая точка первой предельной линии совместилась с любой точкой второй предельной линии. В частности, вторая предельная линия может совпадать с первой; следовательно, предельная линия может быть передвинута так, чтобы она совпала с самой собой, и притом так, чтобы любая ее точка пришла в совмещение с любой другой ее точкой. Можно сказать, что предельная линия допускает скольжение по самой себе. Предельная линия есть линия постоянной кривизны в смысле определения, данного в § 31, рубр. 1 (стр. 244).

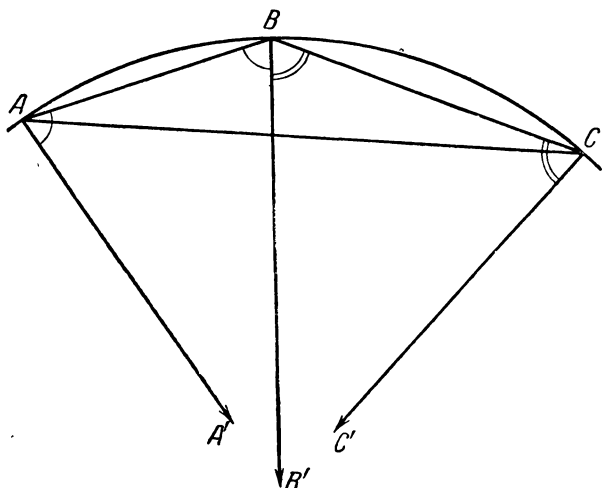
Теорема 9. Большей дуге предельной линии отвечает большая хорда и большая высота.

Доказательство. Обе дуги мы можем считать сведенными к общему началу. Если дуга AC больше дуги AB (черт. 180), AA' , BB' , CC' — соответствующие оси, то $\angle B'BC = \angle BCC'$ больше $\angle BCA$; поэтому $\angle ABC$ больше $\angle BCA$ и $AC > AB$. Если удвоим дугу, то хордой удвоенной дуги будет служить удвоенная высота данной дуги; поэтому большей дуге отвечает и большая высота.

4. Предельная линия как окружность с бесконечно удаленным центром. В евклидовой геометрии предельной линией служит прямая. Представим себе окружность, к ней касательную AB (черт. 181), нормаль AO и на ней центр окружности O . На окружности отложим дугу AL опре-

деленной длины l . Простой расчет показывает, что в евклидовой плоскости расстояние LM точки L от касательной AB стремится к нулю, когда радиус AO неограниченно возрастает, а l сохраняет постоянное значение. В этом смысле говорят, что в евклидовой плоскости окружность неограниченно приближается к прямой, когда радиус ее беспрестанно возрастает. Это можно представить себе и так:

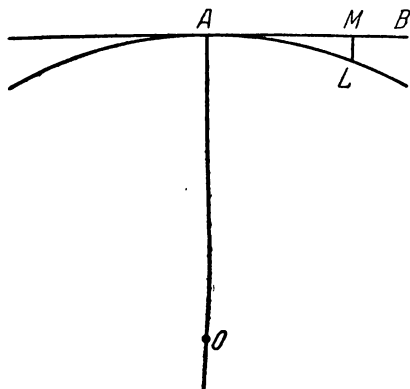
с увеличением радиуса ориентированные прямые, идущие от точек дуги AL к центру окружности, приближаются к параллелизму, а ортогональные траектории их—окружности—приближаются к ортогональным траекториям пучка прямых, параллельных AO —к прямым. В гиперболической плоскости с удалением центра по прямой AO прямые, идущие от верхней полуокружности к центру, при неограниченном его удалении по прямой AO также стремят-



Черт. 180.

ся стать параллельными (в гиперболическом значении этого слова) лучу AO . Ортогональная же их траектория—окружность—приближается к ортогональной траектории пучка параллелей—к предельной линии.

Отсюда и название этой кривой—ориккл, предельная круга. Этому придают до некоторой степени наглядное выражение: говорят, что с удалением в бесконечность центра окружности, проходящей через постоянную точку, по диаметру, выходящему из этой точки, окружность переходит в предельную линию. В этом представлении предельная линия как бы есть окружность с бесконечно удаленным центром, или окружность бесконечно большого радиуса. Этим соображениям можно дать более точное количественное выражение; но это можно сделать, только располагая уже средствами для метрических вычислений.



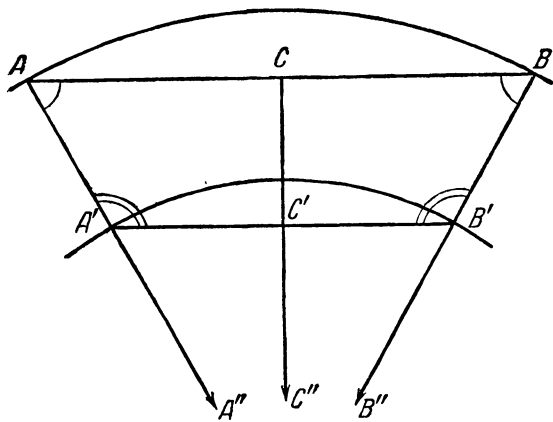
Черт. 181.

5. Параллельные предельные линии. Две предельные линии, имеющие общие оси, называются параллельными.

Теорема 10. Отрезки осей двух параллельных предельных линий, содержащиеся между ними, равны.

В самом деле, пусть AA' и BB' будут отрезки осей двух параллельных предельных линий, содержащиеся между ними (черт. 182). Углы $A'AB$ и $B'BA$ будут равны, как и углы $AA'B'$ и $BB'A'$. Поэтому равны и отрезки AA' и BB' (теорема 2а § 23, стр. 193).

Каждый отрезок оси, содержащийся между двумя параллельными предельными линиями (или его длина), называется нормальным расстоянием между ними.

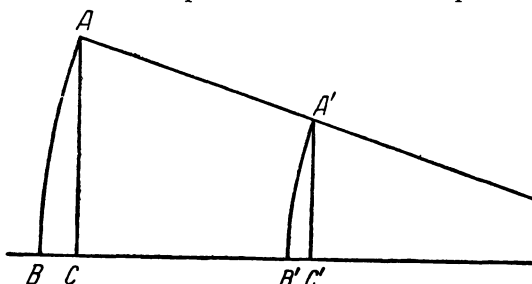


Черт. 182.

Дуги двух параллельных предельных линий, содержащиеся между теми же двумя осями, называются соответственными и, стягивающие их хорды называются соответственными хордами. Между двумя осями каждого пучка параллелей проходит бесчисленное множество соответственных дуг и хорд.

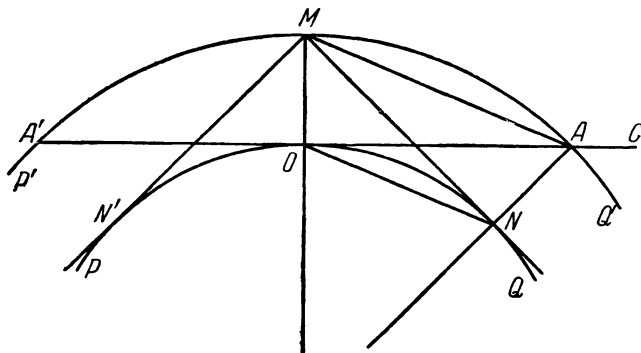
Теорема 11. Середины всех соответственных хорд и дуг, проходящих между двумя осями параллельных предельных линий, лежат на одной прямой, которая к этим хордам перпендикулярна и представляет собой общую ось этих кривых.

В силу теоремы 2 § 23 (стр. 193), это вытекает из предыдущей теоремы; это следует также непосредственно из теоремы 7 § 22, рубр. 3 (стр. 192).



Черт. 183.

Теорема 12. Из соответственных дуг двух параллельных предельных линий та меньше, которая расположена со стороны параллелизма.



В самом деле, так как параллельные оси в сторону параллельности сближаются, то вторая дуга имеет меньшую высоту (черт. 183).

Теорема 13. Из точки, лежащей вне предельной линии, проходят к ней две касательные.

Доказательство. Пусть M будет точка, лежащая вне предельной линии PQ , которую ось MO встречает в точке O (черт. 184). Мы можем считать предельную линию PQ заданной точкой O (началом) и осью MO . Перпендикуляр OG к оси служит касательной к предельной линии.

Пусть M будет точка, лежащая вне предельной линии PQ , которую ось MO встречает в точке O (черт. 184). Мы можем считать предельную линию PQ заданной точкой O (началом) и осью MO . Перпендикуляр OG к оси служит касательной к предельной линии.

Пусть $P'Q'$ будет предельная линия, параллельная PQ и проходящая через точку M ; мы можем ее считать заданной началом M и осью MO . Прямая OG пересекает эту предельную линию в точках A и A' , которые могут быть построены, как указано при доказательстве теоремы 5с (стр. 252). Через точку A проводим прямую AN , параллельную MO , служащую осью обеих предельных линий; она встречается заданную предельную линию в точке N . Треугольники OAN и NMO равны (ON —общая сторона, $NA=OM$, $\angle ONA=\angle NOM$). Поэтому $MN=AO$; $\triangle MAN=\triangle AMO$; угол MNA прямой; прямая MN касается заданной предельной линии в точке N ; другая касательная MN' симметрична ей относительно оси MO .

Доказательство конструктивное и проводится в H_2 ¹⁾.

§ 33. КРИВЫЕ ПОСТОЯННОЙ КРИВИЗНЫ

1. Три типа кривых постоянной кривизны. Результаты последних двух параграфов приводят к следующему выводу. Если под кривой постоянной кривизны разуметь такую линию, которая допускает скольжение по себе самой, то в гиперболической плоскости этим свойством, помимо прямых и окружностей, обладают еще эквидистанты и предельные линии. Эквидистанты отличаются одна от другой значением параметра (h —расстояние от базы); к ним могут быть отнесены и прямые линии, как эквидистанты, соответствующие значению параметра $h=0$. Таким образом, в гиперболической плоскости во всяком случае существует три типа кривых постоянной кривизны: окружности, эквидистанты (относя к ним и прямые) и предельные линии. Существует ∞^1 различных окружностей, как и ∞^1 эквидистант; окружности отличаются одна от другой значением параметра r (радиуса), эквидистанты—значением параметра h (расстояния от базы); все же предельные линии конгруэнтны. Мы покажем ниже, что других кривых постоянной кривизны в гиперболической плоскости не существует; однако предварительно, во избежание путаницы, будем называть кривые этих трех типов **нормальными кривыми постоянной кривизны**.

2. Кривые постоянной кривизны, проходящие через три данные точки. Возвратимся теперь к вопросу, о котором мы говорили в начале третьей главы (§ 17, рубр. 4, стр. 156),—об окружности, проходящей через три точки, не лежащие на одной прямой, т. е. описанной около треугольника. Мы знаем теперь, что в гиперболической плоскости серединные перпендикуляры к сторонам треугольника либо проходят через одну точку, либо имеют общий перпендикуляр, либо параллельны (§ 24, рубр. 2, стр. 201—202). В первом случае вершины треугольника лежат на одной окружности; во втором случае они одинаково удалены от общего перпендикуляра к трем серединным перпендикулярам треугольника, т. е. лежат на эквидистанте, базисная прямая которой перпендикулярна ко всем трем серединным перпендикулярам треугольника; в третьем случае предельная линия, проходящая через одну из вершин и имеющая эти перпендикуляры своими осями, проходит и через две другие вершины треугольника; три вершины лежат на одной предельной линии.

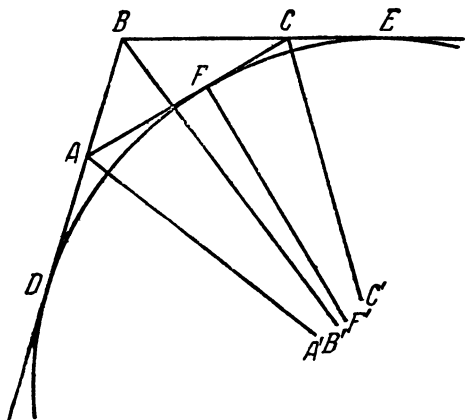
Таким образом, если три точки не лежат на одной прямой, то они всегда лежат на одной и только одной нормальной линии постоянной кривизны. Но если точки лежат на одной прямой, то на эту прямую также

¹⁾ Доказательство заимствовано у Н. М. Несторовича^[1:3].

можно смотреть как на линию постоянной кривизны. Мы приходим, таким образом, к следующей теореме.

Теорема. Через всякие три точки плоскости проходит одна и только одна нормальная кривая постоянной кривизны.

3. Кривые постоянной кривизны, касающиеся трех прямых. Теорема евклидовой геометрии, согласно которой около каждого треугольника можно описать окружность, в гиперболической плоскости существенно модифицируется; посмотрим теперь, как обстоит вопрос об окружностях, которые касаются трех прямых, образующих треугольник. Как известно, в евклидовой плоскости всегда существует окружность, вписанная в треугольник, и три окружности, каждая из которых касается одной



Черт. 185.

стороны треугольника и продолжений двух других его сторон; центры этих окружностей лежат в соответствующих точках пересечения биссектрис одного внутреннего и двух внешних углов треугольника. В гиперболической плоскости и это обстоит иначе. Вопрос в пересечении биссектрис с обстоятельно разобран в § 24, рубр. 1 (стр. 199—201). Биссектрисы внутренних углов треугольника всегда пересекаются в одной точке, которая служит центром окружности, вписанной в треугольник. Биссектрисы же двух внешних углов и третьего внутреннего угла треугольника либо пересекаются в одной

точке, либо имеют общий перпендикуляр, либо параллельны (всегда образуют пучок). В первом случае точка пересечения этих биссектрис служит центром вневписанной окружности; во втором случае общий перпендикуляр отстоит на равные расстояния от прямых, образующих треугольник; он служит базой эквидистанты, касающейся одной стороны треугольника и продолжений двух других сторон (кривая проходит через точки H , K , M на черт. 120, стр. 200). В третьем случае, когда биссектрисы AA' и CC' внешних углов DAC и ECA и биссектриса BB' внутреннего угла параллельны (черт. 185), отложим на AC отрезок параллельности (AF), соответствующий углу $A'AF$. Перпендикуляр FF' к AC будет параллелен всем трем биссектрисам, точка F будет поэтому лежать между A и C . Если на продолжениях AD и CF сторон BA и BC треугольника отложим отрезки $AD = AF$ и $CE = CF$, то предельная линия, имеющая перпендикуляр FF' осью и проходящая через точку F , по симметрии пройдет также через точки D и E и в точках F , D и E коснется стороны AC треугольника и продолжений двух других сторон. В этом случае существует, таким образом, вневписанная предельная линия.

Таким образом, в гиперболической плоскости всегда существует вписанная окружность, а каждой стороне и продолжениям двух других сторон отвечает вневписанная нормальная линия постоянной кривизны; при этом различным сторонам треугольника могут соответствовать вневписанные кривые различных типов.

4. Измерение прямолинейных отрезков. Обращаясь к измерению дуг кривых постоянной кривизны, возвратимся сначала к измерению прямолинейных отрезков. Измерение отрезков прямой заключается в том, что каждому отрезку относим арифметическое (положительное) число, и притом так, чтобы выполнялись следующие два условия: 1) равным (конгруэнтным) отрезкам всегда должно соответствовать одно и то же число, 2) отрезку, составленному из двух отрезков (представляющему собой сумму двух отрезков), должно соответствовать число, равное сумме тех чисел, которые отнесены составляющим отрезкам. При выполнении этих условий число, отнесенное к отрезку, составленному из какого угодно (конечного) числа отрезков, будет равно сумме тех чисел, которые отнесены составляющим отрезкам. Самое установление этих чисел выполняется таким образом, что какой-либо отрезок a «принимается за единицу» (ему относят число 1), всякому же другому отрезку b относим число, равное его отношению к отрезку a ; отношение же одного отрезка к другому устанавливается алгоритмом Евклида (последовательным делением), который всегда осуществим, поскольку выполняется аксиома Архимеда¹⁾. Число, отнесенное к отрезку, называется его *д л и н о й*. Если изменить единицу длины, т. е. вместо отрезка a за единицу принять другой отрезок a' , то длины всех отрезков изменяются пропорционально, именно приобретут множитель, равный отношению отрезка a к a' . Этот процесс однозначен в том смысле, что при установленной единице длины число, отнесенное к каждому отрезку (длина отрезка), необходимо совпадает с его отношением к единичному отрезку. Заметим, наконец, что ввиду конгруэнтности всех прямых, на них может быть выбрана общая единица меры длины; таким образом, может быть установлено единообразное измерение длин прямолинейных отрезков. За длину ломаной линии принимается сумма длин составляющих ее отрезков.

5. Измерение дуг окружности. Для измерения дуг кривых линий приходится пользоваться не приемом Евклида, а методом Архимеда. В дугу вписывают ломаную линию, неограниченно увеличивая число ее сторон и неограниченно уменьшая самые стороны. Если при этом длина ломаной стремится к пределу, не зависящему от того, как мы этот процесс выполняем, то дуга считается «спрямляемой», а этот предел принимается за ее длину. Очень важно, что при этих условиях отношение длины дуги к длине хорды стремится к единице, когда та и другая неограниченно убывают. Тот же прием получает применение и на гиперболической плоскости. Однако по отношению к кривым постоянной кривизны измерение длины можно выполнять двояко—алгоритмом Евклида и

¹⁾ О разыскании отношения и измерении прямолинейных отрезков уже была речь выше (§ 9, рубр. 3, стр. 86). Обстоятельное же изложение этого вопроса найдет себе место во второй части настоящего сочинения. Отметим только следующее. Если отрезок a содержится в отрезке b m раз, остаток a_1 содержится в a m_1 раз и т. д.,

то непрерывная дробь $m + \frac{1}{m_1 + \frac{1}{m_2 + \dots}}$, конечная или бесконечная, выражает отно-

шение отрезка b к a . Этот процесс не требует непрерывности прямой; он предполагает только возможность отложения одного отрезка на другом и аксиому Архимеда. Отметим еще, что числа, выражающие отрезки в угловой мере (см. § 20, стр. 179) не могут быть рассматриваемы как измеряющие прямолинейные отрезки потому, что требованию аддитивности они не удовлетворяют (т. е. число, выражающее в угловой мере сумму двух отрезков, не равно сумме чисел, выражающих слагаемые отрезки); об аддитивности измеряющих чисел нам придется еще не раз говорить.

приемом Архимеда. Ввиду важности этого вопроса остановимся на нем подробнее. Мы будем при этом исходить из тех же допущений, на которых здесь строится гиперболическая геометрия.

Начнем с измерения дуг окружности; это в гиперболической геометрии выполняется так же, как и в евклидовой геометрии. Именно, совершенно так же, как и в евклидовой геометрии, доказываем, что дуги одной окружности пропорциональны углам, которые они стягивают в центре. Лучше всего это выполнить, следуя евклидовой теории пропорций. Обе дуги сводим к общему началу; затем одну дугу повторяем m раз, другую n раз; вместе с тем автоматически угол, соответствующий первой дуге, будет повторен m раз, угол, соответствующий второй дуге, будет повторен n раз. Если m -кратная первая дуга окажется большей, равной или меньшей n -кратной второй дуги, то соответственно m -кратно повторенный первый угол будет больше, равен или меньше n -кратно повторенного второго угла; поэтому отношение дуг равно отношению углов. Численно отношение одной дуги к другой, как и отношение соответствующих углов, определяется алгоритмом Евклида.

На каждой окружности мы можем взять произвольную дугу за единицу меры, и тогда отношение к ней любой другой дуги будет выражать длину этой дуги в принятой единице меры. Но выбор единиц на различных окружностях может быть выполнен согласованно и притом двумя различными способами. Можно выбрать определенный угол (например, прямой угол или определенную его часть) и на каждой окружности принять за единицу меры дугу, соответствующую этому углу; при таком выборе единицы дуги, соответствующие одному и тому же центральному углу, будут выражаться одним и тем же числом; это — угловой способ измерения дуг окружности.

Тем же числом, которым при этом выражается дуга, можно в порядке измерения углов выразить и соответствующий центральный угол; это — дуговой способ измерения углов; такой характер имеет выражение углов в градусах (прямой угол, как и четверть окружности, выражается числом 90) или в радианах (прямой угол и четверть окружности выражаются числом $\frac{\pi}{2}$). Угловой способ измерения дуг окружности и дуговой способ измерения углов совпадают.

Так как этот способ основан на евклидовой теории пропорций и пользуется алгоритмом Евклида — последовательным делением, — то на него можно смотреть как на евклидов метод «измерения дуг».

Но, следуя Архимеду, можно идти и другим путем. Можно вписать в дугу произвольную ломаную, проще всего — правильный многоугольник с 2^n сторонами; это всегда возможно в принятых условиях, так как каждая дуга окружности имеет середину. Когда n неограниченно возрастает, длина ломаной стремится к определенному значению, которое и принимается за длину дуги. Этот способ измерения длины дуги называется линейным; это — архимедов метод измерения дуг окружности; на одной и той же окружности числа, измеряющие дуги в одной и в другой системе, пропорциональны. Это основано на том, что числа, измеряющие дуги, как бы мы их ни установили в согласии с сформулированными выше требованиями, предъявляемыми к измерению, всегда пропорциональны, зависят только от принятой единицы меры.

Однако есть все же существенная разница между тем, что при двояком измерении дуг окружности имеет место в евклидовой и в гиперболической геометрии; она заключается в следующем. В евклидовой геометрии длины l_1 и l_2 дуг, принадлежащих окружностям различных радиусов,

но соответствующих одному и тому же центральному углу α , пропорциональны радиусам:

$$\frac{l_2}{l_1} = \frac{r_2}{r_1} \text{ или } \frac{l_2}{r_2} = \frac{l_1}{r_1}. \quad (1)$$

С изменением же угла α отношение $\left(\frac{l}{r}\right)$ меняется пропорционально углу

$$\frac{l}{r} = \omega \alpha, \text{ или } \frac{l}{\alpha} = \omega r, \quad (2)$$

где коэффициент ω зависит только от выбора единицы угла; при надлежащем выборе единицы угла (радиан) этот коэффициент равен единице. Во всяком случае в евклидовой геометрии отношение длины дуги окружности к числу, измеряющему соответствующий ей центральный угол, пропорционально радиусу; в гиперболической же геометрии это не имеет места: отношение $\frac{l}{\alpha}$ представляет собой функцию от радиуса, которую мы ниже установим (§ 39, рубр. 1, стр. 311).

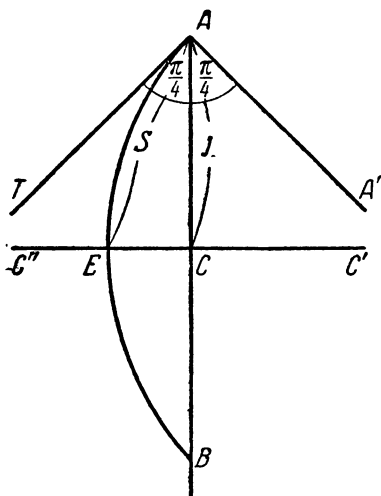
6. Измерение дуг эквидистанты. Обращаясь к измерению дуг эквидистанты, заметим прежде всего следующее. Если плоскость перемещается в себе так, что база эквидистанты скользит по себе, то и эквидистанта скользит по самой себе; равным дугам, пройденным точкой по эквидистанте, отвечают равные отрезки на базе. Откладывая отрезок базы на другом отрезке, мы тем самым откладываем одну на другой соответствующие дуги эквидистанты; аксиома Архимеда, таким образом, осуществляется. Алгоритм Евклида не только выполним, но и дает для отношения дуг эквидистанты то же значение, что и для соответствующих отрезков базы. На эквидистанте, таким образом, устанавливается измерение дуг, но при произвольном выборе единичной дуги на каждой из них.

Две различные эквидистанты могут быть приведены в такое положение, что их базы совпадут. Соответственно этому будем рассматривать параллельные эквидистанты, т. е. имеющие общую базу, а потому и общие оси (перпендикуляры к базе). Дуги параллельных эквидистант мы будем считать соответственными, если они имеют общую проекцию на базу, т. е. содержатся между теми же осями. Выбрав единицу длины на прямой, будем на каждой эквидистанте принимать за единицу ту дугу, которой соответствует единичный отрезок на базе. При этих условиях каждая дуга эквидистанты будет выражаться тем же числом, что и ее проекция на базу. Это—евклидов метод измерения дуг эквидистанты, он соответствует угловому измерению дуг окружности.

Но измерение дуг эквидистанты можно производить и по методу Архимеда. При наших допущениях каждая дуга эквидистанты имеет середину: если восстановить перпендикуляр к базе из середины отрезка, на который проектируется дуга, то он пересечет эквидистанту в середине дуги. Мы можем поэтому вписать в эквидистанту правильную ломаную с 2^n сторонами. Когда n неограниченно возрастает, длина этой ломаной стремится к определенному пределу (это можно доказать так же, как и в случае дуги окружности), и этот предел, на общих основаниях, принимается за длину дуги. При этом, однако, отношение длины дуги эквидистанты к соответствующему отрезку базы на той же эквидистанте не зависит от длины этой дуги; но при переходе от одной эквидистанты к другой

оно представляет собой функцию от параметра h ; эту функцию, которую мы в § 31, рубр. 4 (стр. 247) обозначили через $\varphi(h)$, нам еще предстоит разыскать.

7. Основная дуга предельной линии. Обращаясь к измерению дуг предельной линии, мы зафиксируем некоторую дугу, которая при этом измерении чаще всего принимается за единицу. С этой целью заметим следующее. Дуга предельной линии явно вполне определяется углом, под которым она пересекает свою хорду, иначе говоря, углом, который ее хорда AB образует с касательной AT (черт. 186) или с осью AA' . Особенно важную роль играет дуга, хорда которой делит прямой угол TAA' (между касательной и осью в точке A) пополам, т. е. образует угол $\frac{\pi}{4}$ как



Черт. 186.

с касательной AT , так и с осью AA' . Таковую дугу мы будем всегда обозначать через $2S$. Дуга S , как мы увидим, играет особенно важную роль в построениях и вычислениях гиперболической геометрии. Если C есть середина хорды этой дуги, то перпендикуляр к ней CC' есть ось предельной линии; иначе говоря, прямая $\vec{CC'}$ параллельна $\vec{AA'}$. Следовательно, AC есть отрезок параллельности, соответствующий углу $\frac{\pi}{4}$; мы уже отметили

это выше и условились обозначать этот отрезок через J , а длину его через j (глава III, стр. 179). Вследствие этого луч CC'' , составляющий продолжение луча CC' , параллелен AT . Прямая $C''C'$ есть заградительная прямая для сторон прямого угла TAA' .

Это приводит к следующему правилу для построения и распознавания дуги S . В прямом угле $A'AT$ строим предельную линию, касающуюся стороны AT в точке A и, следовательно, имеющую другую сторону AA' своей осью. Проводим заградительную линию $C''C'$ этого угла. Она в одну сторону (CC') будет параллельна оси предельной линии AA' , а в другую сторону (CC'')—параллельна касательной AT . Дуга AE предельной линии от точки A до ее пересечения с заградительной прямой в точке E и есть S .

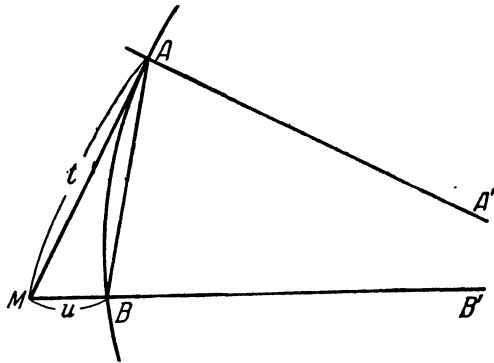
Заметим, что все эти определения и выводы выполнены в плоскости H_2 .

8. Тангенциальное и нормальное протяжения предельной дуги. В тесной связи с этим находится понятие о нормальном и тангенциальном протяжении предельной дуги. Из точки M на касательной AM предельной линии (черт. 187) мы проведем ось MB' , которая встречает предельную линию в точке B . Расстояние MA будем называть тангенциальным, а MB —нормальным расстоянием точки M от предельной линии. Подойдем к тому же чертежу при несколько ином построении. Именно, будем исходить от предельной дуги AB и из одного ее конца A проведем касательную AM , а из другого B —ось BB' . Если эти две прямые пересекаются в точке M , то MA будем называть тан-

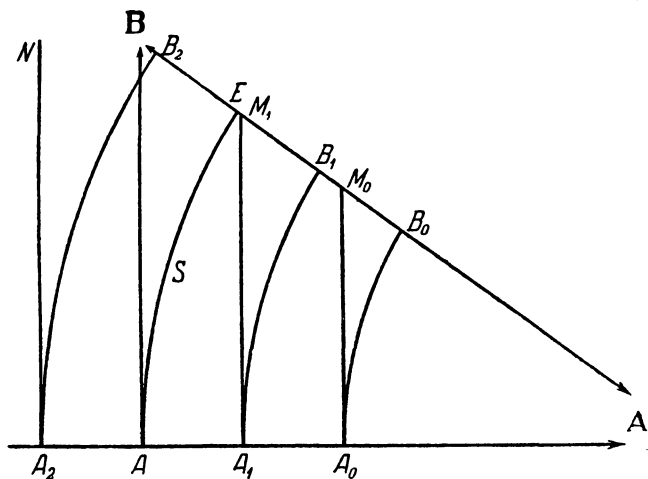
генциальным протяжением дуги AB , а MB —ее нормальным протяжением¹⁾. Вопрос, прежде всего, заключается в том, для всякой ли отдельной дуги существует нормальное и тангенциальное протяжения.

Обращаясь к чертежу 186, мы видим, что это не так: уже для дуги S точка M явно уходит в бесконечность, и отрезки AM и MB не существуют. Важно поэтому установить, для какой дуги может быть речь о тангенциальном и нормальном ее протяжении.

Вопрос решается очень просто. В прямом угле AAB (черт. 188) проведем заградительную прямую AB . Предельная дуга AE , имеющая прямую AB касательной и идущая до заградительной прямой, есть дуга S . Из точки A_0 на луче AA проведем предельную дугу A_0B_0 , параллельную AE . Если теперь из точки A_0 проведем касательную к дуге A_0B_0 , то она явно пересечет заградительную прямую в точке M_0 ; M_0A_0 будет тангенциальным, а M_0B_0 —нормальным протяжением дуги A_0B_0 . Когда исходная точка отодвигается по направлению к точке A , то отрезки M_1A_1 и M_1B_1 возрастают и при совпадении с A обращаются в бесконеч-



Черт. 187.



Черт. 188.

ность. При дальнейшем удалении исходной точки по другую сторону от точки A перпендикуляр A_2N уже заградительной прямой не встречает,—точки M в этом случае не существует. Мы приходим, таким образом, к следующему результату.

Теорема 1. Нормальное и тангенциальное протяжения имеет только предельная дуга, меньшая, чем S .

¹⁾ Лобачевский пользуется этими отрезками и их длинами, не присваивая им специальных наименований (см. «Новые начала геометрии» [64], ст. 137, черт. 132 и «Геометрические исследования» [38], черт. 30).

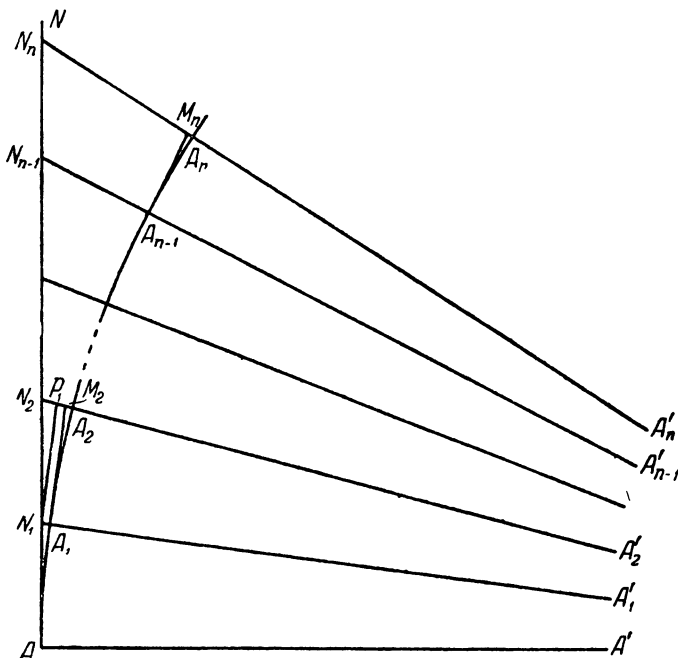
К этому нужно еще присоединить следующее замечание. Угол ABM на чертеже 187 явно тупой. Поэтому $MA > MB$. Отметим это.

Теорема 2. Тангенциальное протяжение предельной дуги всегда больше ее нормального протяжения.

Совершенно ясно, что при существовании нормального и тангенциального протяжений предельной дуги AB они не зависят от того, проведена ли касательная из точки A , а нормаль из точки B , или наоборот.

Следуя Либману [88] и Успенскому [111], будем обозначать тангенциальное протяжение MA дуги AB через t , а нормальное — через u ; таким образом, всегда $t > u$.

9. Измерение предельной дуги. Чтобы было возможно производить измерение предельных дуг алгоритмом Евклида, необходимо, чтобы одну предельную дугу можно было откладывать на другой и чтобы



Черт. 189.

при этом оставался в силе постулат Архимеда. Первое требование явно соблюдается, потому что предельная дуга может скользить по линии, которой она принадлежит, и при этом ее начало может быть приложено в любую другую точку этой линии. Второе требование также выполняется, но это нуждается в доказательстве. Приведем это доказательство, следуя Успенскому. Оно основано на следующей лемме.

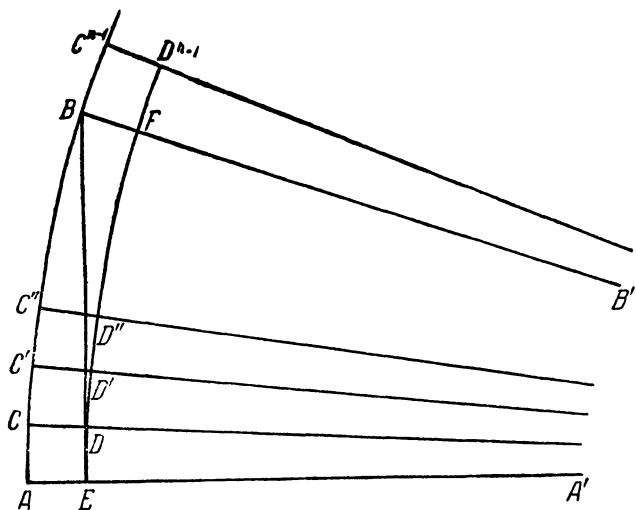
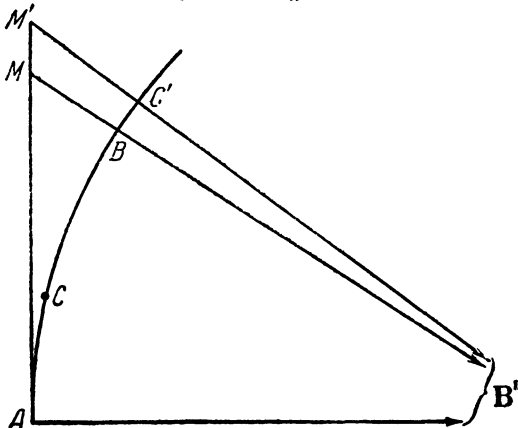
Лемма. Когда предельная дуга возрастает в арифметической прогрессии, то ее тангенциальное протяжение (пока таковое существует) возрастает быстрее, чем в арифметической прогрессии.

Иными словами, если AB есть предельная дуга, имеющая тангенциальное протяжение t , и $n \cdot AB < S$ (n — целое число), то тангенциальное протяжение ($\tilde{t}$) дуги $n \cdot AB$ превышает nt ($\tilde{t} > nt$). Чтобы это доказать, отложим на предельной линии последовательно n равных дуг

$AA_1 = A_1A_2 = A_2A_3 = \dots = A_{n-1}A_n = AB$ (черт. 189) и допустим, что мы получим при этом предельную дугу $AA_n = n \cdot AB$, меньшую S . Тогда касательная AN к этой дуге в точке A и нормаль $A_nA'_n$ в точке A_n пересекаются в некоторой точке N_n . На отрезок AN_n спроектируем продолжениями осей $A_1A'_1, A_2A'_2, \dots, A_{n-1}A'_{n-1}$ точки $A_1, A_2, A_3, \dots, A_{n-1}$ и покажем, что каждая из проекций $N_1N_2, N_2N_3, \dots, N_{n-1}N_n$ больше тангенциального протяжения t каждой из откладываемых дуг. Для этого в точках $A_1, A_2, A_3, \dots, A_{n-1}$ проведем касательные к предельной до их пересечения с продолжениями следующих осей в точках $M_2, M_3, \dots, M_n$; каждый из отрезков $A_1M_2, A_2M_3, \dots, A_{n-1}M_n$ равен t .

Угол A_1N_1A (как угол параллельности) острый; поэтому угол $A_1N_1N_2$ тупой. Если из точки N_1 восставим перпендикуляр N_1P_1 к N_1A_1 , то он войдет внутрь угла $A_1N_1N_2$ и выйдет из четырехугольника $N_2N_1A_1M_2$ через точку P_1 на стороне M_2N_2 . Угол N_1PN_2 , как и угол $A_1M_2P_1$, тупой; поэтому (по третьей основной теореме) $N_1P_1 > A_1M_2$ и $N_1N_2 > N_1P_1$; следовательно, $N_1N_2 > A_1M_2$, т. е. $N_1N_2 > t$. Таким же образом докажем, что каждый из отрезков $N_2N_3, \dots, N_{n-1}N_n$ больше t , а поэтому $AN_n > nt$.

Черт. 190.



Черт. 191.

nt было больше AM , и отложим дугу AC на AB n раз. Если бы $n \cdot AC$ оказалось равно или больше S , то подавно было бы $n \cdot AC > AB$ (поскольку $AB < S$). Если бы оказалось, что $AC' = n \cdot AC$ все еще меньше S , то тангенциальное протяжение (AM') этой дуги в силу нашей леммы было бы больше nt и потому больше AM . Точка M' лежала бы за точкой M , а вместе с тем точка C' — за точкой B . Иначе говоря, в этом случае

Теперь обратимся к существу доказываемого предложения. Пусть AB — предельная дуга, $AC < AB$ (черт. 190); покажем, что существует такое целое число n , что $n \cdot AC > AB$. Предварительно мы все еще предполагаем, что $AB < S$; AM — тангенциальное, MB — нормальное протяжение дуги AB .

Пусть t будет тангенциальное протяжение дуги AC ; выберем целое число n настолько большим, чтобы

$n \cdot AC > AB$. Итак, если дуга AB меньше S , то, какова бы ни была меньшая дуга AC , всегда существует такое число n , что $n \cdot AC > AB$.

Остается рассмотреть случай, когда $AB \geq S$ (черт. 191). Опустим из конца дуги B перпендикуляр BE на ось AA' и через точку E проведем предельную линию, параллельную AB ; она встретит ось BB' в точке F , причем дуга EF (имея тангенциальное протяжение BE и нормальное BF) неизбежно меньше S . Спроектируем дугу AC осью предельных линий на EF , получим дугу ED . Согласно показанному выше, существует такое целое число n , что $n \cdot ED > EF$. Отложим дугу ED на предельной линии EF n раз. Проектируя отложенные дуги $ED, DD', D'D'', \dots$ обратно на AB , получим равные дуги $AC = CC' = \dots$ и дугу $AC^{n-1} = n \cdot AC$, превышающую AB .

Итак, на предельной линии всегда выполняется постулат Архимеда. Отношение двух предельных дуг может быть, таким образом, установлено методом Евклида; этим путем может быть установлено число, измеряющее каждую дугу при принятой единице меры.

С другой стороны, каждая предельная дуга имеет середину. Вписав в нее правильную ломаную линию (начиная, например, с двух сторон), можно неограниченно удваивать число ее сторон и таким образом установить меру длины дуги способом Архимеда. Это приводит к согласованию единиц длины на прямой и на предельной линии; отношение длины дуги к длине хорды стремится к единице, когда хорда и стягиваемая ею дуга неограниченно убывают.

Лобачевский чаще всего принимает за единицу длины дугу S ; мы увидим, что это действительно приводит к упрощению формул. Очень существенно, однако, то обстоятельство, что в гиперболической плоскости можно геометрически определить длину, которую естественно принять за единицу меры. Это обстоятельство смущало даже Гаусса; он писал Тауринусу ([70], стр. 187):

«Единственно, что в этой системе противится нашему разуму, это то, что в пространстве, если бы эта система была справедлива, должна была бы существовать некоторая сама по себе определенная (хотя нам и неизвестная) линейная величина. Но мне кажется, что мы, кроме ничего не выражающей словесной мудрости метафизиков, знаем очень мало или даже не знаем ничего о сущности пространства: мы не можем смешивать того, что нам представляется неестественным, с абсолютно невозможным».

Однако на сфере такая «абсолютная» единица длины существует: Большой круг или определенная его часть.

10. Типы кривых постоянной кривизны. Мы покажем теперь, что кроме нормальных кривых постоянной кривизны других не существует. Так как, однако, плоскость, в которой мы оперируем, может не быть непрерывной, то нужно сказать несколько слов о структуре кривых, о которых идет речь. Мы имеем в виду кривые, которые имеют ту же структуру, что и прямая, в следующем смысле этого слова. Из каждой точки C дуги AB можно опустить перпендикуляр на ее хорду AB и таким образом отнести ей точку C' хорды. Мы принимаем и обратное, что каждой точке C' хорды соответствует точка C на дуге, притом только одна, если дуга достаточно мала. Под кривой постоянной кривизны, как установлено в рубр. 1 § 31 (стр. 244), мы разумеем такую кривую, которая может скользить по самой себе и притом так, что каждая ее точка может быть совмещена с любой другой; равным (конгруэнтным)

дугам при этом отвечают равные хорды; середине хорды в указанном выше смысле отвечает середина дуги. По существу, данное рассуждение опирается даже на более узкое требование, именно, чтобы каждой дуге кривой отвечала точка, представляющая ее середину.

Положим теперь, что некоторая кривая постоянной кривизны смещена по самой себе так, чтобы точка A совпадала с точкой A_1 , точка A_1 — с точкой A_2 , ..., точка A_{n-1} — с точкой A_n . Три точки A , A_1 , A_2 лежат, как нам известно (рубрика 2 этого параграфа, стр. 257—258), на одной нормальной кривой постоянной кривизны — на окружности, эквидистанте или предельной линии.

Положим, что точки A , A_1 , A_2 лежат, скажем, на эквидистанте (черт. 192). Это значит, что существует прямая BB_1B_2 — база этой эквидистанты, от которой эти точки отстоят на одно и то же расстояние, так что перпендикуляры AB , A_1B_1 , A_2B_2 равны между собой. Равны также четырехугольники Саккери ABB_1A_1 и $A_1B_1B_2A_2$, поскольку равны их верхние основания и боковые стороны; равны поэтому и средние линии C_1D_1 и C_2D_2 . Сдвинем теперь вновь нашу кривую так, чтобы точки A , A_1 и A_2 совпали соответственно с точками A_1 , A_2 , A_3 . Вместе с этим хорды AA_1 и A_1A_2 совместятся соответственно с хордами A_1A_2 и A_2A_3 , перпендикуляры C_1D_1 и C_2D_2 — с соответствующими перпендикулярами C_2D_2 и C_3D_3 , а общий их перпендикуляр D_1D_2 — с общим перпендикуляром D_2D_3 к прямым C_2D_2 и C_3D_3 . Иначе говоря, смещение произойдет так, что прямая BB_1B_2 передвинется по самой себе и точка A_3 будет от нее отстоять на расстояние A_3B_3 , равное расстояниям $AB = A_1B_1 = A_2B_2$. Таким же образом $A_4B_4 = A_3B_3$, $A_5B_5 = A_4B_4$...

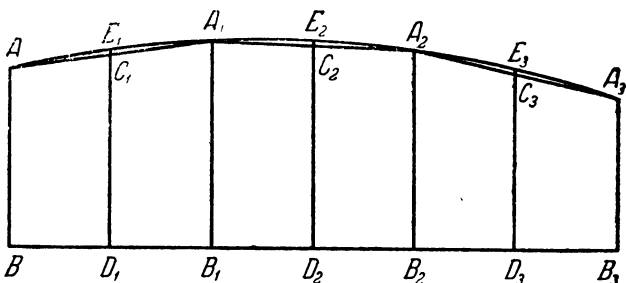
Вывод заключается в следующем. Если дуги $\widehat{AA_1}$, $\widehat{A_1A_2}$, $\widehat{A_2A_3}$, $\widehat{A_3A_4}$, ... нашей кривой постоянной кривизны равны, то точки A , A_1 , A_2 , A_3 , ... в рассматриваемом случае расположены на эквидистанте, базой которой служит прямая $BB_1B_2B_3B_4$, ...

Пусть теперь E_1 , E_2 , E_3 , ... — середины дуг $\widehat{AA_1}$, $\widehat{A_1A_2}$, $\widehat{A_2A_3}$, ... Тогда равны между собой дуги

$$\widehat{AE_1} = \widehat{E_1A_1} = \widehat{A_1E_2} = \widehat{E_2A_2} = \widehat{A_2E_3} = \dots;$$

следовательно, точки A , E_1 , A_1 , E_2 , A_2 , E_3 , A_3 , ... расположены на одной эквидистанте; а так как эквидистанта вполне определяется тремя точками, то это — та же эквидистанта, на которой лежат точки A_1 , A_2 , A_3 , A_4 , ... По тем же соображениям на этой эквидистанте лежат также середины дуг $\widehat{AE_1}$, $\widehat{E_1A_1}$, $\widehat{A_1E_2}$, $\widehat{E_2A_2}$, ... Таким образом, на нашей кривой существует всюду плотное множество точек, расположенных на одной эквидистанте.

Положим теперь, что M есть какая-либо точка рассматриваемой кривой. Сколь угодно близко к ней имеется точка эквидистанты. Но отсюда следует, что она и сама принадлежит этой эквидистанте; в самом деле,



Черт. 192.

если бы она на этой эквидистанте не лежала, то существовало бы такое расстояние ε , ближе которого не было бы точек этой эквидистанты.

Таким образом, рассматриваемая кривая постоянной кривизны представляет собой эквидистанту.

Если точки $A, A_1, A_2 \dots$ лежат на одной окружности или на одной предельной линии, то кривая соответственно представляет собой окружность или предельную линию.

Итак, кроме окружностей, эквидистант и предельных линий, на гиперболической плоскости не существует кривых постоянной кривизны. Предложение, установленное в рубрике 2 настоящего параграфа (стр. 258), может быть сформулировано следующим образом: в гиперболической плоскости три различные точки всегда лежат на одной и только одной кривой постоянной кривизны. Это—очень любопытный пример теоремы абсолютной геометрии. Здесь кривые постоянной кривизны иные, нежели в геометрии Евклида, но предложение в этой формулировке остается в силе, как и в евклидовой геометрии.

11. Классификация смещений плоскости в самой себе. Положим, что при некотором смещении плоскости в самой себе точка A перешла в точку A_1 , а точка A_1 — в точку A_2 . Предположим, сначала, что точки A, A_1 и A_2 различны. Согласно теореме, установленной в предыдущей рубрике (собственно говоря, даже раньше—в рубр. 2, стр. 258), эти три точки лежат либо на одной прямой, либо на одной эквидистанте, либо на окружности, либо на предельной линии.

Если эти три точки лежат на одной прямой, то прямая A_1A_2 совпадает с прямой AA_1 , — вся прямая смещается по этой прямой—по самой себе. Две точки, расположенные в плоскости по одну сторону этой прямой, остаются по одну сторону ее после смещения. Поэтому, если B и C суть две точки плоскости, лежащие по разные стороны прямой AA_1 , то полуплоскости AA_1B и AA_1C либо совмещаются каждая с самой собой, либо замещают друг друга. В первом случае каждая эквидистанта с базой AA_1 (каждая ветвь такой эквидистанты) смещается по самой себе; смещение называется переносом плоскости вдоль прямой AA_1 . Во втором случае каждая ветвь такой эквидистанты совмещается с другой ее ветвью. Смещение представляет перенесение плоскости вдоль прямой AA_1 , соединенное с симметрией (симметричным преобразованием, или отражением от этой прямой).

Если три точки лежат на эквидистанте, то база этой эквидистанты, как легко усмотреть, смещается по самой себе; мы находимся в условиях предыдущего случая.

Если точки A_1, A_2, A_3 находятся на одной окружности, то смещение представляет собой вращение вокруг центра этой окружности, которое может быть соединено с отражением от одного из ее диаметров.

Если точки A, A_1, A_2 лежат на предельной линии, то при этом смещении пучок осей этой предельной линии придет в совмещение с самим собой; каждая предельная линия, имеющая эти оси, сместится по самой себе; смещение называется орициклическим.

Обращаемся теперь к случаю, когда точки A, A_1, A_2 не все различны.

Если точка A_1 совпадает с A , то с ней совпадает и точка A_2 ; мы имеем вращение вокруг точки A , которое может сопровождаться отражением от одной из прямых, проходящих через точку A , может даже вырождаться в чистое отражение. Если точка A_2 совпадает с A , то сме-

щение представляет собой отражение от прямой, перпендикулярной к A_1A в середине отрезка AA_1 .

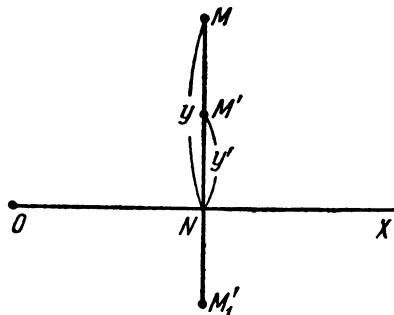
В связи с этим заметим, что три типа смещений плоскости в самой себе можно отличать один от другого также по числу точек, которые смещение оставляет инвариантными (неподвижными). При вращении инвариантной остается одна конечная точка; при орициклическом смещении инвариантной остается одна бесконечно удаленная точка—общая точка ее осей; при перенесении плоскости вдоль прямой инвариантными остаются две бесконечно удаленные точки этой прямой. При отражении плоскости от прямой инвариантными остаются все точки этой прямой. Однако отражение обычно не включают в число «движений» или «смещений» плоскости в себе.

Существенное отличие смещений гиперболической плоскости от смещений евклидовой плоскости в самой себе заключается, во-первых, в том, что при скольжении плоскости по прямой, точки, лежащие вне ее, движутся не по прямым, а по эквидистантам, а во-вторых, в том, что к перенесениям и вращениям присоединяются орициклические движения.

§ 34. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ЛИБМАНА

1. Определение преобразования Либмана. Либман указал очень интересное преобразование гиперболической плоскости. Это преобразование переводит прямые в другие кривые постоянной кривизны; оно часто бывает полезным как при тех или иных выводах, так и, особенно, при геометрических построениях в гиперболической плоскости.

Выберем произвольную прямую OX , которую будем рассматривать как ось преобразования (черт. 193). Пусть M —произвольная точка плоскости. Спроектируем ее на ось в точку N и затем от точки N отложим отрезок NM' , дополнительный к отрезку NM . Мы можем это отложение совершить в одну и в другую сторону. Будем сначала откладывать отрезок NM' в ту же сторону, с которой расположена точка M . Точку M' будем считать соответствующей точке M по отношению к выбранной оси. Таким образом, полуплоскость, лежащая над осью x , будет преобразована в себя самое, как и полуплоскость, лежащая под осью OX . Это и есть преобразование Либмана, отнесенное к оси OX ¹⁾. Если отрезок NM'_1 отложим в противоположную сторону, то полуплоскость OXM преобразуется в полуплоскость, составляющую ее продолжение. В дальнейшем мы будем обычно иметь в виду только преобразования первого рода; преобразования второго вида состояются из преобразований первого рода, сопровождаемых отражением от оси. Ясно, что с удалением точки M от оси точка M' приближается к оси, и наоборот. Если расстояние NM будем обозначать через y , а NM' — через y' , то [(IX), стр. 213]):



Черт. 193.

$$\Pi(y') + \Pi(y) = \frac{\pi}{2}.$$

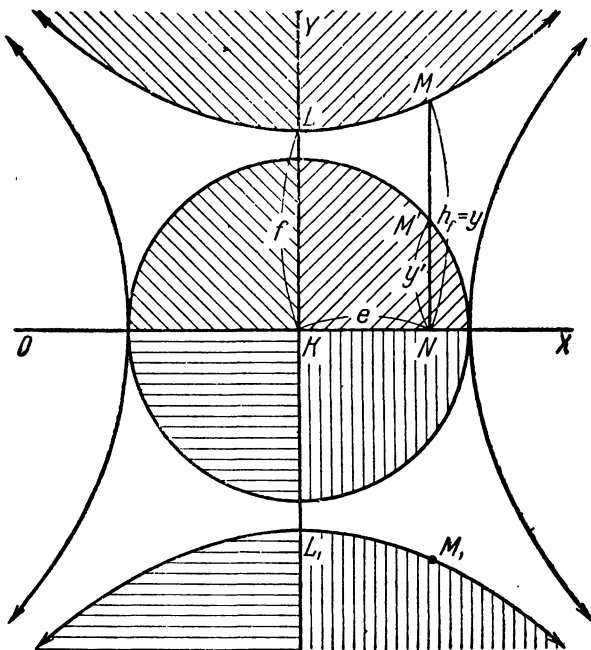
¹⁾ Выбор точки O не имеет значения.

Отсюда следует: если точка M' соответствует точке M , то и, обратно, точка M соответствует точке M' ; преобразование представляет собой инволюцию. Очень любопытно, что это преобразование конформное; но установить это мы сможем только значительно позже. С возрастанием y соответствующее расстояние y' убывает, и обратно. Однако существует такое значение $\tilde{y}$, при котором $\tilde{y}' = \tilde{y}$. Ясно, что это имеет место, когда $\Pi(\tilde{y}) = \frac{\pi}{4}$, т. е. когда

$$\tilde{y} = J \quad (\text{см. стр. 262}).$$

Геометрическое место точек M , совпадающих с M' , представляет собой, таким образом, эквидистанту, параметр которой равен J . Эта эквидистанта разбивает полуплоскость на две части таким образом, что точки, лежащие ниже ее, при преобразовании переходят в точки, лежащие выше ее, и обратно. Каждой же точке оси соответствует бесконечно удаленная точка плоскости.

2. Преобразование прямой, расходящейся с осью. Мы исследуем теперь, в какую линию при этом преобразовании переходит прямая, и начнем с того случая, когда преобразуемая прямая LM расходитсся с осью. Пусть LK (черт. 194)—кратчайшее расстояние прямой



Черт. 194.

LM от оси X (LK —общий к ним перпендикуляр); обозначим его через f . Произвольную точку M прямой LM спроектируем на ось в точку N . Образуется трипрямоугольник $MLKN$ с острым углом при вершине M . Одним из оснований этого трипрямоугольника служит отрезок $LK = f$; другим — отрезок $KN = e$; высотами служат отрезки $MN = h_1$ и $ML = h_2$; линейное значение угла LMN обозначим, как выше, через γ . Согласно схеме (XII₁) (стр. 219), этому трипрямоугольнику соответствует прямо-

угольный треугольник со сторонами

$$a = e, \quad b = \gamma, \quad c = h_e, \quad \alpha = h_f \text{ и } \beta = f'.$$

С другой стороны, согласно схеме (XIII₂) (стр. 222), этому треугольнику соответствует треугольник Δ_8 со сторонами

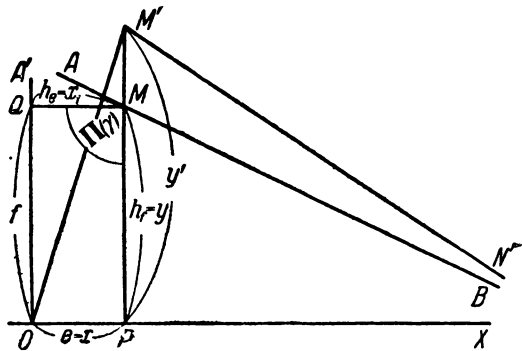
$$a_1 = a = e, \quad b_1 = a' = h_f, \quad c_1 = \beta = f'.$$

Или, иначе, если мы h_f обозначим через y , то $b_1 = y'$. Если поэтому на NM построим точку M' , соответствующую в преобразовании Либмана точке M ; то в прямоугольном треугольнике $KM'N$, в котором катеты как раз равны e и y' , гипотенуза $KM' = f'$. Так как расстояние f имеет постоянное значение, то-есть не зависящее от того, где взята точка M на прямой LM , то мы приходим к следующему результату.

Теорема 1. При преобразовании Либмана прямая, расходящаяся с осью, переходит в полуокружность, центр которой лежит на оси, именно, в ее точке, наименее удаленной от преобразуемой прямой, а радиусом служит отрезок, дополнительный к кратчайшему расстоянию прямой от оси.

Ввиду инволюционного характера преобразования отсюда вытекает также, что полуокружность, имеющая центр на оси, преобразуется в прямую, расходящуюся с осью, причем из центра окружности выходит общий перпендикуляр к оси и к этой прямой.

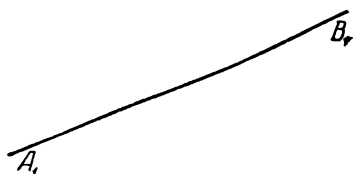
Заметим еще, что преобразование, собственно, можно произвести на обеих полуплоскостях, на которые ось делит нашу плоскость. Если на этой последней возьмем прямую L_1M_1 , симметричную с LM относительно оси, то она при этом перейдет во вторую половину той же окружности. Вся окружность будет служить изображением двух прямых LM и L_1M_1 . На чертеже 194 одинаковой штриховкой показаны части плоскости, переходящие одна в другую. Незаштрихованные части плоскости, расположенные внутри вырожденного четырехугольника, переходят сами в себя. Чертеж сделан в предположении, что $f' < f$. Предоставляем читателю рассмотреть случай, когда $f' > f$.



3. Преобразование прямой, параллельной оси.

Положим, что прямая AB параллельна оси OX (черт. 195); M — произвольная точка на ней, которая при преобразовании Либмана переходит в точку M' . Как очень легко видеть, в этом

случае существует заградительная прямая OA' , перпендикулярная к OX в некоторой точке O и параллельная $\vec{BA}$ (прямая AB , таким образом, служит заградительной прямой угла $A'OX$). Если из точки M опустим перпендикуляр MQ на OA' , а MP есть перпендикуляр к оси OX , на котором лежат точки M и M' , то образуется трипрямоугольник $MPOQ$.



Черт. 195.

в котором основаниями служат отрезки $e = OP = x$ и $f = OQ$, а высотами — $MP = h_f = y$ и $MQ = h_e$, которую мы обозначим через x_1 . Линейное значение острого угла при точке M , по обыкновению, обозначим через γ . По схеме (XII₁) (стр. 219) этому трипрямоугольнику соответствует прямоугольный треугольник со следующими элементами:

$$a = e = x, \quad b = \gamma, \quad c = h_e = x_1, \quad \alpha = h_f = y \quad \text{и} \quad \beta = f'. \quad (1)$$

Этот треугольник, в свою очередь, обуславливает, по схеме (XIII₂) (стр. 222), существование прямоугольного треугольника Δ_s с элементами:

$$a_1 = x, \quad b_1 = y', \quad c_1 = f', \quad \alpha_1 = \gamma' \quad \text{и} \quad \beta_1 = x_1.$$

А так как прямоугольный треугольник вполне определяется своими катетами, то треугольник (1) совпадает с треугольником OPM' .

С другой стороны, так как

$$\angle PMB = \Pi(y), \quad \text{а} \quad \angle QMA = \Pi(x_1),$$

то

$$\Pi(\gamma) = \pi - \Pi(y) - \Pi(x_1).$$

Поэтому

$$\angle OM'P = \Pi(\gamma') = \frac{\pi}{2} - \Pi(\gamma) = \Pi(y) - \frac{\pi}{2} + \Pi(x_1) = \Pi(x_1) - \Pi(y').$$

Через точку M' проведем прямую $M'N'$, параллельную MB ; так как теперь $\angle PM'N' = \Pi(y')$, то

$$\angle OM'N' = OM'P + \Pi(y') = \Pi(x_1) = \Pi(\beta_1) = \angle POM'.$$

Таким образом, OM' есть секущая равного наклона параллелей $\vec{OX}$ и $\vec{M'N'}$; иначе говоря, точка M' лежит на предельной линии, имеющей начало в точке O и ось OX . Так как эта предельная линия вполне определяется точкой O и осью, то при перемещении точки M по прямой AB точка M' перемещается по этой предельной линии. Вместе с тем мы приходим к следующему результату.

Теорема 2. Прямая, параллельная оси, преобразуется в предельную линию, имеющую своей осью ось преобразования, направленную в сторону параллелизма, а началом — ту точку на этой оси, которая служит вершиной прямого угла, заграждаемого параллелью AB .

Вернее, эта параллель преобразуется в одну часть (половину) этой предельной линии. Если мы возьмем параллель A_1B_1 , симметричную AB относительно оси OX , то пара этих параллелей преобразуется во всю предельную линию, и, обратно, предельная линия, имеющая ось преобразования своей осью, преобразуется в две прямые, параллельные оси и симметрично относительно нее расположенные.

4. Преобразование прямой, пересекающей ось. Пусть, наконец, прямая OM пересекает ось OX в точке O (черт. 196). Из произвольной точки M этой прямой опускаем перпендикуляр MP на ось OX . Расстояние OP обозначим через x , а MP — через y . Если M' есть точка, в которую переходит точка M при преобразовании, то $M'P = y'$. Теперь из точки O восстановим перпендикуляр OQ к оси OX и из M' опустим на OQ перпендикуляр $M'Q$. Расстояние $M'Q$ обозначим через x_1 ; это расстояние постараемся рассчитать. С этой целью обратимся к прямоугольному треугольнику MOP , в котором катет OP ($= x$) обозначим через a , катет MP ($= y$) — через b , гипотенузу OM — через c , а линейные значения углов, соответственно, через α и β . Этому треугольнику, по схеме (XIII₂)

(стр. 222), соответствует другой прямоугольный треугольник Δ_8 , в котором $a_1 = a = x$, $b_1 = a'$, $c_1 = \beta$, $\alpha_1 = b' = y'$ и $\beta_1 = c$.

Этому последнему треугольнику, в свою очередь, по схеме (XII₁) (стр. 219), соответствует трипрямоугольник, в котором

$$e = a_1 = x, \quad f = \beta'_1 = c', \quad h_e = c_1 = \beta, \quad h_f = \alpha_1 = b' = y'.$$

Но в трипрямоугольнике $PM'QO$ основание $e = x$, а высота $h_f = y'$. Этими элементами трипрямоугольник определяется. Поэтому в нем $x_1 = h_e = \beta$.

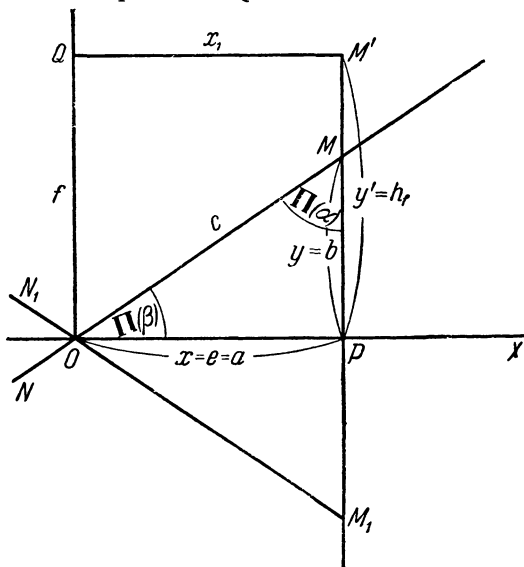
Таким образом, где бы точка M ни лежала на прямой OM , соответствующая ей точка M' отстоит от прямой OQ на одно и то же расстояние $x_1 = \beta$. Иными словами, прямая OM переходит в эквидистанту, имеющую своим базисом прямую OQ , а параметром — β .

Заметим, впрочем, что целую ветвь эквидистанты мы получим только в том случае, если точку M' будем брать как над осью OX , так и под нею, т. е. будем производить двойное преобразование луча OM вверх и вниз от оси OX . Обе ветви эквидистанты получим, если такому же двойному преобразованию подвергнем также луч ON , составляющий продолжение луча OM . Впрочем, можно ограничиться только односторонним преобразованием; но тогда для получения полной эквидистанты нужно вместе со всей прямой OM подвергнуть преобразованию также прямую, симметричную ей относительно оси OX .

Теорема 3. Прямая, пересекающая ось преобразования, переходит в эквидистанту, базисом которой служит перпендикуляр к оси, восстановленный из точки пересечения прямой с осью, а параметром — линейное значение угла, который прямая образует с осью.

5. Геометрические построения, осуществляемые при помощи преобразования Либмана. Мы уже упоминали выше, что преобразование Либмана часто бывает полезно при осуществлении геометрических построений. Имея в виду дать важнейшие примеры, займемся построением касательной к кривой постоянной кривизны из внешней точки. Впрочем, в простейших случаях это построение совершается без помощи преобразования. Так, построение касательной к окружности из внешней точки сводится к построению прямоугольного треугольника, в котором гипотенуза равна расстоянию точки от центра, а катет равен радиусу окружности. Существование такого треугольника и его построение были показаны в § 27, рубр. 3 (стр. 231).

Построение касательной к эквидистанте из внешней точки M (черт. 197) приводится к построению трипрямоугольника $MNQP$ (P — точка касания,



Черт. 196.

прямого угла $M'OQ$. Прямая MP перейдет в эквидистанту ST с базой MN , перпендикулярной к MM' . Если при этом точке P соответствует точка P' , то в этой точке эквидистанта ST касается прямой KL ; поэтому перпендикуляр $P'R$ на базу MN будет общим перпендикуляром расходящихся прямых MN и KL .

Теперь ясно, как построить требуемую касательную. Строим заградительную прямую KL прямого угла $M'OQ$, — она явно расходуется с MN ; строим их общий перпендикуляр RP' и точку P , в которую переходит P' при нашем преобразовании. Это и будет требуемая точка касания той части предельной линии OB , которая лежит внутри угла $M'OQ$, а точка, симметричная относительно оси MM' (на чертеже она не изображена), будет служить второй точкой касания.

6. Условия взаимного пересечения двух окружностей гиперболической плоскости. Для того чтобы две окружности пересекались, необходимо и достаточно, чтобы сумма радиусов была больше расстояния между центрами, а разность радиусов была меньше его:

$$r_1 + r_2 > d \text{ и } r_1 - r_2 < d.$$

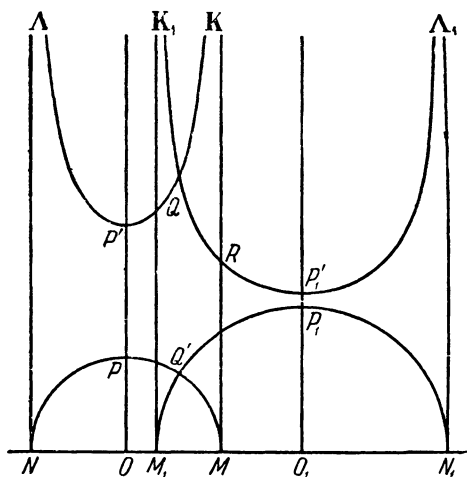
Предложение это принадлежит абсолютной геометрии, и на первый взгляд обычное доказательство этой теоремы, которым пользуются в евклидовой геометрии, применимо и в гиперболической плоскости. Однако это не совсем так. Необходимость этого условия действительно строго доказывается теми же средствами; для доказательства его достаточности требуется более углубленное рассуждение. Впрочем, и в евклидовой геометрии доказательство достаточности сложнее тех рассуждений, которыми оно обычно проводится. Тут возникают те же сомнения, что и при доказательстве первой теоремы «Начал» Евклида (стр. 46—47): молчаливо принимается, что две окружности пересекаются, если одна из них имеет точку внутри и точку вне другой. Если плоскость предполагается непрерывной (т. е. если мы допускаем принцип Дедекинда), то это предположение может быть доказано, но именно опираясь на аксиому непрерывности. Однако в плоскости H_2 , где даже прямая не предполагается непрерывной, доказательство этими средствами провести нельзя; нужны иные пути. Причина этого заключается в том, что мы не имеем прямых критериев относительно пересечения двух окружностей даже в том случае, когда одна из них переходит изнутри другой во вне. При всем том, предположение в плоскости H_2 все же остается справедливым. Доказательство проводится применением преобразования Либмана.

Теорема. Если в плоскости H_2 окружность O радиуса r имеет точку внутри окружности O_1 радиуса r_1 и другую точку вне ее, то окружности пересекаются.

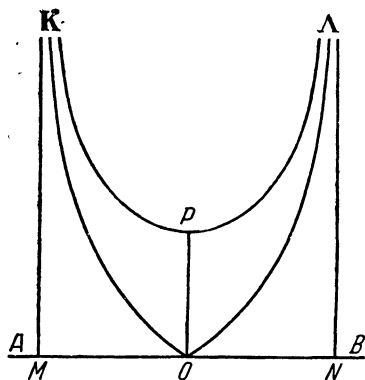
Доказательство. Положим, что прямая OO_1 пересекает окружность O в точках M и N , а окружность O_1 — в точках M_1 и N_1 (черт. 199). Если M есть точка окружности O , ближайшая к O_1 , а N — ее точка, наиболее удаленная от O_1 , то при условиях задания M лежит внутри окружности O_1 а N — вне ее. Точно так же, если M_1 есть ближайшая к O точка окружности O_1 , а N_1 — ее точка, наиболее удаленная от O , то точка M_1 лежит внутри окружности O , а точка N_1 — вне ее. Положим, что $r \leq r_1$. Так как точка M лежит внутри окружности O_1 , а точка N вне ее, то N не может лежать между O_1 и M . Поэтому либо O_1 лежит между M и N , либо M лежит между O_1 и N ; допустим последнее, как это изображено на чертеже 199.

Произведем преобразование плоскости по Либману относительно оси OO_1 . Если P есть конечная точка радиуса окружности O , перпендикулярного к диаметру MN , то полуокружность MPN переходит в прямую $KP'\Delta$, перпендикулярную к OP в точке P' . Так как при этом точка M переходит в бесконечно удаленную точку K прямой $P'K$, то касательная MK к окружности O параллельна $P'K$ ($\overrightarrow{MK} \parallel \overrightarrow{P'K}$). По другую сторону касательная $N\Delta$ к окружности параллельна $P'\Delta$: вся прямая $KP'\Delta$ расположена внутри полосы $KMN\Delta$, асимптотически приближаясь к перпендикулярам MK и $N\Delta$. Таким же образом в точках M_1 и N_1 проведем касательные M_1K_1 , $N_1\Delta_1$ к окружности O_1 ; тогда $M_1\overrightarrow{K_1} \parallel \overrightarrow{P'_1K_1}$, $N_1\overrightarrow{\Delta_1} \parallel \overrightarrow{P'_1\Delta_1}$; прямая $K_1P'_1\Delta_1$ расположена внутри полосы $K_1M_1N_1\Delta_1$.

Луч MK войдет внутрь вырожденного трипрямоугольника $P'_1O_1M_1K_1$ и встретит луч P'_1K_1 в некоторой точке R ; луч же RK_1 , входя внутрь вырожденного трипрямоугольника $KMOP'$, выйдет из него через сторону $P'K$; в самом деле, этот луч, согласно III основной теореме (стр. 180), будет удаляться от MN и, оставаясь внутри



Черт. 199.



Черт. 200.

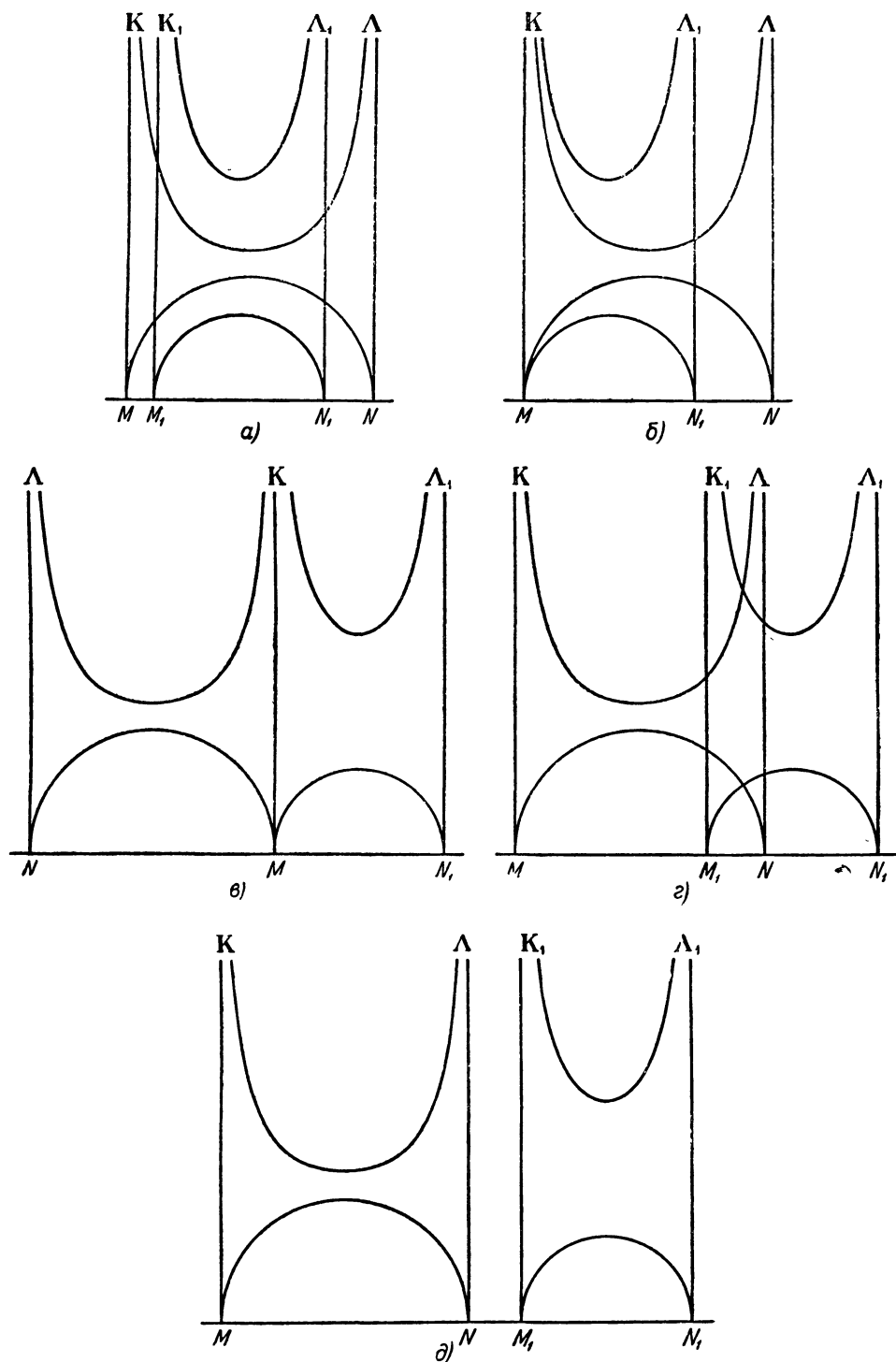
полосы $K_1M_1O_1P'_1$, не встретит ни MM_1 , ни OP' . Пусть Q будет точка встречи лучей P'_1K_1 и $P'K$; соответствующая ей по преобразованию точка Q' служит точкой пересечения полуокружностей $M_1P_1N_1$ и MPN . Вторые полуокружности встретятся в симметричной точке.

Читателя не затруднит рассмотреть случай, когда точка O_1 лежит между точками M и N .

Когда эта теорема доказана, установить условия возможного расположения окружностей O и O_1 уже не представит затруднения; это доказывается так же, как обычно для евклидовой плоскости.

7. Взаимное расположение двух прямых, расходящихся с третьей. Установленное предложение об относительном взаимном расположении двух окружностей приводит к учению об относительном расположении двух прямых, расходящихся с третьей.

Положим, что прямая $K\Delta$ расходуется с прямой AB ; пусть PO — общий их перпендикуляр. Из точки O проведем параллели OK , OL к ориентированным прямым $\overrightarrow{OK}$ и $\overrightarrow{KL}$ (черт. 200). Пусть $OM = ON$ будут отрезки параллельности углов KOM и ΔOM . Если в точках M и N



Черт. 201.

восставим перпендикуляры MK и $N\Delta$ к прямой MN , то они будут параллельны прямой $K\Delta$ в стороны ΔK и $K\Delta$. Мы будем говорить, что $KMN\Delta$ есть полоса, асимптотически содержащая прямую $K\Delta$.

Пусть теперь $K\Delta$ и $K_1\Delta_1$ — две прямые, расходящиеся с прямой $MN (\equiv AB)$ и расположенные по одну сторону ее, $KMN\Delta$ и $K_1M_1N_1\Delta_1$ — полосы, асимптотически их содержащие (см. черт. 201 на стр. 277).

Если одна из этих полос, скажем, $K_1M_1N_1\Delta_1$ содержится внутри другой (черт. 201, а), то мы будем говорить, что прямая $K_1\Delta_1$ относительно MN расположена с внутренней стороны прямой $K\Delta$. Прямые $K\Delta$ и $K_1\Delta_1$ в этом случае не могут иметь общей точки; это можно усмотреть из ближайшего рассмотрения их расположения; но, повидимому, проще всего это доказывается при помощи преобразования Либмана; прямые при этом переходят в полуокружности MN и M_1N_1 , из которых вторая лежит внутри первой и поэтому не может иметь с ней общей точки. Прямые $K\Delta$ и $K_1\Delta_1$ в этом случае явно расходятся; можно говорить, что они имеют внутреннее расхождение. Соответствующие окружности располагаются одна внутри другой.

Если одна полоса расположена в другой, но имеет с ней общую граничную прямую MK (черт. 201, б), то прямые $K\Delta$ и $K_1\Delta_1$ имеют общую бесконечно удаленную точку K ; будем говорить, что они имеют относительно MN внутренний параллелизм. Окружности имеют внутреннее касание.

Если обе полосы имеют общую граничную прямую MK (MK совпадает с M_1K_1), но расположены по разные стороны от нее (черт. 201, в), то будем говорить, что прямые ΔK и Δ_1K имеют относительно MN внешний параллелизм. Окружности имеют внешнее касание.

Если две полосы частично покрывают друг друга (как на черт. 201, г), то прямые $K\Delta$ и $K_1\Delta_1$ пересекаются, потому что пересекаются соответствующие окружности.

Наконец, если полосы расположены относительно MN одна вне другой (как на черт. 201, д), то прямые $K\Delta$ и $K_1\Delta_1$ и в этом случае расходятся, — говорят, что они имеют относительно MN внешнее расхождение. Окружности располагаются одна вне другой.

Предложение об относительном положении окружностей приводит теперь к следующему предложению об относительном положении расходящихся прямых.

Теорема. Если две прямые $K\Delta$ и $K_1\Delta_1$ расходятся с третьей прямой MN , имея с ней общие перпендикуляры OP и O_1P_1 (расстояния $OP = h$, $O_1P_1 = h_1$) и если δ есть длина отрезка OO_1 , то относительное положение этих прямых определяется следующим образом: а) если $\delta < h' - h'_1$, то прямые имеют внутреннее расхождение, б) если $\delta = h' - h'_1$, то они имеют внутренний параллелизм, в) если $h' - h'_1 < \delta < h' + h'_1$, то они пересекаются, г) если $\delta = h' + h'_1$, то они имеют внешний параллелизм, д) если $\delta > h' + h'_1$, то они имеют внешнее расхождение.

(Части неравенств надо брать с положительным знаком.)

Заметим, что это предложение можно доказать независимо, и из него вывести теорему об относительном положении окружностей.

ГЛАВА СЕДЬМАЯ

ТРИГОНОМЕТРИЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОЙ ПЛОСКОСТИ И ИЗМЕРЕНИЕ ПЛОЩАДЕЙ ПРЯМОЛИНЕЙНЫХ ФИГУР

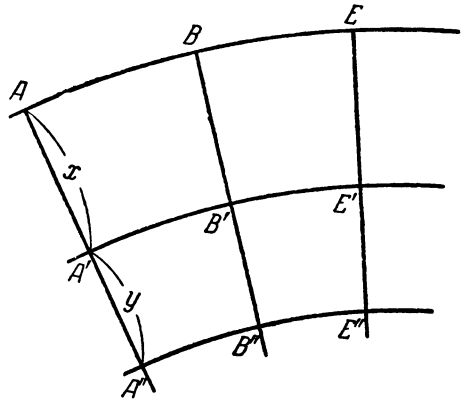
§ 35. ПЕРВОЕ ОСНОВНОЕ МЕТРИЧЕСКОЕ СООТНОШЕНИЕ В ГИПЕРБОЛИЧЕСКОЙ ПЛОСКОСТИ И ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ ПРЯМОУГОЛЬНОГО ТРЕУГОЛЬНИКА

1. Постоянная гиперболической плоскости. Исходное предположение при установлении метрики гиперболической плоскости заключается в следующем.

Теорема 1. Отношение соответственных дуг двух параллельных предельных линий имеет постоянное значение.

Это значит, если AB и $A'B'$ — одна пара соответственных дуг параллельных предельных линий, CD и $C'D'$ — другая пара дуг этих же предельных линий, то

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{CD}{C'D'}. \quad (1)$$



Черт. 202.

Доказательство проводится проще всего при помощи евклидовой теории пропорций. Две дуги мы можем свести к общему началу, т. е. отложить дуги AB и $AE (=CD)$ от общей точки A (черт. 202). Если мы отложим дугу AB по предельной линии m раз и спроектируем отложенные дуги их осями на вторую предельную линию, то на последней механически m раз отложится соответствующая дуга $A'B'$; то же произойдет, если n раз отложим дугу AE . И совершенно ясно, что если $m \cdot AB \geq n \cdot AE$, то соответственно $m \cdot A'B' \geq n \cdot A'E'$.

Поэтому, если, исходя от некоторой определенной предельной линии AB , будем проводить со стороны параллелизма осей другие параллельные предельные линии $A'B'$, $A''B''$, ..., то отношение соответственных дуг $\frac{AB}{A'B'}$, $\frac{AB}{A''B''}$ будет зависеть только от нормального расстояния ($AA' = BB'$ или $AA'' = BB''$) второй предельной линии от первой (исходной). А так как всякая другая предельная линия может быть совмещена с AB , то отношение (1) параллельных предельных дуг зависит только от расстояния x между ними, т. е. представляет собой функцию от x :

$$\frac{AB}{A'B'} = f(x) \quad (AB > A'B'). \quad (2)$$

Этому важному результату дадим следующее выражение.

Теорема 2. Отношение соответственных дуг двух параллельных предельных линий есть функция расстояния между ними.

Эту функцию теперь нетрудно разыскать.

Пусть AB , $A'B'$, $A''B''$ (черт. 202) будут три соответственные предельные дуги, отстоящие одна от другой на расстояния:

$$AA' = x, \quad A'A'' = y.$$

Тогда

$$\frac{AB}{A'B'} = f(x), \quad \frac{A'B'}{A''B''} = f(y), \quad \frac{AB}{A''B''} = f(x+y).$$

Отсюда следует, что функция $f(x)$ удовлетворяет функциональному уравнению

$$f(x+y) = f(x) \cdot f(y). \quad (3)$$

Уже Коши (А. Cauchy) в своем курсе «Математического анализа» показал, что непрерывная функция, удовлетворяющая этому функциональному уравнению, есть показательная функция

$$f(x) = a^x. \quad (4)$$

где a — положительное постоянное число, большее единицы, а x — численное значение (длина) отрезка AA' . Теорема справедлива и в том случае, если функция $f(x)$ монотонно возрастает или убывает с возрастанием x , а это, в силу теоремы 12 § 32 рубр. 5 (стр. 256), в рассматриваемом случае в плоскости H_2 всегда имеет место. Расстояние x мы отсчитываем в сторону убывающих дуг, т. е. считаем $AB > A'B'$; тогда $f(x) > 1$.

Если обозначим натуральный логарифм числа a через λ , то

$$a = e^\lambda, \quad f(x) = e^{\lambda x}. \quad (5)$$

Если $\lambda = 0$, то $f(x)$ сводится к постоянной, именно — к единице; соответственные дуги параллельных предельных линий равны между собой; это возможно только в евклидовой плоскости. В гиперболической плоскости соответственные хорды и дуги убывают в сторону параллелизма. Исключая поэтому евклидову геометрию, мы можем положить $\lambda = \frac{1}{k}$ и получим окончательно:

$$f(x) = e^{\frac{x}{k}}. \quad (6)$$

Число k есть некоторая свойственная гиперболической плоскости постоянная, которую называют постоянной гиперболической плоскости. Заметим, что число k зависит от выбора единицы длины, в которой выражено расстояние x , и с изменением единицы меры изменяется пропорционально ей, поскольку $\frac{x}{k}$ при этом не меняется. О возможном значении этой постоянной будем говорить ниже; здесь заметим только, что с обращением ее в бесконечность геометрия обращается в евклидову, как это отмечают Гаусс ([⁷⁰], стр. 187) и Швейкарт ([⁸¹], стр. 245).

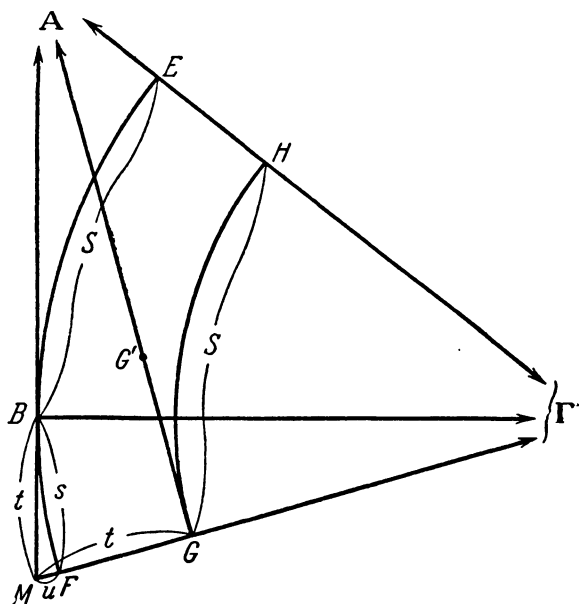
Вместе с тем, если мы обозначим через s и s' длины предельных дуг AB и $A'B'$, содержащиеся между теми же параллелями ($s > s'$), а через x обозначим нормальное расстояние между ними, то

$$s = s' e^{\frac{x}{k}}. \quad (XIV)$$

Уравнение (XIV) рассматривается как первое основное метрическое соотношение в гиперболической плоскости. Оно установлено Лобачевским и опубликовано им в первом же его мемуаре «О началах геометрии».

2. Уравнение, связывающее тангенциальное и нормальное протяжения предельной дуги. Построим (черт. 203) прямой угол $AB\Gamma$ с его заградительной прямой $A\Gamma'$ и предельной дугой $BE = S$ (§ 33, рубр. 7, стр. 262), проходящей между ее осями $B\Gamma'$ и $A\Gamma'$; BA есть касательная к этой дуге. S есть вполне определенная дуга, которая предыдущим построением строго устанавливается; она, конечно, не зависит от того, в какой точке предельной линии мы ее строим. Это — некоторая постоянная дуга в гиперболической плоскости; мы будем ею систематически пользоваться в дальнейших вычислениях и построениях, в ходе которых отчетливо выяснится ее значение.

Дугу $BE(S)$ продолжим за точку B до точки F так, чтобы дуга $BF = s$ была меньше BE . Ось $F\Gamma'$, согласно теореме 1, рубр. 8, § 33 (стр. 263) встретит касательную AB в точке M ; MB есть тангенциальное протяжение t дуги BF , MF — ее нормальное протяжение u ; $t > u$. От точки M отложим по оси $M\Gamma'$ отрезок $MG = MB = t$ и из точки G восставим перпендикуляр GG' в ту



Черт. 203.

сторону, с которой расположены оси $B\Gamma$ и $E\Gamma'$. Так как $M\Gamma \parallel B\Gamma$, то $\angle BMG$ есть $\Pi(t)$; а так как $MG = MB$, то тот же угол можно рассматривать как $\Pi(MG)$, и потому луч GG' , перпендикулярный к MG , параллелен MA (его можно обозначить GA .) Прямая GA будет заградительной также для прямого угла ΓGA , а предельная дуга GH , параллельная $FBE (= S + s)$, также есть S . Расстояние между дугами $F\bar{E}$ и $G\bar{H}$ по оси есть $FG = t - u$.

Формула (XIV) поэтому дает:

$$S + s = Se^{\frac{t-u}{k}}. \quad (7)$$

Теперь вновь возвратимся к прямому углу $AB\Gamma$ с его заградительной прямой $A\Gamma$ и предельной дугой $BE = S$ (черт. 204). На этой дуге отложим ту же дугу $BF = s$, и так как $s < S$, то конец F отложенной дуги упадет между B и E ; проведем ось $F\Gamma$. В силу теоремы 1 рубр. 8 § 33 (стр. 263), продолжение оси $F\Gamma$ встретит касательную BA в некоторой точке M , причем отрезки BM и MF будут иметь те же значения t и u , что и при построении на черт. 203. На продолжении отрезка MF отложим

отрезок $MG = MB = t$ и из точки G восставим перпендикуляр GG' к GF в ту сторону, с которой расположена заградительная прямая AG . Так как $\angle AMG = \angle BMF = \Pi(MB) = \Pi(t) = \Pi(MG)$, то $GG' \parallel MA$ (ее можно обозначить GA); та же прямая AG может быть рассматриваема как заградительная для прямого угла $AG\Gamma$, а предельная дуга GH , параллельная FE , есть S . Расстояние между дугами GH и FE равно $t + u$, а потому уравнение (XIV) дает:

$$S = (S - s) e^{\frac{t+u}{k}}. \quad (8)$$

Оба уравнения (7) и (8), по существу, содержат только отношение $\frac{S}{s}$. Исключая это отношение из этих двух уравнений, получим:

$$e^{\frac{t-u}{k}} + e^{-\frac{t+u}{k}} = 2,$$

или

$$e^{\frac{u}{k}} = \frac{e^{\frac{t}{k}} + e^{-\frac{t}{k}}}{2} = \operatorname{ch} \frac{t}{k}. \quad (\text{XV})$$

Это и есть соотношение между тангенциальным и нормальным протяжениями предельной дуги, которое мы имели в виду вывести.

Лобачевский дает исключительно изящный вывод этого соотношения («Новые начала», ст. 137), основанный на стереометрических соображениях. Планиметрическими средствами это соотношение впервые было установлено Либманом [107].

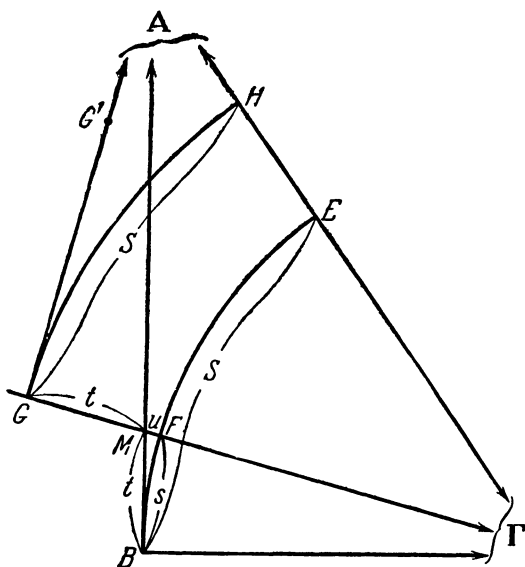
Если зависимость u от t обозначить через $u = f(t)$, то

$$f(t) = k \ln \operatorname{ch} \frac{t}{k}. \quad (\text{XV}_1)$$

3. Соотношение, связывающее длину предельной дуги с ее высотой. Из формулы (XV) вытекают дальнейшие важные результаты. Прежде всего, если в уравнение (8) вместо $e^{\frac{u}{k}}$ подставим выражение (XV), то после простого вычисления получим:

$$s = S \frac{e^{\frac{t}{k}} - e^{-\frac{t}{k}}}{e^{\frac{t}{k}} + e^{-\frac{t}{k}}} = S \operatorname{th} \frac{t}{k} \quad (s < S). \quad (\text{XVI})$$

Это уравнение выражает длину предельной дуги s через соответствующее ей значение t и длину дуги S . Так как $\operatorname{th} \frac{t}{k} < 1$, то формула эта имеет место только при $s < S$. Это естественно, так как она выведена из фор-



Черт. 204.

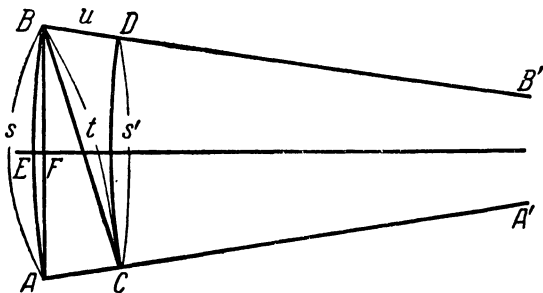
мулы (8), в которой s предполагается меньше S ; к тому же, в силу теоремы 1 § 33, рубр. 8 (стр. 263), самый отрезок t существует только при $s < S$.

Но отсюда уже легко получить другую формулу, имеющую место для всякой предельной дуги. Чтобы ее вывести, возьмем произвольную предельную дугу AB с осями AA' и BB' (черт. 205) и из ее конца B проведем ее высоту BC . Из точки же C опишем параллельную ей предельную дугу CD между теми же осями AA' и BB' . Пусть s и s' будут длины дуг AB и CD . Дуга s' неизбежно меньше S , ибо касательная CB в одном ее конце и ось BB' (DB') в другом ее конце пересекаются; BC и BD суть соответствующие значения t и u для дуги CD . Так как в то же время u есть расстояние между этими предельными дугами по общей оси, то по формуле (XIV)

$$s = s' e^{\frac{u}{k}},$$

а по формуле (XVI), в которой в данном случае нужно вместо s положить s' :

$$s' = S \operatorname{th} \frac{t}{k}. \quad (9)$$



Черт. 205.

Подставляя это выражение

в предыдущее равенство и учитывая соотношение (XV), получаем:

$$s = S \operatorname{th} \frac{t}{k} \operatorname{ch} \frac{t}{k} = S \operatorname{sh} \frac{t}{k}. \quad (10)$$

Так как t есть высота h дуги AB , то этот результат устанавливает соотношение, связывающее длину предельной дуги с ее высотой:

$$s = S \operatorname{sh} \frac{h}{k}. \quad (\text{XVI}_1)$$

Заметим, что хорда AB предельной дуги AEB составляет двойную высоту ($2AF$) половинной дуги AE (черт. 205). Если поэтому длину предельной дуги попрежнему обозначим через s , а ее хорду—через l , то

$$s = 2 S \operatorname{sh} \frac{l}{2k}. \quad (\text{XVI}_2)$$

4. Определение длины дуги предельной линии. Формулы $(\text{XVI}_{1,2})$ выражают, собственно, отношения дуги s к S . Если смотреть на них, как на выражение длины дуги s по ее высоте h или хорде l , то они содержат, по существу, две константы— S и k . Однако одну из них, именно S , теперь нетрудно разыскать. В самом деле, если под s и S будем разуметь длины соответствующих дуг, выраженные в общей единице меры, и разделим обе части уравнения (XVI_2) на l , то получим:

$$\frac{s}{l} = \frac{2S}{l} \operatorname{sh} \frac{l}{2k}.$$

Предположим теперь, что l , а вместе с ним и s неограниченно убывают. Тогда отношение s к l (отношение длины дуги к длине хорды)

стремится к 1, отношение же $\text{sh}\left(\frac{l}{2k}\right) : l$ стремится к $\frac{1}{2k}$; отсюда следует, что $S = k$. Таким образом, постоянная k выражает длину дуги S . Эта длина зависит от выбора единицы меры; но от этого выбора зависит также значение постоянной k (см. рубр. 1, стр. 280). Обе формулы (XVI₁ и XVI₂) можно теперь написать в виде:

$$s = k \text{sh} \frac{h}{k}, \quad (\text{XVI}_2)$$

$$s = 2k \text{sh} \frac{l}{2k}. \quad (\text{XVI}_1)$$

5. Задача тригонометрии прямолинейного прямоугольного треугольника. Установленные метрические соотношения дают возможность разыскать уравнения, связывающие стороны и углы прямоугольного треугольника в гиперболической плоскости H_2 . Мы уже отмечали выше, что независимых уравнений этого рода в гиперболической плоскости, как и в евклидовой, имеется три, а так называемая полная система тригонометрических уравнений прямоугольного треугольника содержит их десять. Мы уже останавливались на этом при выводе уравнений в «латентной» форме (уравнения (VII) и (VIII), стр. 213 и 223). Но мы указывали, что непосредственно воспользоваться этими уравнениями для так называемого «решения» треугольника, т. е. для вычисления всех элементов треугольника по двум из них, мы не можем, так как в эти уравнения входят значения углов $\Pi(a)$, $\Pi(b)$, $\Pi(c)$, $\Pi(\alpha)$, $\Pi(\beta)$ — угловые значения соответствующих отрезков, которые остаются нам неизвестными; неизвестным остается соотношение, связывающее линейное и угловое значения отрезка: $\Pi(x)$ и x .

Теперь уже представляется возможным вывести эти уравнения в более конкретной форме: это приводит также к разысканию самой функции $\Pi(x)$.

Отметим различные обозначения элементов треугольника. Самое обычное, так сказать, традиционное обозначение (a , b — катеты, c — гипотенуза, A и B острые углы) предполагает стороны заданными в линейной мере, углы — в угловой; обозначения Лобачевского a , b , c , α , β , которыми мы уже выше пользовались, предполагают как стороны, так и углы заданными в линейной мере, так что $A = \Pi(\alpha)$, $B = \Pi(\beta)$. Заметим, однако, что стороны могут быть заданы также значениями $\tilde{a} = \Pi(a)$, $\tilde{b} = \Pi(b)$, $\tilde{c} = \Pi(c)$; на них можно смотреть как на угловые задания сторон, т. е. как на значения сторон, выраженные в угловой мере. Это вполне аналогично заданиям сторон в сферическом треугольнике.

6. Вывод двух явных (нелатентных) уравнений прямоугольного треугольника. Пусть ABC — прямоугольный треугольник с элементами a , b , c , α , β . На AB от вершины A отложим отрезок $AD = \alpha$; конец его может попасть либо за точку B , либо между точками A и B , либо в точку B .

Начнем с первого случая (черт. 206). Из точки D восстановим к AD перпендикуляр DD' , который, в силу определения отрезка α , будет параллелен AA' . Из вершины B проведем луч BB' , параллельный AA' и DD' , и предельную дугу BE между осями AA' и BB' . Через точку D проведем параллельную предельную дугу DFG ; последняя

разбивается на две части: $DF = s_1$ и $FG = s_2$; дугу BE обозначим через s . Заметим прежде всего, что отрезки BD и BF определяют тангенциальное (t) и нормальное (u) протяжения предельной дуги DF . Поэтому, согласно формуле (XVI),

$$\begin{aligned} s_1 &= S \operatorname{th} \frac{t}{k} = \\ &= S \operatorname{th} \frac{a-c}{k}. \end{aligned} \quad (11)$$

Таким же образом, AD и AG суть тангенциальное и нормальное протяжения предельной дуги DG ($= s_1 + s_2$). Поэтому

$$s_1 + s_2 = S \operatorname{th} \frac{a}{k}. \quad (12)$$

Далее, дуга BE ($= s$) имеет высотой сторону $BC = a$ нашего треугольника; поэтому (XVI₁)

$$s = S \operatorname{sh} \frac{a}{k}.$$

Наконец, дуга FG ($= s_2$) параллельна дуге BE и отстоит от нее на расстояние BF ($= u$). Поэтому

$$s_2 = s e^{-\frac{u}{k}};$$

в силу же уравнения (XV)

$$e^{\frac{u}{k}} = \operatorname{ch} \frac{t}{k} = \operatorname{ch} \frac{a-c}{k}$$

и потому

$$s_2 = S \operatorname{sh} \frac{a}{k} : \operatorname{ch} \frac{a-c}{k}. \quad (13)$$

Подставляя выражения (11) и (13) вместо s_1 и s_2 в уравнение (12), по умножении обеих частей на $\operatorname{ch} \frac{a-c}{k}$, получим:

$$\operatorname{sh} \frac{a-c}{k} + \operatorname{sh} \frac{a}{k} = \operatorname{th} \frac{a}{k} \operatorname{ch} \frac{a-c}{k},$$

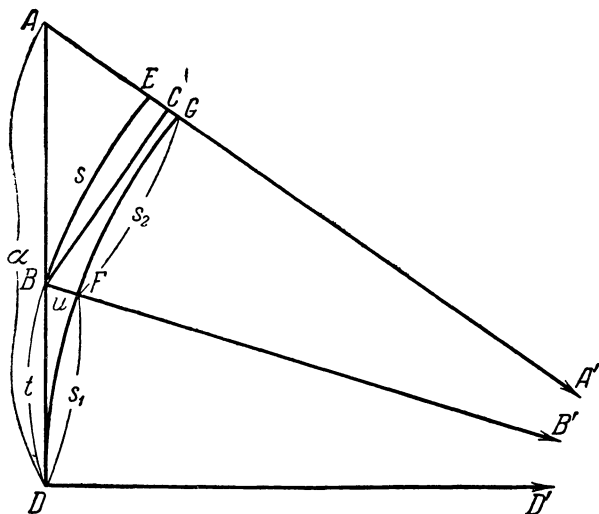
умножая же обе части на $\operatorname{ch} \frac{a}{k}$, приведем его к виду:

$$\operatorname{sh} \frac{a}{k} \operatorname{ch} \frac{a-c}{k} - \operatorname{sh} \frac{a-c}{k} \operatorname{ch} \frac{a}{k} = \operatorname{sh} \frac{a}{k} \operatorname{ch} \frac{a}{k}$$

или

$$\operatorname{sh} \frac{c}{k} = \operatorname{sh} \frac{a}{k} \operatorname{ch} \frac{a}{k}. \quad (\text{XVII}_1)$$

Таково своеобразное уравнение, связывающее гипотенузу прямого углового треугольника с катетом и острым углом, противолежащим последнему. Оно выведено Либманом планиметрическими средствами на основе формулы (XV), впервые установленной Лобачевским.



Изложенный вывод предполагает $\alpha > c$. В случае $\alpha < c$ делается аналогичное построение. Когда на гипотенузе AB откладываем отрезок $AD = \alpha$ (черт. 207), то конец его D падает между A и B . И здесь проводим прямую DD' , перпендикулярную к AB , и прямую $BB' \parallel DD'$; три прямые AA' , BB' , DD' параллельны друг другу. Теперь строим предельные дуги с этими осями: GDF через точку D и BE через точку B ; тогда $BD (= t)$ и $BF (= u)$ суть тангенциальное и нормальное протяжения предельной дуги DF ; DF обозначим через s_1 , а всю дугу FDG — через s_2 , так что дуга $DG = s_2 - s_1$; вместе с тем дугу BE обозначим через s . Тогда

$$s_1 = S \operatorname{th} \frac{t}{k} = S \operatorname{th} \frac{c-\alpha}{k}$$

и, в виду (XIV), (XV) и (XVI₁),

$$s_2 = se^{-\frac{u}{k}} = S \operatorname{sh} \frac{a}{k} : \operatorname{ch} \frac{c-\alpha}{k}.$$

С другой стороны, по формуле (XVI),

$$\widetilde{DG} = s_2 - s_1 = S \left\{ \operatorname{th} \frac{a}{k} \right.$$

Из этих трех равенств вытекает:

$$\operatorname{sh} \frac{a}{k} : \operatorname{ch} \frac{c-\alpha}{k} - \operatorname{th} \frac{c-\alpha}{k} = \operatorname{th} \frac{a}{k}$$

или

$$\operatorname{sh} \frac{a}{k} - \operatorname{sh} \frac{c-\alpha}{k} = \operatorname{th} \frac{a}{k} \operatorname{ch} \frac{c-\alpha}{k}$$

и, наконец, окончательно:

$$\operatorname{sh} \frac{c}{k} = \operatorname{sh} \frac{a}{k} \operatorname{ch} \frac{a}{k},$$

т. е. то же уравнение (XVII₁).

Читателя не затруднит установить это же соотношение и для случая $\alpha = c$.

Совершенно ясно, что таким же образом можно вывести аналогичное уравнение

$$\operatorname{sh} \frac{c}{k} = \operatorname{sh} \frac{b}{k} \operatorname{ch} \frac{\beta}{k}. \quad \S(14)$$

Мы теперь располагаем двумя тригонометрическими уравнениями более конкретного характера; с их помощью можно было бы вести конкретные вычисления, если бы мы знали значение постоянной k . О ней будет речь впереди.

7. Вывод полной системы уравнений прямоугольного треугольника. Казалось бы, что из этих двух уравнений можно получить все 10 уравнений полной системы простой перестановкой элементов; казалось бы, что для этого достаточно даже одного уравнения. В самом деле; мы знаем, что каждому прямоугольному треугольнику в гиперболической плоскости сопутствуют еще 9 прямоугольных же треугольников, которые из него получаются перестановками элементов группы (XIII₁) (стр. 224).

Если, следовательно, имеет место уравнение, связывающее элементы треугольника a, b, c, α, β , то всякое уравнение, которое из него получается любой перестановкой $T_1, \dots, T_9$, также будет иметь место. Так, в частности, подстановка T_9 переводит первое из полученных уравнений во второе. Однако на этом пути возникают затруднения двоякого рода.

Производя в уравнении $(XVII_1)$ подстановки $T_1 - T_9$, мы получаем дополнительно девять уравнений. Вместе с уравнением $(XVII_1)$ это будут:

$$\operatorname{sh} \frac{c}{k} = \operatorname{sh} \frac{a}{k} \operatorname{ch} \frac{a}{k}, \quad (XVII_1) \quad \operatorname{sh} \frac{a}{k} = \operatorname{sh} \frac{\beta'}{k} \operatorname{ch} \frac{c}{k}, \quad (XVII_6)$$

$$\operatorname{sh} \frac{\beta}{k} = \operatorname{sh} \frac{a'}{k} \operatorname{ch} \frac{c}{k}, \quad (XVII_2) \quad \operatorname{sh} \frac{a'}{k} = \operatorname{sh} \frac{c'}{k} \operatorname{ch} \frac{a}{k}, \quad (XVII_7)$$

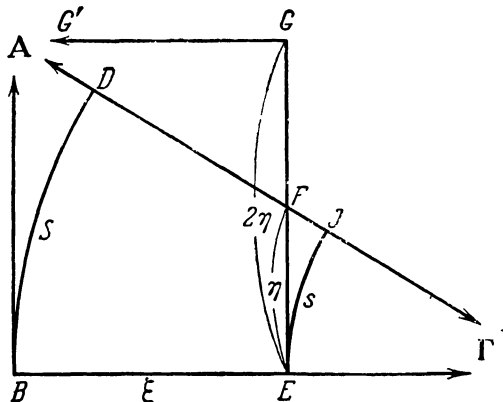
$$\operatorname{sh} \frac{b'}{k} = \operatorname{sh} \frac{c'}{k} \operatorname{ch} \frac{\beta}{k}, \quad (XVII_3) \quad \operatorname{sh} \frac{b'}{k} = \operatorname{sh} \frac{a'}{k} \operatorname{ch} \frac{a'}{k}, \quad (XVII_8)$$

$$\operatorname{sh} \frac{a'}{k} = \operatorname{sh} \frac{\beta'}{k} \operatorname{ch} \frac{b'}{k}, \quad (XVII_4) \quad \operatorname{sh} \frac{\beta}{k} = \operatorname{sh} \frac{a}{k} \operatorname{ch} \frac{b'}{k}, \quad (XVII_9)$$

$$\operatorname{sh} \frac{a}{k} = \operatorname{sh} \frac{b}{k} \operatorname{ch} \frac{a'}{k}, \quad (XVII_5) \quad \operatorname{sh} \frac{c}{k} = \operatorname{sh} \frac{b}{k} \operatorname{ch} \frac{\beta}{k}. \quad (XVII_{10})$$

Однако из этих 10 уравнений для нас конкретны только первое и последнее; остальные же содержат буквы со штрихами, т. е. отрезки, дополнительные к элементам треугольника; в этом и заключается первое затруднение. Чтобы и они приняли конкретный характер, нужно иметь возможность аналитически выразить функции от дополнительных отрезков через функции самих этих отрезков.

8. Аналитическое выражение соотношения, связывающего дополнительные отрезки. Уравнение (IX) на стр. 213, связывающее дополнительные отрезки, выражено в латентной форме; дадим ему явное аналитическое выражение. С этой целью вновь возьмем прямой угол $AB\Gamma$ с его



Черт. 208.

заградительной прямой AG' (черт. 208). Из вершины B проведем предельную дугу BD с осями $B\Gamma$ и $D\Gamma$, содержащуюся между ними; это — дуга $S (=k)$. На стороне $B\Gamma$ возьмем произвольный отрезок BE , который обозначим через ξ , из его конца E восставим перпендикуляр EF , который встретит прямую AG в точке F . Отрезок $EF (= \eta)$ продолжим на расстояние $FG = FE$ и из точки G восставим перпендикуляр GG' , обращенный в сторону FA . Так как $\angle EFG = \Pi(\eta)$, то равный ему угол AFG можно рассматривать как $\Pi(FG)$; вместе с тем перпендикуляр $GG' \parallel FA \parallel BA$; его можно было бы обозначить через GA . Это означает, что $EB (= \xi)$ и $EG (= 2\eta)$ суть дополнительные отрезки ($2\eta = \xi'$).

Из точки E проведем предельную дугу $EJ (=s)$ между теми же осями $E\Gamma$ и $F\Gamma$. Теперь мы можем выразить s через S и η по формуле (XVI) и в то же время мы можем выразить s через S и ξ по формуле (XIV).

Получаем:

$$s = S \operatorname{th} \frac{\eta}{k} = S e^{-\frac{\xi}{k}}.$$

Следовательно, $\operatorname{th} \frac{\eta}{k} = e^{-\frac{\xi}{k}}$, т. е.

$$\operatorname{th} \frac{\xi'}{2k} = e^{-\frac{\xi}{k}}.$$

Отсюда

$$\operatorname{th} \frac{\xi'}{k} = \frac{2 \operatorname{th} \frac{\xi'}{2k}}{1 + \operatorname{th}^2 \frac{\xi'}{2k}} = \frac{2e^{-\frac{\xi}{k}}}{1 + e^{-\frac{2\xi}{k}}} = \frac{1}{\operatorname{ch} \frac{\xi}{k}}.$$

Таким образом, ввиду взаимности дополнительных отрезков,

$$\operatorname{th} \frac{\xi'}{k} \operatorname{ch} \frac{\xi}{k} = 1, \quad \operatorname{th} \frac{\xi}{k} \operatorname{ch} \frac{\xi'}{k} = 1, \quad \operatorname{sh} \frac{\xi}{k} \operatorname{sh} \frac{\xi'}{k} = 1. \quad (\text{XVIII})$$

9. Освобождение найденных уравнений от дополнительных отрезков. Если теперь, пользуясь соотношениями (XVIII), исключим из уравнений (XVII) дополнительные отрезки, т. е. заменим $\operatorname{sh} \frac{a'}{k}$ через $\frac{1}{\operatorname{sh} \frac{a}{k}}$, $\operatorname{sh} \frac{b'}{k}$ — через $\frac{1}{\operatorname{sh} \frac{b}{k}}$, $\operatorname{ch} \frac{b'}{k}$ — через $\frac{1}{\operatorname{th} \frac{b}{k}}$, и т. д., то получим:

$$\operatorname{sh} \frac{c}{k} = \operatorname{sh} \frac{a}{k} \operatorname{ch} \frac{a}{k}, \quad (\text{XIX}_1) \quad \operatorname{ch} \frac{c}{k} = \operatorname{sh} \frac{a}{k} \operatorname{sh} \frac{\beta}{k}, \quad (\text{XIX}_2)$$

$$\operatorname{ch} \frac{c}{k} = \operatorname{sh} \frac{\beta}{k} \operatorname{sh} \frac{a}{k}, \quad (\text{XIX}_2) \quad \operatorname{sh} \frac{c}{k} = \operatorname{sh} \frac{a}{k} \operatorname{ch} \frac{a}{k}, \quad (\text{XIX}_1)$$

$$\operatorname{sh} \frac{c}{k} = \operatorname{sh} \frac{b}{k} \operatorname{ch} \frac{\beta}{k}, \quad (\text{XIX}_3) \quad \operatorname{sh} \frac{b}{k} = \operatorname{sh} \frac{a}{k} \operatorname{th} \frac{a}{k}, \quad (\text{XIX}_5)$$

$$\operatorname{sh} \frac{a}{k} = \operatorname{th} \frac{b}{k} \operatorname{sh} \frac{\beta}{k}, \quad (\text{XIX}_4) \quad \operatorname{sh} \frac{a}{k} = \operatorname{sh} \frac{\beta}{k} \operatorname{th} \frac{b}{k}, \quad (\text{XIX}_4)$$

$$\operatorname{sh} \frac{b}{k} = \operatorname{th} \frac{a}{k} \operatorname{sh} \frac{a}{k}, \quad (\text{XIX}_5) \quad \operatorname{sh} \frac{c}{k} = \operatorname{sh} \frac{b}{k} \operatorname{ch} \frac{\beta}{k}. \quad (\text{XIX}_3)$$

Теперь мы получили уравнения, которые действительно непосредственно выражают соотношения между элементами прямоугольного треугольника. Но достаточно к ним присмотреться, чтобы убедиться, что мы имеем не десять уравнений, которые должны составить полную систему уравнений прямоугольного треугольника, а только пять: вторая группа этих уравнений совпадает с первой. Это и есть второе затруднение, о котором мы упомянули выше. Остальные пять нужно еще разыскать, но это уже нетрудно сделать.

Перемножая уравнения (XIX₄) и (XIX₅) и принимая во внимание (XIX₂), получим:

$$\operatorname{ch} \frac{c}{k} = \operatorname{ch} \frac{a}{k} \operatorname{ch} \frac{b}{k}. \quad (\text{XIX}_6)$$

Не лишено интереса привести очень своеобразное выражение этого соотношения. Написав его в виде:

$$k \ln \operatorname{ch} \frac{c}{k} = k \ln \operatorname{ch} \frac{a}{k} + k \ln \operatorname{ch} \frac{b}{k}.$$

и пользуясь функцией $f(t)$, выражающей нормальное расстояние (u) точки от предельной линии через тангенциальное расстояние (t), в силу соотношения (XV₁) на стр. 282, получим уравнение Лобачевского:

$$f(c) = f(a) + f(b).$$

Однако оно выведено Лобачевским стереометрическими средствами.

Так своеобразно выражается в гиперболической плоскости связь между катетами и гипотенузой. Остальные четыре уравнения можно получить путем исключения лишних элементов из этого нового уравнения и уравнений (XIX₁₋₅). Но проще всего воспользоваться группой перестановок (XIII₁) (стр. 219). Производя над этим уравнением перестановки T_1, T_2, T_3, T_4 , получим вместе с исходным уравнением:

$$\operatorname{ch} \frac{c}{k} = \operatorname{ch} \frac{a}{k} \operatorname{ch} \frac{b}{k},$$

$$\operatorname{ch} \frac{\beta}{k} = \operatorname{ch} \frac{a'}{k} \operatorname{ch} \frac{a}{k},$$

$$\operatorname{ch} \frac{b'}{k} = \operatorname{ch} \frac{c'}{k} \operatorname{ch} \frac{a'}{k},$$

$$\operatorname{ch} \frac{a'}{k} = \operatorname{ch} \frac{\beta'}{k} \operatorname{ch} \frac{c'}{k},$$

$$\operatorname{ch} \frac{a}{k} = \operatorname{ch} \frac{b}{k} \operatorname{ch} \frac{\beta'}{k}.$$

Исключая же отсюда дополнительные отрезки при помощи уравнений (XVIII), получим

$$\operatorname{ch} \frac{c}{k} = \operatorname{ch} \frac{a}{k} \operatorname{ch} \frac{b}{k}, \quad (\text{XIX}_6)$$

$$\operatorname{ch} \frac{a}{k} = \operatorname{th} \frac{\alpha}{k} \operatorname{ch} \frac{\beta}{k}, \quad (\text{XIX}_7)$$

$$\operatorname{th} \frac{b}{k} = \operatorname{th} \frac{c}{k} \operatorname{th} \frac{\alpha}{k}, \quad (\text{XIX}_8)$$

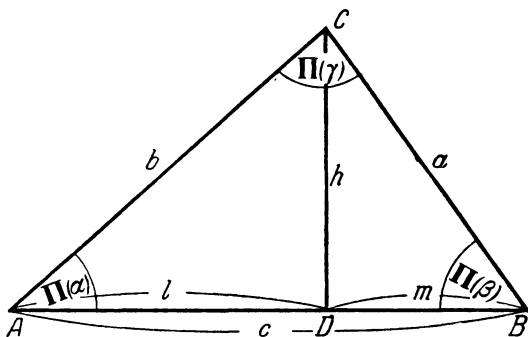
$$\operatorname{th} \frac{a}{k} = \operatorname{th} \frac{c}{k} \operatorname{th} \frac{\beta}{k}, \quad (\text{XIX}_9)$$

$$\operatorname{ch} \frac{b}{k} = \operatorname{th} \frac{\beta}{k} \operatorname{ch} \frac{\alpha}{k}. \quad (\text{XIX}_{10})$$

Применение подстановок $T_5 - T_9$ возвращает нас снова к уравнениям (XIX₁₋₅).

Уравнения (XIX₁₋₁₀) действительно составляют полную систему тригонометрических уравнений прямоугольного треугольника в гиперболической плоскости.

Обращаемся теперь к косоугольному треугольнику, правильнее сказать, — к выводу общих уравнений, связывающих стороны и углы всякого прямолинейного треугольника.



Черт. 209.

10. Общие уравнения прямолинейного треугольника. Положим, что треугольник задан сторонами a, b, c и значениями углов α, β, γ , выраженными в линейной мере. Из вершины C (черт. 209) треугольника

опускаем перпендикуляр CD на основание AB . Применяя к прямоугольным треугольникам ACD и BCD уравнение (XIX₁), получим:

$$\operatorname{sh} \frac{h}{k} = \frac{\operatorname{sh} \frac{b}{k}}{\operatorname{ch} \frac{a}{k}}, \quad \operatorname{sh} \frac{h}{k} = \frac{\operatorname{sh} \frac{a}{k}}{\operatorname{ch} \frac{b}{k}}.$$

Отсюда (и по аналогии) получаем:

$$\operatorname{sh} \frac{a}{k} \operatorname{ch} \frac{a}{k} = \operatorname{sh} \frac{b}{k} \operatorname{ch} \frac{b}{k} = \operatorname{sh} \frac{c}{k} \operatorname{ch} \frac{c}{k}. \quad (\text{XX})$$

Это — своеобразная форма теоремы синусов.

Рассуждение предполагает углы A , B и C острыми. Читатель легко обнаружит, что оно остается в силе, когда один из углов прямой или тупой. Другое выражение этой теоремы, более близкое к тому, которое она получает в евклидовой геометрии, приведено ниже [(XX'), стр. 299].

Теперь в силу уравнения (XIX₀)

$$\operatorname{ch} \frac{h}{k} \operatorname{ch} \frac{m}{k} = \operatorname{ch} \frac{a}{k},$$

$$\operatorname{ch} \frac{h}{k} \operatorname{ch} \frac{l}{k} = \operatorname{ch} \frac{b}{k}.$$

Исключая же отсюда $\operatorname{ch} \frac{h}{k}$, находим:

$$\frac{\operatorname{ch} \frac{a}{k}}{\operatorname{ch} \frac{m}{k}} = \frac{\operatorname{ch} \frac{b}{k}}{\operatorname{ch} \frac{l}{k}},$$

так что

$$\operatorname{ch} \frac{a}{k} = \frac{\operatorname{ch} \frac{b}{k}}{\operatorname{ch} \frac{l}{k}} \operatorname{ch} \frac{m}{k} = \frac{\operatorname{ch} \frac{b}{k}}{\operatorname{ch} \frac{l}{k}} \operatorname{ch} \frac{c-l}{k} =$$

$$= \frac{\operatorname{ch} \frac{b}{k}}{\operatorname{ch} \frac{l}{k}} \left(\operatorname{ch} \frac{c}{k} \operatorname{ch} \frac{l}{k} - \operatorname{sh} \frac{c}{k} \operatorname{sh} \frac{l}{k} \right) = \operatorname{ch} \frac{b}{k} \operatorname{ch} \frac{c}{k} - \operatorname{sh} \frac{c}{k} \operatorname{ch} \frac{b}{k} \operatorname{th} \frac{l}{k}.$$

С другой стороны, в силу уравнения (XIX₀) из прямоугольного треугольника ACD получаем:

$$\operatorname{th} \frac{l}{k} = \operatorname{th} \frac{b}{k} \operatorname{th} \frac{a}{k}.$$

Подставляя это выражение в предыдущее уравнение, получаем:

$$\operatorname{ch} \frac{a}{k} = \operatorname{ch} \frac{b}{k} \operatorname{ch} \frac{c}{k} - \operatorname{sh} \frac{b}{k} \operatorname{sh} \frac{c}{k} \operatorname{th} \frac{a}{k}. \quad (\text{XXI})$$

Этих уравнений три; их иногда называют теоремой косинусов, поскольку они определяют гиперболические косинусы трех сторон; к тому же они, как читатель сможет убедиться позже, переходят в евклидову теорему косинусов, когда k стремится к ∞ . Это — три независимых уравнения прямолинейного треугольника; к ним присо-

единяются уравнения (XX) и остальные уравнения полной системы. Мы здесь развертывать их не будем; они выводятся из этих уравнений алгебраически. К тому же мы будем иметь возможность притти к ним иным путем.

§ 36. ВТОРОЕ ОСНОВНОЕ СООТНОШЕНИЕ В ГИПЕРБОЛИЧЕСКОЙ ПЛОСКОСТИ И ДРУГИЕ ФОРМЫ УРАВНЕНИЙ ТРЕУГОЛЬНИКА

1. Соотношение между значениями угла, выраженными в линейной и дуговой мере. Установленные выше тригонометрические уравнения все еще имеют слабую сторону. Угол обычно задается в тех или иных дуговых единицах (градусах, радианах). Между тем в найденные уравнения всегда входят значения углов в линейной мере. Необходимо поэтому установить, какова связь между значением угла, выраженным в дуговых единицах, и линейным его значением. Иначе говоря, если ξ есть значение угла, выраженного в линейной мере, а ω — его значение в дуговой мере, то ω есть функция от ξ и обратно. Мы это выразили при самом определении линейной меры (§ 25, рубр. 1) тем, что положили [(VI), стр. 210]

$$\omega = \Pi(\xi). \quad (1)$$

Теперь уже становится ребром вопрос об аналитическом выражении этой функции, — вопрос о том, как по углу ω , заданному в тех или иных дуговых единицах, разыскать соответствующее значение ξ в тех или иных линейных единицах, и наоборот. Установленные тригонометрические уравнения дают достаточные средства для решения этого вопроса. Подойдем к этому решению следующим образом.

Так как $\text{th } \frac{\xi}{k}$ при всяком положительном значении ξ представляет собой число, меньшее 1, то в пределах первой четверти существует такой угол η , что

$$\text{th } \frac{\xi}{k} = \cos \eta \quad \left(0 \leq \eta \leq \frac{\pi}{2}\right). \quad (2)$$

Более того, в этих пределах угол η определен однозначно; при $\xi = 0$ $\eta = \frac{\pi}{2}$, при $\xi = \infty$ $\eta = 0$. Углы η и ω мы предполагаем измеренными в одной и той же дуговой мере, именно в радианной мере, в которой прямой угол выражается числом $\frac{\pi}{2}$ (см. § 33, рубр. 5, стр. 260; подробнее об этом см. ниже, стр. 310—314).

Под тригонометрическими функциями угла мы разумеем такие, которые имеют те же значения, что и в евклидовой плоскости при том же радианном значении угла, — иначе функции, которые определяются аналитически по тем же значениям аргумента. При этих условиях каждому значению ω отвечает определенный отрезок ξ (1), которому, в свою очередь, отвечает определенный угол η (2), и, таким образом, каждому углу ω отвечает определенный угол η . Это значит:

$$\eta = \varphi(\omega), \quad (3)$$

где φ — определенная функция, монотонно возрастающая от $\omega = 0$ до $\omega = \frac{\pi}{2}$; при этом

$$\varphi(0) = 0 \text{ и } \varphi\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}. \quad (4)$$

Эту именно функцию (3) нам нужно разыскать.

С этой целью на прямой AB (черт. 210) по обе стороны какой-либо ее точки D отложим произвольно взятые отрезки $DA = c_1$ и $DB = c_2$. Из точки D восставим к AB перпендикуляр DC и на нем отложим произвольный же отрезок $DC = h$. Соединив точку C с точками A и B , получим треугольник ACB со сторонами a , b и $c = c_1 + c_2$. Значения углов ACD и BCD , выраженные в радианной мере, обозначим через ω_1 и ω_2 , а значение всего угла ACB — через ω , так что

$$\omega = \omega_1 + \omega_2. \quad (5)$$

Соответствующие значения η вспомогательного угла (2) обозначим через η_1 , η_2 и η . Было бы, однако, преждевременно отсюда непосредственно заключить, что

$$\eta = \eta_1 + \eta_2, \quad (6)$$

потому что значения η_1 , η_2 и η определяются из уравнений (1) и (2), каждое независимо от двух других. В действительности, однако, равенство (6) имеет место, но это именно нам и нужно прежде всего доказать.

Линейные значения углов ACD (ω_1), BCD (ω_2) и ACB (ω) обозначим через γ_1 , γ_2 и γ . Уравнение (XXI) (стр. 290) —

теорема косинусов в применении к стороне c треугольника ABC — дает:

$$\operatorname{ch} \frac{c}{k} = \operatorname{ch} \frac{a}{k} \operatorname{ch} \frac{b}{k} - \operatorname{sh} \frac{a}{k} \operatorname{sh} \frac{b}{k} \operatorname{th} \frac{\gamma}{k},$$

так что

$$\operatorname{th} \frac{\gamma}{k} = \frac{\operatorname{ch} \frac{a}{k} \operatorname{ch} \frac{b}{k} - \operatorname{ch} \frac{c}{k}}{\operatorname{sh} \frac{a}{k} \operatorname{sh} \frac{b}{k}}.$$

А так как

$$\operatorname{ch} \frac{c}{k} = \operatorname{ch} \left(\frac{c_1}{k} + \frac{c_2}{k} \right) = \operatorname{ch} \frac{c_1}{k} \operatorname{ch} \frac{c_2}{k} + \operatorname{sh} \frac{c_1}{k} \operatorname{sh} \frac{c_2}{k},$$

то

$$\operatorname{th} \frac{\gamma}{k} = \operatorname{cth} \frac{a}{k} \operatorname{cth} \frac{b}{k} - \frac{\operatorname{ch} \frac{c_1}{k} \operatorname{ch} \frac{c_2}{k}}{\operatorname{sh} \frac{a}{k} \operatorname{sh} \frac{b}{k}} - \frac{\operatorname{sh} \frac{c_1}{k} \operatorname{sh} \frac{c_2}{k}}{\operatorname{sh} \frac{a}{k} \operatorname{sh} \frac{b}{k}}. \quad (7)$$

Три члена правой части выразим порознь через η_1 и η_2 . Уравнение (XIX₂) (стр. 289) в применении к треугольникам ACD и BCD дает:

$$\operatorname{th} \frac{h}{k} = \operatorname{th} \frac{b}{k} \operatorname{th} \frac{\gamma_1}{k}, \quad \operatorname{th} \frac{h}{k} = \operatorname{th} \frac{a}{k} \operatorname{th} \frac{\gamma_2}{k}. \quad (8)$$

Но, согласно (2),

$$\operatorname{th} \frac{\gamma_1}{k} = \cos \eta_1, \quad \operatorname{th} \frac{\gamma_2}{k} = \cos \eta_2.$$

Поэтому уравнения (8) можно написать в виде:

$$\operatorname{cth} \frac{b}{k} = \operatorname{cth} \frac{h}{k} \cos \eta_1, \quad \operatorname{cth} \frac{a}{k} = \operatorname{cth} \frac{h}{k} \cos \eta_2,$$

откуда, перемножая эти равенства, получим:

$$\operatorname{cth} \frac{a}{k} \operatorname{cth} \frac{b}{k} = \operatorname{cth}^2 \frac{h}{k} \cos \eta_1 \cos \eta_2. \quad (9)$$

Теперь уравнение (XIX₁) (стр. 288) дает:

$$\frac{\operatorname{sh} \frac{c_1}{k}}{\operatorname{sh} \frac{b}{k}} = \frac{1}{\operatorname{ch} \frac{\gamma_1}{k}}, \quad \frac{\operatorname{sh} \frac{c_2}{k}}{\operatorname{sh} \frac{a}{k}} = \frac{1}{\operatorname{ch} \frac{\gamma_2}{k}}. \quad (10)$$

Между тем, соотношение (2), связывающее отрезок ξ и угол η , дает:

$$\operatorname{sh} \frac{\xi}{k} = \operatorname{ctg} \eta, \quad \operatorname{ch} \frac{\xi}{k} = \frac{1}{\sin \eta}. \quad (2')$$

В частности, поэтому

$$\frac{1}{\operatorname{ch} \frac{\gamma_1}{k}} = \sin \eta_1, \quad \frac{1}{\operatorname{ch} \frac{\gamma_2}{k}} = \sin \eta_2; \quad (11)$$

$$\operatorname{sh} \frac{\gamma_1}{k} = \operatorname{ctg} \eta_1, \quad \operatorname{sh} \frac{\gamma_2}{k} = \operatorname{ctg} \eta_2. \quad (11')$$

Поэтому

$$\frac{\operatorname{sh} \frac{c_1}{k} \operatorname{sh} \frac{c_2}{k}}{\operatorname{sh} \frac{a}{k} \operatorname{sh} \frac{b}{k}} = \sin \eta_1 \sin \eta_2. \quad (12)$$

Наконец, уравнение (XIX₂) (стр. 288) в надлежащем применении к тем же двум прямоугольным треугольникам ACD и BCD дает:

$$\operatorname{th} \frac{c_1}{k} \operatorname{sh} \frac{\gamma_1}{k} = \operatorname{sh} \frac{h}{k}, \quad \operatorname{th} \frac{c_2}{k} \operatorname{sh} \frac{\gamma_2}{k} = \operatorname{sh} \frac{h}{k}.$$

Отсюда в силу соотношений (11):

$$\operatorname{sh} \frac{c_1}{k} = \operatorname{ch} \frac{c_1}{k} \frac{\operatorname{sh} \frac{h}{k}}{\operatorname{ctg} \eta_1}, \quad \operatorname{sh} \frac{c_2}{k} = \operatorname{ch} \frac{c_2}{k} \frac{\operatorname{sh} \frac{h}{k}}{\operatorname{ctg} \eta_2}.$$

Подставляя поэтому в левую часть уравнения (12) вместо $\operatorname{sh} \frac{c_1}{k}$ и $\operatorname{sh} \frac{c_2}{k}$ эти выражения, получим:

$$\frac{\operatorname{ch} \frac{c_1}{k} \operatorname{ch} \frac{c_2}{k}}{\operatorname{sh} \frac{a}{k} \operatorname{sh} \frac{b}{k}} = \frac{\cos \eta_1 \cos \eta_2}{\operatorname{sh}^2 \frac{h}{k}}. \quad (13)$$

Заменяя теперь в правой части уравнения (7) все три члена найденными выражениями (9), (13) и (12) и принимая во внимание, с одной стороны, что $\operatorname{th} \frac{\gamma}{k} = \cos \eta$, а с другой стороны, тождество $\operatorname{cth}^2 \frac{h}{k} - \frac{1}{\operatorname{sh}^2 \frac{h}{k}} = 1$, получим:

$$\cos \eta = \cos \eta_1 \cos \eta_2 - \sin \eta_1 \sin \eta_2 = \cos (\eta_1 + \eta_2).$$

Так как углы η , η_1 , η_2 не превышают $\frac{\pi}{2}$, то отсюда следует, что

$$\eta = \eta_1 + \eta_2,$$

как это предусматривает соотношение (6).

Принимая теперь во внимание, что в силу основного положения (3)

$$\eta = \varphi(\omega_1 + \omega_2), \quad \eta_1 = \varphi(\omega_1), \quad \eta_2 = \varphi(\omega_2), \quad (14)$$

мы видим, что при всех значениях γ_1 и γ_2

$$\varphi(\omega_1 + \omega_2) = \varphi(\omega_1) + \varphi(\omega_2).$$

Так как φ есть монотонная функция, то по теореме Коши отсюда следует, что $\varphi(\omega) = \alpha\omega$, где α — постоянная; принимая же во внимание, что при $\omega = \frac{\pi}{2}$ и $\varphi(\omega) = \frac{\pi}{2}$, приходим к заключению, что $\alpha = 1$,

$$\eta = \varphi(\omega) = \omega.$$

Вместе с тем, равенство (2) принимает вид

$$\operatorname{th} \frac{\xi}{k} = \cos \omega. \quad (15)$$

2. Второе основное уравнение в гиперболической плоскости. Последнее уравнение определяет дуговое значение угла (ω) по линейному (ξ). Но оно допускает и иное истолкование, не менее важное. Вследствие того, что $\omega = \Pi(\xi)$ (1), его можно написать в виде

$$\cos \Pi(\xi) = \operatorname{th} \frac{\xi}{k} \quad (\text{XXII})$$

и вместе с тем

$$\sin \Pi(\xi) = \frac{1}{\operatorname{ch} \frac{\xi}{k}}, \quad \operatorname{tg} \Pi(\xi) = \frac{1}{\operatorname{sh} \frac{\xi}{k}}. \quad (\text{XXII}_1)$$

Соотношение (XXII) определяет угол параллельности, соответствующий данному отрезку ξ , по значению этого отрезка. Написав его в виде

$$\cos \Pi(\xi) = \frac{e^{\frac{\xi}{k}} - e^{-\frac{\xi}{k}}}{e^{\frac{\xi}{k}} + e^{-\frac{\xi}{k}}}, \quad (\text{XXII}_2)$$

мы отсюда получаем $\frac{1 - \cos \Pi(\xi)}{1 + \cos \Pi(\xi)} = e^{-2\frac{\xi}{k}}$ или

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} \Pi(\xi) = e^{-\frac{\xi}{k}}. \quad (\text{XXIII})$$

Эта замечательная формула, в наиболее простой форме выражающая соотношение между отрезком ξ и его углом параллельности $\Pi(\xi)$, была впервые также установлена Лобачевским и опубликована им в 1829 г. в мемуаре «О началах геометрии»; ее называют вторым основным уравнением гиперболической плоскости. Приведенный вывод принадлежит Либману^[88]. Вывод Лобачевского по ходу вычислений гораздо проще, но он основан на стереометрических соображениях и потому будет изложен ниже, в главе X.

Мы воспользовались настоящим выводом, во-первых, потому, что он выполнен планиметрическими средствами; во-вторых, он применим не только в плоскости L_2 , но и в H_2 .

Заметим, что Лобачевский рассматривал ξ как число, выражающее длину соответствующего отрезка. Но так как постоянная k изменяется пропорционально выбранной единице длины (§ 35, рубр. 1, стр. 280), то угол $\Pi(\xi)$, определяемый уравнением (XXIII), не зависит от выбора единицы меры, а зависит только от самого отрезка.

3. Вторая форма уравнений прямоугольного треугольника. Полученные формулы дают возможность преобразовать уравнения прямоугольного треугольника и притом различным образом. Прежде всего, в уравнениях (XIX) (стр. 288) мы можем заменить линейные задания углов — дугowymi. Именно, согласно (XXII) и (XXII₁), положим

$$\operatorname{th} \frac{a}{k} = \cos A, \quad \operatorname{ch} \frac{a}{k} = \frac{1}{\sin A}, \quad \operatorname{sh} \frac{a}{k} = \operatorname{ctg} A; \quad (16)$$

$$\operatorname{th} \frac{b}{k} = \cos B, \quad \operatorname{ch} \frac{b}{k} = \frac{1}{\sin B}, \quad \operatorname{sh} \frac{b}{k} = \operatorname{ctg} B. \quad (17)$$

Произведя эту замену, мы приведем уравнения к следующему виду (формулы даны в несколько другом порядке):

$$\operatorname{sh} \frac{a}{k} = \operatorname{sh} \frac{c}{k} \sin A, \quad (\text{XXIV}_1) \quad \operatorname{th} \frac{a}{k} = \operatorname{th} \frac{c}{k} \cos B, \quad (\text{XXIV}_6)$$

$$\operatorname{sh} \frac{b}{k} = \operatorname{sh} \frac{c}{k} \sin B, \quad (\text{XXIV}_2) \quad \operatorname{th} \frac{b}{k} = \operatorname{th} \frac{c}{k} \cos A, \quad (\text{XXIV}_7)$$

$$\operatorname{th} \frac{a}{k} = \operatorname{sh} \frac{b}{k} \operatorname{tg} A, \quad (\text{XXIV}_8) \quad \cos B = \operatorname{ch} \frac{b}{k} \sin A, \quad (\text{XXIV}_9)$$

$$\operatorname{th} \frac{b}{k} = \operatorname{sh} \frac{a}{k} \operatorname{tg} B, \quad (\text{XXIV}_4) \quad \cos A = \operatorname{ch} \frac{a}{k} \sin B, \quad (\text{XXIV}_{10})$$

$$\operatorname{ch} \frac{c}{k} = \operatorname{ch} \frac{a}{k} \operatorname{ch} \frac{b}{k}, \quad (\text{XXIV}_5) \quad \operatorname{ctg} A \operatorname{ctg} B = \operatorname{ch} \frac{c}{k}. \quad (\text{XXIV}_{10})$$

Это — вторая форма уравнений прямоугольного треугольника в гиперболической плоскости. В них стороны выражены в линейной мере (заданы своими длинами), а углы — в той или иной дуговой мере. В этом виде уравнения пригодны для непосредственного вычисления одних элементов треугольника по другим при посредстве круговых (тригонометрических) и гиперболических функций.

В этом виде уравнения прямоугольного треугольника в гиперболической плоскости удобно сравнить с соответствующими уравнениями на сфере. За основные тригонометрические уравнения прямоугольного сферического треугольника можно принять, например, три следующие:

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tg} a &= \operatorname{tg} c \cos B, \\ \operatorname{tg} a &= \sin b \operatorname{tg} A, \\ \operatorname{cosec} &= \cos a \cos b. \end{aligned} \right\} \quad (\text{XXV}_1)$$

Здесь стороны выражены в дуговой мере; если обозначить через a , b , c длины сторон треугольника, а через r — длину радиуса сферы, то в угловой мере стороны выразятся отношениями $\frac{a}{r}$, $\frac{b}{r}$, $\frac{c}{r}$; предыдущие уравнения примут вид:

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tg} \frac{a}{r} &= \operatorname{tg} \frac{c}{r} \cos B, \\ \operatorname{tg} \frac{a}{r} &= \sin \frac{b}{r} \operatorname{tg} A, \\ \cos \frac{c}{r} &= \cos \frac{a}{r} \cos \frac{b}{r}. \end{aligned} \right\} \quad (\text{XXV}_2)$$

Сличая эти уравнения с уравнениями (XXIV₆), (XXIV₇) и (XXIV₅), мы видим, что уравнения гиперболической тригонометрии тем отличаются от уравнений сферической тригонометрии, что тригонометрические функции от сторон заменены соответствующими гиперболическими, а радиус сферы r — гиперболической постоянной плоскости k . Та же аналогия распространяется на все уравнения той и другой тригонометрии.

Это сопоставление можно также провести несколько иначе. Если тригонометрические и гиперболические функции выразить по известным формулам в показательных функциях, то уравнения (XXV₂) и соответствующие им формулы (XXIV₆), (XXIV₃) и (XXIV₅) гиперболической тригонометрии примут такой вид:

$$\begin{aligned} \frac{\frac{ai}{e^r} - e^{-\frac{ai}{r}}}{\frac{ai}{e^r} + e^{-\frac{ai}{r}}} &= \frac{\frac{ci}{e^r} - e^{-\frac{ci}{r}}}{\frac{ci}{e^r} + e^{-\frac{ci}{r}}} \cos B, & \frac{\frac{a}{e^k} - e^{-\frac{a}{k}}}{\frac{a}{e^k} + e^{-\frac{a}{k}}} &= \frac{\frac{c}{e^k} - e^{-\frac{c}{k}}}{\frac{c}{e^k} + e^{-\frac{c}{k}}} \cos B, \\ \frac{\frac{ai}{e^r} - e^{-\frac{ai}{r}}}{\frac{ai}{e^r} + e^{-\frac{ai}{r}}} &= \frac{1}{2} \left(\frac{bi}{e^r} - e^{-\frac{bi}{r}} \right) \operatorname{tg} A, & \frac{\frac{a}{e^k} - e^{-\frac{a}{k}}}{\frac{a}{e^k} + e^{-\frac{a}{k}}} &= \frac{1}{2} \left(\frac{b}{e^k} - e^{-\frac{b}{k}} \right) \operatorname{tg} A, \\ \frac{ci}{e^r} + e^{-\frac{ci}{r}} &= \frac{1}{2} \left(\frac{ai}{e^r} + e^{-\frac{ai}{r}} \right) \left(\frac{bi}{e^r} + e^{-\frac{bi}{r}} \right) & \frac{c}{e^k} + e^{-\frac{c}{k}} &= \frac{1}{2} \left(\frac{a}{e^k} + e^{-\frac{a}{k}} \right) \left(\frac{b}{e^k} + e^{-\frac{b}{k}} \right). \end{aligned}$$

Сличение левых и правых формул приводит к тому, что уравнения гиперболической тригонометрии получаются из уравнений сферической тригонометрии, если радиус сферы r заменить через ki . Гиперболическая плоскость формально может быть рассматриваема как сфера мнимого радиуса; формально — в том смысле, что одни формулы переходят в другие заменой действительного радиуса r мнимым. В неотчетливой форме эту мысль высказывал уже Ламберт¹⁾ [80]; Лобачевский дал ей точное выражение. И именно то обстоятельство, что уравнения созданной им «Воображаемой геометрии» получаются из уравнений сферической геометрии заменой действительного параметра (r) мнимым (ki), приводит Лобачевского к убеждению, что уравнения новой геометрии не содержат противоречия, что нет противоречия в созданной им геометрии (см. «О началах геометрии» [83], том, I стр. 260, заключение). Однако тот факт, что уравнения (XXIV) не содержат противоречия, легко обнаружить чисто алгебраически, не прибегая к замене действительного параметра мнимым. То же обстоятельство, что эти уравнения допускают такое геометрическое толкование, какое им придает «Воображаемая геометрия», этими соображениями еще отнюдь не подтверждается; найти для этого вполне убедительную аргументацию Лобачевскому не удалось; это было выполнено его последователями.

Но другого рода соображения тесно связаны с этим сопоставлением. Метрическая геометрия сферы зависит от ее радиуса. Уравнения (XXV₂) получают осуществление при любом значении r ; сферическая геометрия зависит от параметра r . Лобачевский считает, что и гиперболическая геометрия зависит от параметра k , которому теоретически может быть придано любое значение. К вопросу о конкретном значении этого параметра мы возвратимся ниже.

4. Третья форма уравнений прямоугольного треугольника. В том же направлении можно идти дальше. Можно заменить гиперболические функции от сторон тригонометрическими функциями от соответствующих углов параллельности.

Согласно формулам (XXII) и (XXII₁),

$$\operatorname{th} \frac{a}{k} = \cos \Pi(a), \quad \operatorname{ch} \frac{a}{k} = \frac{1}{\sin \Pi(a)}, \quad \operatorname{sh} \frac{a}{k} = \operatorname{ctg} \Pi(a); \quad (18)$$

¹⁾ См. выше, стр. 150.

аналогично могут быть выражены гиперболические функции от $\frac{b}{k}$ и $\frac{c}{k}$ через тригонометрические от $\Pi(b)$, $\Pi(c)$. Если это выполнить и, таким образом, заменить гиперболические функции тригонометрическими, то совокупность уравнений прямоугольного треугольника примет следующий вид:

$$\begin{array}{lll} \operatorname{ctg} \Pi(a) = \operatorname{ctg} \Pi(c) \sin A, & (\text{XXVI}_1) & \cos \Pi(a) = \cos \Pi(c) \cos B, & (\text{XXVI}_6) \\ \operatorname{ctg} \Pi(b) = \operatorname{ctg} \Pi(c) \sin B, & (\text{XXVI}_2) & \cos \Pi(b) = \cos \Pi(c) \cos A, & (\text{XXVI}_7) \\ \cos \Pi(a) = \operatorname{ctg} \Pi(b) \operatorname{tg} A, & (\text{XXVI}_3) & \sin A = \sin \Pi(b) \cos B, & (\text{XXVI}_8) \\ \cos \Pi(b) = \operatorname{ctg} \Pi(a) \operatorname{tg} B, & (\text{XXVI}_4) & \sin B = \sin \Pi(a) \cos A, & (\text{XXVI}_9) \\ \sin \Pi(c) = \sin \Pi(a) \sin \Pi(b), & (\text{XXVI}_5) & \operatorname{tg} A \operatorname{tg} B = \sin \Pi(c), & (\text{XXVI}_{10}) \end{array}$$

Этим уравнениям часто дают словесное выражение в своеобразной форме. Так как угол $\Pi(x)$ определяет отрезок x [формула (XXIII) это аналитически выражает], то на значения $\Pi(a)$, $\Pi(b)$, $\Pi(c)$, как мы знаем, можно смотреть как на задания сторон a, b, c треугольника, выраженные в угловой мере. Соответственно этому, как мы уже условились, можно $\Pi(a)$, $\Pi(b)$, $\Pi(c)$ обозначать через $\tilde{a}$, $\tilde{b}$, $\tilde{c}$, разумея под этим стороны a, b, c , заданные в угловой мере.

Уравнения (XXVI) при этом принимают вид:

$$\begin{array}{lll} \operatorname{ctg} \tilde{a} = \operatorname{ctg} \tilde{c} \sin A, & (\text{XXVII}_1) & \cos \tilde{a} = \cos \tilde{c} \cos B, & (\text{XXVII}_6) \\ \operatorname{ctg} \tilde{b} = \operatorname{ctg} \tilde{c} \sin B, & (\text{XXVII}_2) & \cos \tilde{b} = \cos \tilde{c} \cos A, & (\text{XXVII}_7) \\ \cos \tilde{a} = \operatorname{ctg} \tilde{b} \operatorname{tg} A, & (\text{XXVII}_3) & \sin A = \sin \tilde{b} \cos B, & (\text{XXVII}_8) \\ \cos \tilde{b} = \operatorname{ctg} \tilde{a} \operatorname{tg} B, & (\text{XXVII}_4) & \sin B = \sin \tilde{a} \cos A, & (\text{XXVII}_9) \\ \sin \tilde{c} = \sin \tilde{a} \sin \tilde{b}, & (\text{XXVII}_5) & \operatorname{tg} A \operatorname{tg} B = \sin \tilde{c}, & (\text{XXVII}_{10}) \end{array}$$

Так эти уравнения выражает и Лобачевский¹⁾. В этой терминологии первые два уравнения (XXVII_{1,2}) в словах выражают так: котангенс катета равен котангенсу гипотенузы, умноженному на синус противолежащего угла (теорема синусов). Вторая пара уравнений (XXVII_{3,4}) выражается так: косинус катета равен котангенсу другого катета, умноженному на тангенс противолежащего угла (теорема тангенсов). Пятое уравнение (квазипифагорова теорема) выражают так: синус гипотенузы равен произведению синусов катетов; наконец, следующие два уравнения особенно легко запоминаются: косинус катета равен косинусу гипотенузы, умноженному на косинус прилежащего угла (теорема косинусов). Само собой разумеется, что во всех этих формулировках стороны треугольника предполагаются выраженными своими угловыми заданиями (см. стр. 284).

Различные авторы пользуются уравнениями прямоугольного треугольника то в одной, то в другой форме. Лобачевский пользуется исключительно уравнениями (XXVI) даже в форме (XXVII). Напротив того, Жерар [⁹⁵] предпочитает пользоваться гиперболическими функциями, т. е. уравнениями (XXIV). Мы в дальнейших вычислениях будем пользоваться тригонометрическими уравнениями в формах (XXVI)

¹⁾ Лобачевский пишет a' , b' , c' ; в настоящее время буквы со штрихами предпочитают употреблять для обозначения дополнительных отрезков.

или (XXVII), отчасти отдавая этим дань уважения творцу неевклидовой геометрии, отчасти по их специфическому характеру в гиперболической геометрии.

Как известно, Непером было дано mnemonicское правило для запоминания формул, связывающих элементы прямоугольного сферического треугольника. А. П. Котельников дал такое же правило для запоминания уравнений прямоугольного треугольника в плоскости Лобачевского (см. Полное собрание сочинений Лобачевского [68], т. I, стр. 275). Мы, однако, полагаем, что читателю следует запомнить формулы (XXXVI) и (XXXVII), как он помнит формулы прямоугольного треугольника в евклидовой плоскости.

5. Задание прямоугольного треугольника его острыми углами. Последние три уравнения (XXVI) или (XXVII) интересны в том отношении, что они определяют все элементы прямоугольного треугольника по его острым углам. Конечно, чтобы углы A и B могли служить углами прямоугольного треугольника, их сумма должна быть меньше $\frac{\pi}{2}$. Если это имеет место, то

$$A < \frac{\pi}{2} - B, \quad B < \frac{\pi}{2} - A, \quad \sin A < \cos B, \quad \sin B < \cos A;$$

уравнения (XXVI₈) и (XXVI₉) дают поэтому для $\sin \Pi(b)$ и $\sin \Pi(a)$ значения, меньшие единицы и, следовательно, определяют действительные значения катетов a , b , — после чего уравнение (XXVI₁₀) дает действительное значение гипотенузы. Поэтому произвольно заданные два острых угла, сумма которых меньше прямого, определяют прямоугольный треугольник (см. также стр. 231).

6. Выражение общей теоремы косинусов прямолинейного треугольника через функцию $\Pi(x)$. Подобно тому, как уравнения (XXVI) и (XXVII) выражают соотношения между сторонами и углами прямоугольного треугольника через значения функции $\Pi(x)$ от его сторон (через угловые значения сторон), можно, конечно, таким же образом выразить и общие уравнения прямолинейного треугольника. Мы выполним это только по отношению к уравнениям (XXI) (стр. 290) — к так называемой общей теореме косинусов, — так как они составляют систему независимых уравнений, из которых полная система может быть выведена алгебраически — путем исключения. С этой целью, согласно формулам (XXII) и (XXII₁), заменим $\operatorname{ch} \frac{a}{k}$, $\operatorname{ch} \frac{b}{k}$, $\operatorname{ch} \frac{c}{k}$ соответственно через $\frac{1}{\sin \tilde{a}}$, $\frac{1}{\sin \tilde{b}}$, $\frac{1}{\sin \tilde{c}}$, далее $\operatorname{sh} \frac{b}{k}$ и $\operatorname{sh} \frac{c}{k}$ заменим через $\operatorname{ctg} \tilde{b}$, $\operatorname{ctg} \tilde{c}$ и, наконец, $\operatorname{th} \frac{a}{k}$ через $\cos \tilde{a}$, т. е. через $\cos A$. Выполнив эту подстановку и освободив полученное уравнение от знаменателей, получим:

$$\sin \tilde{a} = \sin \tilde{b} \sin \tilde{c} + \cos \tilde{b} \cos \tilde{c} \sin \tilde{a} \cos A. \quad (\text{XXI}')$$

В этом именно виде уравнения эти были найдены Лобачевским.

Эта другая форма уравнения косинусов (XXI) (стр. 290) — более близкая к тому выражению, которое она имеет в евклидовой геометрии. В связи с этим приведем другое выражение теоремы синусов, также более близкое к евклидовой ее формулировке. Именно, если в уравне-

ниях (XX) (стр. 290) заменить гиперболические функции от $\frac{a}{k}$, $\frac{b}{k}$, $\frac{c}{k}$, $\frac{\alpha}{k}$, $\frac{\beta}{k}$, $\frac{\gamma}{k}$ соответствующими тригонометрическими функциями от углов $\tilde{a}$, $\tilde{b}$, $\tilde{c}$, $\tilde{\alpha}$, $\tilde{\beta}$, $\tilde{\gamma}$ ¹⁾ по формулам (XXII₁), то получим:

$$\frac{\operatorname{ctg} \tilde{a}}{\sin A} = \frac{\operatorname{ctg} \tilde{b}}{\sin B} = \frac{\operatorname{ctg} \tilde{c}}{\sin C}, \quad (\text{XX}')$$

т. е. котангенсы сторон относятся как синусы противолежащих им углов.

7. Обзор установленных уравнений прямолинейной тригонометрии.

Чтобы читателю было яснее сопоставление установленных уравнений тригонометрии, сделаем здесь в заключение обзор их вывода. Точкой отправления служат латентные уравнения Лобачевского — две их системы (VII) и (VIII) (стр. 213 и 223—224). Ввиду их неэффективности, от них необходимо перейти к таким уравнениям, которые содержат известные нам функции. Для осуществления этого прежде всего устанавливается соотношение, связывающее тангенциальное и нормальное расстояние точки от предельной линии (XV) (стр. 282). С его помощью выводятся уравнения (XVII₁₋₁₀) (стр. 287), составляющие уже полную систему уравнений прямоугольного треугольника. Однако они предполагают, что острые углы заданы линейно (α , β) и, кроме того, содержат отрезки, дополнительные к сторонам треугольника (a' , b' , c') и к отрезкам, определяющим углы треугольника (α' , β'). Чтобы освободить эти уравнения от дополнительных отрезков, нужно разыскать аналитическое выражение дополнительного отрезка через исходный (XVIII) (стр. 288). Когда это выполнено, уравнения прямоугольного треугольника приводятся к виду (XIX) (стр. 289); они уже содержат только пять отрезков a , b , c , α , β (стороны и углы в линейном задании последних). Следующий шаг заключается в том, чтобы от линейного задания углов перейти к дуговому их заданию. Средством для этого служит основное уравнение Лобачевского (XXIII) (стр. 294) и вытекающие из него соотношения (XXII) и (XXII₁), при помощи которых мы от уравнений (XIX) уже переходим к уравнениям (XXIV) (стр. 295). Строго говоря, это уже окончательная форма тригонометрических уравнений прямоугольного треугольника; многие авторы в настоящее время ими непосредственно пользуются. Однако при помощи того же основного уравнения (XXIII) мы имеем возможность перейти от гиперболических функций от $\frac{a}{k}$, $\frac{b}{k}$, $\frac{c}{k}$ к тригонометрическим функциям углов $\Pi(a)$, $\Pi(b)$, $\Pi(c)$ и получаем уравнения Лобачевского (XXVI) или (XXVII) (стр. 297).

В дальнейшем, чтобы быть ближе к Лобачевскому, не нарушая простоты вычислений, мы пользуемся, главным образом, этими последними уравнениями. К тому же многие вычисления в этом порядке, несомненно, проходят проще, а полученные формулы допускают наиболее отчетливое сопоставление с соответствующими формулами евклидовой геометрии. Нужно только иметь в виду, что тригонометрические функции от углов $\Pi(a)$, $\Pi(b)$, $\Pi(c)$ всегда остаются гиперболическими функциями аргументов $\frac{a}{k}$, $\frac{b}{k}$, $\frac{c}{k}$.

¹⁾ Это, конечно, — те же гиперболические функции, только иначе выраженные.

§ 37. ТЕОРЕМА СЛОЖЕНИЯ

1. Предварительные соображения. Имея в виду воспользоваться уравнениями (XXVII), мы должны к этому приспособить некоторые выше выведенные формулы. Формула (XVI₁) (стр. 283), выражающая длину предельной дуги по ее высоте, теперь, в силу соотношения (XXII₁) (стр. 294) и равенства $S=k$, примет вид:

$$s = k \operatorname{ctg} \Pi(h). \quad (\text{XXVIII}_1)$$

Если дуга s имеет хорду l , то ее длина имеет значение:

$$s = 2k \operatorname{ctg} \Pi\left(\frac{l}{2}\right). \quad (\text{XXVIII}_2)$$

Отсюда

$$\operatorname{ctg} \Pi(h) = 2 \operatorname{ctg} \Pi\left(\frac{l}{2}\right). \quad (\text{XXVIII}_3)$$

Такова зависимость, связывающая высоту предельной дуги с ее хордой.

Эти формулы дают также возможность вывести так называемую теорему сложения для функции $\Pi(x)$, т. е. формулу, определяющую значение функции $\Pi(x \pm y)$ по данным значениям $\Pi(x)$ и $\Pi(y)$.

Пользуясь формулами перехода от тригонометрических функций угла $\Pi(x)$ к гиперболическим функциям аргумента x , можно эти формулы вывести непосредственно из формулы сложения гиперболических функций. Мы предпочитаем, однако, дать здесь прямой вывод средствами

гиперболической геометрии, которым мы позже воспользуемся для другой цели.

2. Теорема сложения. Возьмем два отрезка x и y , предположив предварительно $x \geq y$. На отрезке $AB = 2x$ (черт. 211) построим предельную дугу AEB . От середины C отрезка AB отложим отрезок $CD = y$ и через точку D проведем ось DD' этой предельной линии; она пересечет дугу AB в точке K и этим разделит ее на две части AK и KB , так что

$$\widetilde{AB} = \widetilde{AK} + \widetilde{KB}. \quad (1)$$

По формуле (XXVIII₂)

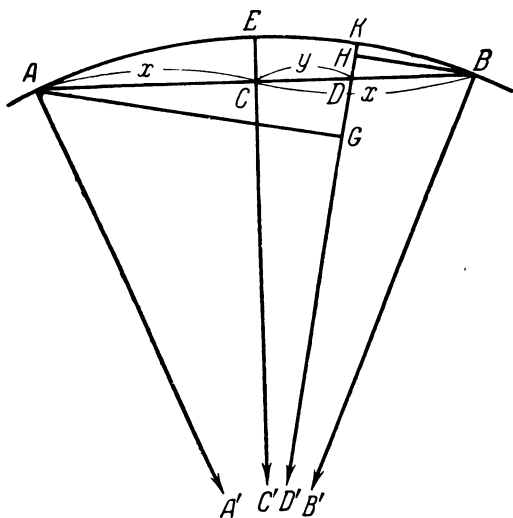
$$\widetilde{AB} = 2k \operatorname{ctg} \Pi(x). \quad (2)$$

Если проведем высоты AG и BH дуг AK и BK , то по формуле (XXVIII₁)

$$\widetilde{AK} = k \operatorname{ctg} \Pi(AG), \quad \widetilde{KB} = k \operatorname{ctg} \Pi(BH). \quad (3)$$

Но из прямоугольных треугольников ADG и BDH по формуле (XXVI₁) (стр. 297) получим:

$$\operatorname{ctg} \Pi(AG) = \operatorname{ctg} \Pi(AD) \sin ADG, \quad \operatorname{ctg} \Pi(BH) = \operatorname{ctg} \Pi(BD) \sin BDH.$$



Черт. 211.

Теперь из уравнений (4) и (6) определяем $\operatorname{ctg} \Pi(x+y)$ и $\operatorname{ctg} \Pi(x-y)$; получаем:

$$\operatorname{ctg} \Pi(x+y) = \frac{\operatorname{ctg} \Pi(x)}{\sin \Pi(y)} + \frac{\operatorname{ctg} \Pi(y)}{\sin \Pi(x)} = \frac{\cos \Pi(x) + \cos \Pi(y)}{\sin \Pi(x) \sin \Pi(y)}, \quad (\text{XXIX}_1)$$

$$\operatorname{ctg} \Pi(x-y) = \frac{\operatorname{ctg} \Pi(x)}{\sin \Pi(y)} - \frac{\operatorname{ctg} \Pi(y)}{\sin \Pi(x)} = \frac{\cos \Pi(x) - \cos \Pi(y)}{\sin \Pi(x) \sin \Pi(y)}, \quad (\text{XXIX}_2)$$

($x > y$).

Первая из этих формул в силу этого вывода и симметрии правой части пригодна для всех значений аргументов x и y , вторая предполагает $x > y$. Однако, если учесть формулу (VI₂) (стр. 210), определяющую функцию $\Pi(x)$ для отрицательных значений аргумента, то окажется, что и вторая формула справедлива при всех значениях x и y .

Из этих формул простым вычислением получаем далее:

$$\cos \Pi(x+y) = \frac{\cos \Pi(x) + \cos \Pi(y)}{1 + \cos \Pi(x) \cos \Pi(y)}, \quad (\text{XXIX}_3)$$

$$\cos \Pi(x-y) = \frac{\cos \Pi(x) - \cos \Pi(y)}{1 - \cos \Pi(x) \cos \Pi(y)}. \quad (\text{XXIX}_4)$$

Комбинируя же эти два равенства с двумя предыдущими, находим:

$$\sin \Pi(x+y) = \frac{\sin \Pi(x) \sin \Pi(y)}{1 + \cos \Pi(x) \cos \Pi(y)}, \quad (\text{XXIX}_5)$$

$$\sin \Pi(x-y) = \frac{\sin \Pi(x) \sin \Pi(y)}{1 - \cos \Pi(x) \cos \Pi(y)}. \quad (\text{XXIX}_6)$$

Формулы (XXIX) и носят название формул сложения для функции $\Pi(x)$.

3. Формулы умножения и деления аргумента. Полагая в уравнениях (XXIX_{1,3,5}) $x = y$, получаем:

$$\operatorname{ctg} \Pi(2x) = \frac{2 \cos \Pi(x)}{\sin^2 \Pi(x)}, \quad (\text{XXX}_1)$$

$$\cos \Pi(2x) = \frac{2 \cos \Pi(x)}{1 + \cos^2 \Pi(x)}, \quad (\text{XXX}_2)$$

$$\sin \Pi(2x) = \frac{\sin^2 \Pi(x)}{1 + \cos^2 \Pi(x)}. \quad (\text{XXX}_3)$$

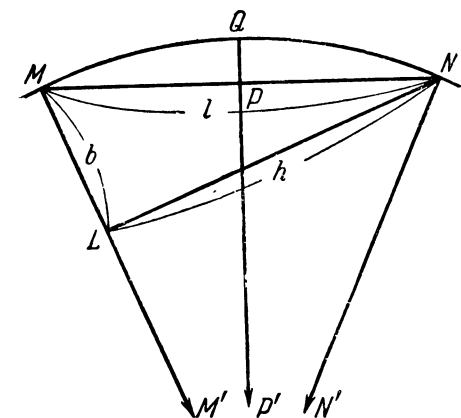
Последнее уравнение дает (после замены аргумента $2x$ через x):

$$\sin \Pi\left(\frac{x}{2}\right) = \sqrt{\frac{2 \sin \Pi(x)}{1 + \sin \Pi(x)}}, \quad (\text{XXX}_4)$$

$$\begin{aligned} \cos \Pi\left(\frac{x}{2}\right) &= \sqrt{\frac{1 - \sin \Pi(x)}{1 + \sin \Pi(x)}} = \\ &= \frac{\cos \Pi(x)}{1 + \sin \Pi(x)}, \quad (\text{XXX}_5) \end{aligned}$$

$$\operatorname{tg} \Pi\left(\frac{x}{2}\right) = \sqrt{\frac{2 \sin \Pi(x)}{1 - \sin \Pi(x)}}. \quad (\text{XXX}_6)$$

4. Соотношения, связывающие хорду, основание и высоту предельной дуги. Последними формулами воспользуемся для установления соотношений, связывающих хорду, основание и высоту предельной



Черт. 213.

дуги. Пусть l будет длина хорды предельной дуги MQN (черт. 213), h и b длины ее высоты NL и отрезка ML , который иначе называют ее основа-

нием. Формулу (XXVIII₃) (стр. 300) можно теперь написать в виде:

$$\operatorname{ctg} \Pi(h) = 2 \operatorname{ctg} \Pi\left(\frac{l}{2}\right) = \sqrt{\frac{2(1 - \sin \Pi(l))}{\sin \Pi(l)}}. \quad (\text{XXX}_7)$$

Далее, если P и Q суть середины хорды и дуги MN , то $\frac{l}{2}$ есть высота предельной дуги MQ , QP — ее ось; $\angle LMP = \Pi\left(\frac{l}{2}\right)$. Вместе с тем, из треугольника LMN по формуле (XXVI₃) (стр. 297) имеем:

$$\operatorname{ctg} \Pi(b) = \cos \Pi(h) \operatorname{ctg} \Pi\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{1}{2} \operatorname{ctg} \Pi(h) \cos \Pi(h) = \frac{1}{2} \frac{\cos^2 \Pi(h)}{\sin \Pi(h)}. \quad (\text{XXX}_8)$$

Наконец, из того же треугольника (LMN) по теореме косинусов (XXVI₄) (стр. 297) и в силу формул (XXX₂) и (XXX₃) имеем:

$$\cos \Pi(b) = \cos \Pi(l) \cos \Pi\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{2 \cos^2 \Pi\left(\frac{l}{2}\right)}{1 + \cos^2 \Pi\left(\frac{l}{2}\right)} = 1 - \sin \Pi(l); \quad (\text{XXX}_9)$$

уравнение (XXX₇) выражает высоту предельной дуги через ее хорду, а формулы (XXX₈) и (XXX₉) выражают основание предельной дуги соответственно через ее высоту и хорду.

§ 38. ТРИГОНОМЕТРИЯ ЧЕТЫРЕХУГОЛЬНИКА

1. Соотношения, связывающие стороны трипрямоугольника с его главной диагональю. Мы знаем, что каждому трипрямоугольнику с основаниями e , f , высотами h_e и h_f и острым углом (заданным в линейной мере) γ , сопутствует прямоугольный треугольник со сторонами

$$a = e, \quad b = \gamma, \quad c = h_e, \quad \alpha = h_f, \quad \beta = f' \quad (1)$$

[(XII₁), стр. 219]. Следовательно, если в уравнения, связывающие стороны и углы прямоугольного треугольника, вместо его элементов подставим элементы (1) трипрямоугольника, то получим уравнения, связывающие стороны и острый угол трипрямоугольника. Так как трипрямоугольник, как и прямоугольный треугольник, имеет пять основных элементов и определяется любыми двумя из них, то полная система соотношений между его элементами содержит 10 уравнений. Их и можно получить из уравнений (XIX) подстановкой (1). После этого придется перейти от гиперболических функций к тригонометрическим и от линейного задания углов к дуговому. Чтобы избежать этих преобразований и вместе с тем разнообразить методы вычислений, мы пойдем другим путем, именно — непосредственным применением окончательных уравнений прямоугольного треугольника.

Пусть $ABCD$ будет трипрямоугольник (черт. 214), стороны которого размечены на чертеже; прямой угол C разбивается диагональю δ на острые углы C_1 и C_2 , острый угол A — на углы A_1 и A_2 . Из прямоугольного треугольника ABC по теореме косинусов (XXVII₄) (стр. 297) имеем:

$$\cos \tilde{f} = \cos \tilde{\delta} \cos C_1 = \cos \tilde{\delta} \sin C_2. \quad (2)$$

Таким же образом из прямоугольного треугольника ADC получим:

$$\cos \tilde{e} = \cos \tilde{\delta} \cos C_2 = \cos \tilde{\delta} \sin C_1;$$

из этих равенств найдем далее:

$$\cos^2 \tilde{e} + \cos^2 \tilde{f} = \cos^2 \tilde{\delta}. \quad (\text{XXXI}_1)$$

Из тех же прямоугольных треугольников по формуле (XXVII₁) получаем:

$$\text{ctg } \tilde{h}_f = \text{ctg } \tilde{\delta} \sin C_2 = \text{ctg } \tilde{\delta} \cos C_1,$$

$$\text{ctg } \tilde{h}_e = \text{ctg } \tilde{\delta} \sin C_1 = \text{ctg } \tilde{\delta} \cos C_2$$

и отсюда

$$\text{ctg}^2 \tilde{h}_e + \text{ctg}^2 \tilde{h}_f = \text{ctg}^2 \tilde{\delta}. \quad (\text{XXXI}_2)$$

Эти уравнения связывают основания трипрямоугольника с его главной диагональю $\tilde{\delta}$ ¹⁾ и его высоты с той же диагональю. Последнее уравнение имеет то преимущество, что из него можно получить диагональ $\tilde{\delta}$, какими бы ни были заданы высоты трипрямоугольника; а тогда из прямоугольных треугольников ABC и ADC по гипотенузе и катету можно найти второй катет каждого из них, т. е. можно получить основания трипрямоугольника и его построить.

Впрочем, тот факт, что две высоты три-

прямоугольника его определяют и могут быть заданы произвольно и что трипрямоугольник может быть по ним построен, вытекает из следующих простых соображений. Из соотношений (1) следует, что по высотам h_e и h_f трипрямоугольника определяются гипотенуза s и острый угол α соответствующего ему прямоугольного треугольника. Последний поэтому может быть построен, а потому может быть построен и трипрямоугольник.

2. Уравнения, связывающие основания трипрямоугольника с его высотами. Вернемся к равенству (2). Как мы видели, из прямоугольного треугольника ACD по теореме синусов (XXVII₁) (стр. 297) имеем:

$$\sin C_2 = \frac{\text{ctg } \tilde{h}_f}{\text{ctg } \tilde{\delta}}; \text{ поэтому } \cos \tilde{f} = \sin \tilde{\delta} \text{ctg } \tilde{h}_f.$$

Наконец, соотношение между катетами и гипотенузой (XXVII₃) в прямоугольнике ADC дает:

$$\sin \tilde{\delta} = \sin \tilde{e} \sin \tilde{h}_f.$$

Подставляя это в предыдущее уравнение, получаем:

$$\cos \tilde{f} = \cos \tilde{h}_f \sin \tilde{e} \quad (\text{XXXII}_1)$$

и, таким же образом,

$$\cos \tilde{e} = \cos \tilde{h}_e \sin \tilde{f}. \quad (\text{XXXII}_2)$$

В словах: косинус каждого основания трипрямоугольника равен косинусу противолежащей высоты, умноженному на синус второго основания.

Таковы первые два уравнения трипрямоугольника.

¹⁾ То-есть диагональю, проходящей через вершину острого угла трипрямоугольника.

3. Два вспомогательных уравнения. Из тех же треугольников по теореме тангенсов (XXVII₃) получаем:

$$\cos \tilde{h}_f = \operatorname{ctg} \tilde{e} \operatorname{tg} C_2, \quad \cos \tilde{h}_e = \operatorname{ctg} \tilde{f} \operatorname{tg} C_1.$$

Перемножая эти равенства почленно и имея в виду, что $\operatorname{tg} C_1 \operatorname{tg} C_2 = 1$, получим:

$$\operatorname{ctg} \tilde{e} \operatorname{ctg} \tilde{f} = \cos \tilde{h}_e \cos \tilde{h}_f. \quad (\text{XXXI}_3)$$

Далее, из тех же прямоугольных треугольников по квазипифагоровой теореме (XXVII₆) получаем:

$$\sin \tilde{e} \sin \tilde{h}_f = \sin \tilde{\delta}, \quad \sin \tilde{f} \sin \tilde{h}_e = \sin \tilde{\delta}.$$

Поэтому

$$\sin \tilde{e} \sin \tilde{h}_f = \sin \tilde{f} \sin \tilde{h}_e. \quad (\text{XXXI}_4)$$

Эти два уравнения мы называем вспомогательными, потому что каждое из них содержит по четыре элемента трипрямоугольника: мы ими воспользуемся для составления остальных уравнений трипрямоугольника.

4. Вычисление острого угла трипрямоугольника. Из прямоугольного треугольника ABC по теореме синусов (XXVII_{1,2}) и по теореме косинусов (XXVII_{6,7}) имеем:

$$\cos A_1 = \frac{\cos \tilde{h}_e}{\cos \tilde{\delta}}, \quad \sin A_1 = \frac{\operatorname{ctg} \tilde{f}}{\operatorname{ctg} \tilde{\delta}} = \frac{\operatorname{ctg} \tilde{f} \sin \tilde{\delta}}{\cos \tilde{\delta}}.$$

Таким же образом из треугольника ADC имеем:

$$\cos A_2 = \frac{\cos \tilde{h}_f}{\cos \tilde{\delta}}, \quad \sin A_2 = \frac{\operatorname{ctg} \tilde{e}}{\operatorname{ctg} \tilde{\delta}} = \frac{\operatorname{ctg} \tilde{e} \sin \tilde{\delta}}{\cos \tilde{\delta}}.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \cos A &= \cos (A_1 + A_2) = \cos A_1 \cos A_2 - \sin A_1 \sin A_2 = \\ &= \frac{\cos \tilde{h}_e \cos \tilde{h}_f - \operatorname{ctg} \tilde{e} \operatorname{ctg} \tilde{f} \sin^2 \tilde{\delta}}{\cos^2 \tilde{\delta}}. \end{aligned}$$

Заменяя же здесь произведение $\operatorname{ctg} \tilde{e} \operatorname{ctg} \tilde{f}$, согласно вспомогательному соотношению (XXXI₃), произведением $\cos \tilde{h}_e \cos \tilde{h}_f$, получаем:

$$\cos A = \cos \tilde{h}_e \cos \tilde{h}_f \quad (\text{XXXII}_3)$$

или же, в силу того же вспомогательного уравнения,

$$\cos A = \operatorname{ctg} \tilde{e} \operatorname{ctg} \tilde{f}. \quad (\text{XXXII}_4)$$

5. Вывод остальных уравнений трипрямоугольника. Исключая $\sin \tilde{f}$ из уравнения (XXXII₂) и вспомогательного уравнения (XXXI₄), получаем:

$$\operatorname{tg} \tilde{h}_e = \sin \tilde{h}_f \operatorname{tg} \tilde{e} \quad (\text{XXXII}_5)$$

и таким же образом из уравнений (XXXII₁) и (XXXI₄):

$$\operatorname{tg} \tilde{h}_f = \sin \tilde{h}_e \operatorname{tg} \tilde{f}. \quad (\text{XXXII}_6)$$

Из уравнений (XXXII₅) и (XXXII₆) имеем:

$$\sin \tilde{h}_f = \frac{\operatorname{tg} \tilde{h}_e}{\operatorname{tg} \tilde{e}}, \quad \cos \tilde{h}_f = \frac{\cos A}{\cos \tilde{h}_e}.$$

Отсюда

$$1 = \frac{\operatorname{tg}^2 \tilde{h}_e}{\operatorname{tg}^2 \tilde{e}} + \frac{\cos^2 A}{\cos^2 \tilde{h}_e}$$

или

$$\operatorname{tg}^2 \tilde{e} \cos^2 \tilde{h}_e = \sin^2 \tilde{h}_e + \cos^2 A \operatorname{tg}^2 \tilde{e} = \sin^2 \tilde{h}_e + \operatorname{tg}^2 \tilde{e} - \operatorname{tg}^2 \tilde{e} \sin^2 A$$

или, иначе,

$$\operatorname{tg}^2 \tilde{e} \sin^2 A = \operatorname{tg}^2 \tilde{e} \sin^2 \tilde{h}_e + \sin^2 \tilde{h}_e = \sin^2 \tilde{h}_e \sec^2 \tilde{e},$$

откуда

$$\sin A \sin \tilde{e} = \sin \tilde{h}_e \quad (\text{XXXII}_7)$$

и таким же образом

$$\sin A \sin \tilde{f} = \sin \tilde{h}_f. \quad (\text{XXXII}_8)$$

Остается вывести еще два уравнения. Из уравнений (XXXII₇), (XXXII₈) имеем:

$$\sin A = \frac{\sin \tilde{h}_e}{\sin \tilde{e}}, \quad \cos A = \cos \tilde{h}_e \cos \tilde{h}_f,$$

откуда

$$\operatorname{tg} A = \frac{\operatorname{tg} \tilde{h}_e}{\sin \tilde{e} \cos \tilde{h}_f}.$$

Но, в силу уравнения (XXXII₁) (стр. 304), знаменатель этой дроби равен $\cos \tilde{f}$, и потому

$$\operatorname{tg} \tilde{h}_e = \operatorname{tg} A \cos \tilde{f} \quad (\text{XXXII}_9)$$

и таким же образом

$$\operatorname{tg} \tilde{h}_f = \operatorname{tg} A \cos \tilde{e}. \quad (\text{XXXII}_{10})$$

Читателю было бы полезно получить эти десять уравнений непосредственно из уравнений прямоугольного треугольника (1) указанной выше подстановкой (XII).

Приведем первое применение этих формул. Из точки C (черт. 214 на стр. 304), как из центра, радиусом, равным $AD (= h_f)$, сделаем на BA засечку в точке E (так что $CE = h_f$). Из прямоугольного треугольника BCE имеем:

$$\cos BCE = \frac{\cos \Pi(CB)}{\cos \Pi(CE)} = \frac{\cos \tilde{f}}{\cos \tilde{h}_f}.$$

В силу соотношения (XXXII₁), отсюда следует, что

$$\cos BCE = \sin \tilde{e};$$

поэтому

$$\sin ECD = \sin \tilde{e}, \quad \angle ECD = \tilde{e} = \Pi(e).$$

Следовательно, $\vec{CE} \parallel \vec{DA}$. Это согласуется с теоремой [8а] § 24 [рубр. 15 (стр. 207—208), доказанной без помощи вычислений.

§ 6. Тригонометрические соотношения в равнобедренном трипрямоугольнике. Под равнобедренным трипрямоугольником некоторые авторы (Н. М. Несторович) разумеют такой трипрямоугольник, в котором основания равны ($e = f$). В таком трипрямоугольнике равны и высоты ($h_e = h_f$); и обратно, в трипрямоугольнике, в котором равны высоты,

равны и основания. Диагональ, идущая к вершине острого угла, делит прямой угол, из вершины которого она выходит, пополам. Равнобедренный трипрямоугольник определяется основанием или высотой или острым углом; по этим данным он и может быть построен. В самом деле, если дано основание ($e = f$), то соответствующий трипрямоугольник легко непосредственно построить, однако, при условии $e < J$ (т. е. $\Pi(e) > \frac{\pi}{4}$) (стр. 262). Если дана высота ($h = h_e = h_f$), то задание сводится к построению прямоугольного треугольника (составляющего половину трипрямоугольника) по катету h и противолежащему углу $\frac{\pi}{4}$, что всегда возможно (§ 27, рубр. 3, стр. 231). Наконец, если задан острый угол A , то задача приводится к построению прямоугольного треугольника по острым углам $\frac{\pi}{4}$ и $\frac{A}{2}$, что всегда возможно, так как их сумма меньше $\frac{\pi}{2}$ (см. стр. 298). Тригонометрические формулы (XXXII) для равнобедренного трипрямоугольника значительно упрощаются; именно, формулы (XXXII₁) и (XXXII₂) (стр. 304) принимают вид:

$$\operatorname{ctg} \tilde{e} = \cos \tilde{h}. \quad (\text{XXXII}'_1)$$

С этим совпадает вспомогательная формула (XXXI₃), а формула (XXXI₄) обращается в тождество. Формулы (XXXII₃) и (XXXII₄) (стр. 305) принимают вид:

$$\cos A = \cos^2 \tilde{h} = \operatorname{ctg}^2 \tilde{e}. \quad (\text{XXXII}'_2)$$

Формулы (XXXII₅) и (XXXII₆) вновь приводят к уравнению (XXXII'₁). Далее, формулы (XXXII₇) и (XXXII₈) совпадают, давая соотношение

$$\sin \tilde{h} = \sin \tilde{e} \sin A. \quad (\text{XXXII}'_3)$$

И, наконец, формулы (XXXII_{9,10}) принимают вид:

$$\operatorname{tg} \tilde{h} = \cos \tilde{e} \operatorname{tg} A. \quad (\text{XXXII}'_4)$$

По существу, эти равенства представляют собой соотношения, имеющие место в прямоугольном треугольнике, один из острых углов которого равен $\frac{\pi}{4}$.

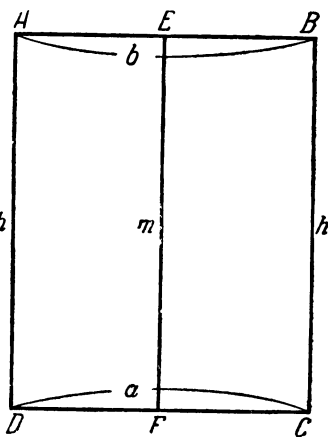
7. Соотношения в четырехугольнике Саккери. В четырехугольнике Саккери $ADCB$ (черт. 215) с нижним основанием DC (a), верхним основанием AB (b) и боковыми сторонами $AD = BC = h$ проведем среднюю линию $EF = m$. Он разделится на два трипрямоугольника с

элементами $e = \frac{a}{2}$, $f = m$, $h_e = \frac{b}{2}$, $h_f = h$. Применяя к одному из них установленные выше уравнения, можно получить все десять уравнений четырехугольника Саккери. Мы выведем только те из них, которые нам впоследствии понадобятся.

Из (XXXII₂) и (XXXII₁):

$$\cos \Pi\left(\frac{a}{2}\right) = \cos \Pi\left(\frac{b}{2}\right) \sin \tilde{m}, \quad (\text{XXXIII}_1)$$

$$\cos \tilde{m} = \cos \tilde{h} \sin \Pi\left(\frac{a}{2}\right). \quad (\text{XXXIII}_2)$$



Черт. 215.

Из (XXXII_{3,5}):

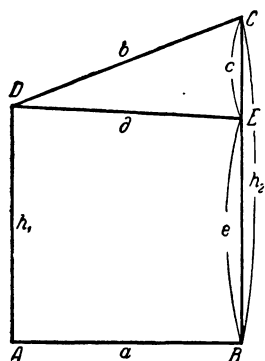
$$\operatorname{tg} \tilde{h} = \sin \Pi \left(\frac{b}{2} \right) \operatorname{tg} \tilde{m}, \quad (\text{XXXIII}_3)$$

$$\operatorname{tg} \Pi \left(\frac{b}{2} \right) = \sin \tilde{h} \operatorname{tg} \Pi \left(\frac{a}{2} \right). \quad (\text{XXXIII}_4)$$

Из (XXXII_{3,4}):

$$\cos A = \cos \Pi \left(\frac{b}{2} \right) \cos \tilde{h} = \operatorname{ctg} \Pi \left(\frac{a}{2} \right) \operatorname{ctg} \tilde{m}. \quad (\text{XXXIII}_{5,6})$$

8. Соотношения в четырехугольнике с двумя прямыми углами. Различают два типа четырехугольников с двумя прямыми углами (§ 23, рубр. 3, стр. 194): двупрямоугольные четырехугольники первого рода, в которых прямые углы противолежат один другому, и двупрямоугольные четырехугольники второго рода (двупрямоугольники), в которых прямые углы прилежат к одной и той же стороне¹⁾. Мы не будем развешивать всю тригонометрию, относящуюся к этим четырехугольникам, а проведем только по одному вычислению — одно для двупрямоугольников, второе — для двупрямоугольных четырехугольников первого рода. Результаты этих вычислений нам понадобятся ниже.



Черт. 216.

Положим, что в двупрямоугольнике $ABCD$ (черт. 216) прямые углы A и B прилежат к основанию $AB(a)$, боковые стороны (так называемые высоты) двупрямоугольника обозначим через h_1 и h_2 , и по этим данным a, h_1, h_2 вычислим второе основание $DC(b)$. Из двух углов C и D по крайней мере один будет острым; пусть это будет угол C . Опустим перпендикуляр DE на сторону BC , и катеты прямоугольного треугольника CDE обозначим через c и $\tilde{e}$, как показано на чертеже, а отрезок EB обозначим через e . Тогда

$$\sin \tilde{b} = \sin \tilde{d} \sin \tilde{c}.$$

По теореме сложения [формула (XXIX₄), стр. 302]

$$\sin \tilde{c} = \sin \Pi (h_2 - e) = \frac{\sin \tilde{h}_2 \sin \tilde{e}}{1 - \cos \tilde{h}_2 \cos \tilde{e}},$$

так что

$$\sin \tilde{b} = \frac{\sin \tilde{d} \sin \tilde{h}_2 \sin \tilde{e}}{1 - \cos \tilde{h}_2 \cos \tilde{e}}.$$

Но из трипрямоугольника $DABE$ [формулы (XXXII₂) и (XXXI₄), стр. 304—305]

$$\cos \tilde{e} = \cos \tilde{h}_1 \sin \tilde{a},$$

$$\sin \tilde{d} \sin \tilde{e} = \sin \tilde{h}_1 \sin \tilde{a}.$$

Поэтому

$$\sin \tilde{b} = \frac{\sin \tilde{h}_1 \sin \tilde{h}_2 \sin \tilde{a}}{1 - \cos \tilde{h}_1 \cos \tilde{h}_2 \sin \tilde{a}}. \quad (\text{XXXIV}_1)$$

¹⁾ Трипрямоугольники принадлежат тому и другому типу.

Обратимся теперь к двупрямоугольному четырехугольнику $ABCD$ с прямыми углами B и D (черт. 217). Диагональ $AC(\vartheta)$ делит углы A и C на A_1, A_2 и C_1, C_2 . Из прямоугольных треугольников ABC и ADC получаем следующие формулы.

Из (XXVII₆₋₇) (стр. 297):

$$\cos A_1 = \frac{\cos \tilde{a}_1}{\cos \tilde{\vartheta}}, \quad \cos A_2 = \frac{\cos \tilde{a}_2}{\cos \tilde{\vartheta}}.$$

Из (XXVII₈₋₉):

$$\sin A_1 = \sin \tilde{a}_1 \cos C_1, \quad \sin A_2 = \sin \tilde{a}_2 \cos C_2.$$

Поэтому

$$\cos A = \cos(A_1 + A_2) = \frac{\cos \tilde{a}_1 \cos \tilde{a}_2}{\cos^2 \tilde{\vartheta}} - \sin \tilde{a}_1 \sin \tilde{a}_2 \cos C_1 \cos C_2. \quad (3)$$

Заменяя $\frac{1}{\cos^2 \tilde{\vartheta}}$ через $1 + \operatorname{tg}^2 \tilde{\vartheta}$, будем иметь:

$$\frac{\cos \tilde{a}_1 \cos \tilde{a}_2}{\cos^2 \tilde{\vartheta}} = \cos \tilde{a}_1 \cos \tilde{a}_2 + \cos \tilde{a}_1 \cos \tilde{a}_2 \operatorname{tg}^2 \tilde{\vartheta}. \quad (4)$$

Но по формулам (XXVII_{1,2})

$$\operatorname{tg} \tilde{\vartheta} = \operatorname{tg} \tilde{a}_1 \sin C_1, \quad \operatorname{tg} \tilde{\vartheta} = \operatorname{tg} \tilde{a}_2 \sin C_2.$$

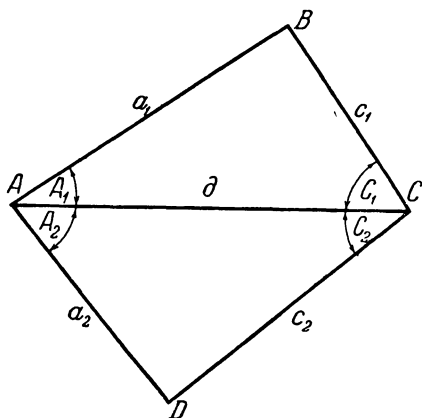
Последний член правой части равенства (4) может быть поэтому представлен в виде: $\sin \tilde{a}_1 \sin \tilde{a}_2 \sin C_1 \sin C_2$. Вместе с тем равенство (3) принимает вид:

$$\cos A = \cos \tilde{a}_1 \cos \tilde{a}_2 - \sin \tilde{a}_1 \sin \tilde{a}_2 \cos C. \quad (\text{XXXIV}_2)$$

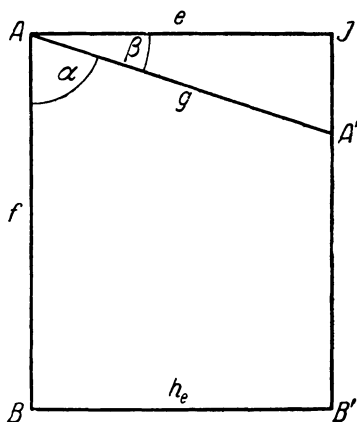
Ясно, что таким же образом

$$\cos C = \cos \tilde{c}_1 \cos \tilde{c}_2 - \sin \tilde{c}_1 \sin \tilde{c}_2 \cos A. \quad (\text{XXXIV}_3)$$

Эти формулы имеют явное сходство с теоремой косинусов сферической геометрии; это сходство имеет, конечно, основания, которые выяснятся ниже (§ 54, рубр. 4).



Черт. 217.



Черт. 218.

9. Специальное вычисление. Выполним еще следующее специальное вычисление. Пусть $ABB'J$ будет трипрямоугольник с острым углом при вершине B' (черт. 218, ср. с черт. 127 на стр. 208). Стороны его разметим, как указано на чертеже. Из вершины A проведем трансверсаль

AA' , которая встретит сторону JB' в точке A' . Согласно формуле (XXXII₂) (стр. 304),

$$\cos \tilde{e} = \cos \tilde{h}_e \sin \tilde{f}.$$

Если длину отрезка AA' обозначим через g , то из прямоугольного треугольника AJA'

$$\cos \tilde{e} = \cos \tilde{g} \cos \beta = \cos \tilde{g} \sin \alpha.$$

Поэтому предыдущее равенство можно представить в виде:

$$\cos \tilde{g} \sin \alpha = \cos \tilde{h}_e \sin \tilde{f}.$$

Если $g = h_e$, то $\sin \alpha = \sin \Pi(f)$, т. е. $AA' \parallel BB'$. И, наоборот, если $AA' \parallel BB'$, т. е. $\sin \alpha = \sin \tilde{f}$, то $g = h_e$.

Этим вновь подтверждается построение, указанное в § 24, рубр. 6 (стр. 208) и установленное там несколько кропотливо, но зато совершенно элементарными средствами, без каких бы то ни было вычислений; оно уже проверено аналитически и в рубрике 5 настоящего параграфа.

§ 39. ИЗМЕРЕНИЕ ДЛИН КРИВЫХ ПОСТОЯННОЙ КРИВИЗНЫ

1. Длина окружности. Для вычисления длины окружности в гиперболической плоскости впишем в нее правильный многоугольник с n сторонами (при $n = 2^m$ это всегда возможно на плоскости H_2). Обозначая сторону многоугольника через $2a$, а радиус окружности через r , из треугольника BCO (черт. 219) имеем:

$$\operatorname{ctg} \tilde{a} = \operatorname{ctg} \tilde{r} \sin \frac{\pi}{n};$$

Умножая обе части равенства на $2n$ и обозначая периметр многоугольника через p , придем к равенству:

$$\frac{p \operatorname{ctg} \tilde{a}}{a} = 2 \operatorname{ctg} \tilde{r} \sin \frac{\pi}{n} \cdot n.$$

Когда n неограниченно возрастает, периметр p стремится к пределу, равному длине окружности C . Отношение $\frac{\operatorname{ctg} \tilde{a}}{a}$, как видно из формулы (XXII₁) (стр. 294), стремится к $\frac{1}{k}$, а произведение $n \cdot \sin \frac{\pi}{n}$ — к числу π . Поэтому

$$C = 2\pi k \operatorname{ctg} \tilde{r} = 2\pi k \operatorname{ctg} \Pi(r), \quad (\text{XXXV})$$

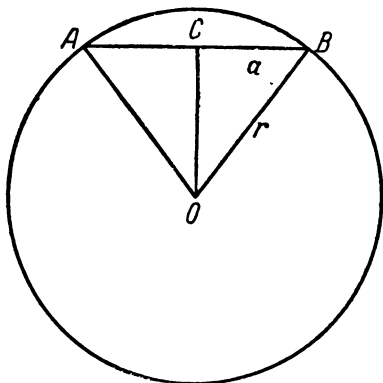
где k — гиперболическая постоянная.

Если r настолько мало по сравнению с k , что степенями отношения $\frac{r}{k}$, начиная с третьей, можно пренебречь, то $\operatorname{ctg} \Pi(r) = \operatorname{sh} \frac{r}{k} = \frac{r}{k}$, и формула принимает вид:

$$C = 2\pi r, \quad (\text{XXXV}_1)$$

как это имеет место в евклидовой геометрии.

Положим, что дуга окружности радиуса r , соответствующая центральному углу α , имеет длину s . Число, которое при измерении выражает угол α , зависит от выбора единицы меры углов. Если эта единица



Черт. 219.

выбрана так, что прямому углу соответствует число τ , а дуга σ при этом имеет численное значение ω , то

$$s : 2\pi k \operatorname{ctg} \Pi(r) = \omega : 4\tau,$$

$$\frac{s}{k \operatorname{ctg} \tilde{r}} = \frac{\pi}{2\tau} \omega.$$

Если единица угловой меры выбрана так, что прямой угол выражается числом $\frac{\pi}{2}$ (так называемый гиперболический радиан), то

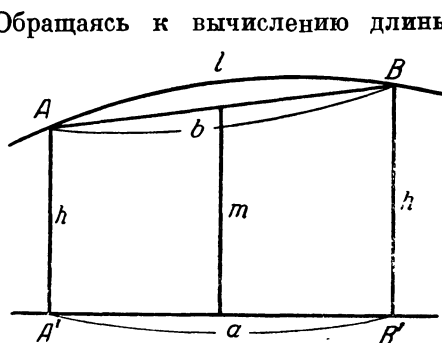
$$s = k \operatorname{ctg} \Pi(r) \omega. \quad (\text{XXXV}_2)$$

Отношение $\frac{s}{k \operatorname{ctg} \Pi(r)}$ имеет для данного центрального угла постоянное значение (т. е. не зависит от радиуса r); с изменением же угла оно пропорционально этому углу; это число принимается за радианную меру угла в гиперболической плоскости. Если предыдущее равенство написать в виде:

$$s = r\omega \frac{k \operatorname{ctg} \Pi(r)}{r} = r\omega \frac{e^{\frac{r}{k}} - e^{-\frac{r}{k}}}{2\left(\frac{r}{k}\right)},$$

то множитель при $r\omega$ стремится к единице, когда r стремится к нулю и именно отличается от единицы на величину второго порядка малости относительно $\frac{r}{k}$. Таким образом, при [столь малых значениях r , что второй степенью отношения $\frac{r}{k}$ можно пренебречь, формулу (XXXV₂) можно приближенно писать в виде $s = r\omega$, как это имеет место в евклидовой плоскости. Гиперболический радиан ($\omega = 1$) есть угол, для которого отношение центральной дуги к радиусу стремится к единице, когда радиус стремится к нулю.

2. Длина дуги эквидистанты. Обращаясь к вычислению длины $AB = l$ дуги эквидистанты (чертеж 220) по данному значению параметра h и длине соответствующего отрезка на базе ($A'B' = a$), припомним прежде всего (§ 33, рубр. 6, стр. 261), что отношение $\frac{l}{a}$ на той же эквидистанте не зависит от длины l или соответствующей ей длины a . Это отношение мы и постараемся разыскать. С этой целью возьмем произвольную дугу эквидистанты l и ее хорду обозначим через b . Из четырехугольника Саккери $AA'B'B$ по формуле (XXXIII₁) (стр. 307), сохраняя для средней линии обозначение m , получим:



Черт. 220.

$$\cos \Pi\left(\frac{a}{2}\right) = \cos \Pi\left(\frac{b}{2}\right) \sin \Pi(m).$$

Это равенство представим в следующем виде:

$$\frac{a}{l} \cdot \frac{l}{b} \cdot \frac{\cos \Pi\left(\frac{a}{2}\right)}{a} : \frac{\cos \Pi\left(\frac{b}{2}\right)}{b} = \sin \Pi(m).$$

Станем теперь длину дуги l , а вместе с тем и a и b неограниченно уменьшать. При этом отношение $\frac{l}{b}$ будет стремиться к единице, отношения же $\cos \Pi \left(\frac{a}{2} \right) : a$ и $\cos \Pi \left(\frac{b}{2} \right) : b$, согласно формуле (XXII₂), (стр. 294) стремятся к $\frac{1}{2k}$; наконец, длина средней линии m стремится к значению параметра h . Предыдущее равенство потому обнаруживает, что при этом предельном переходе

$$\lim \frac{a}{l} = \sin \Pi (h);$$

а так как отношение $\frac{a}{l}$ остается при этом процессе постоянным, то $\frac{a}{l} = \sin \Pi (h)$ или

$$l = \frac{a}{\sin \Pi (h)} = \frac{a}{\sin \tilde{h}}. \quad (\text{XXXVI})$$

Вместе с тем находим значение функции $\varphi(h)$, введенной в § 31, рубр. 4 (стр. 247); именно

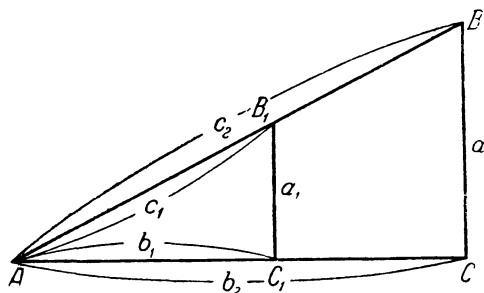
$$\varphi(h) = \frac{1}{\sin \tilde{h}}, \quad (\text{XXXVI}_1)$$

а в силу соотношения (XXII₁)

$$\varphi(h) = \text{ch } \frac{h}{k}. \quad (\text{XXXVI}_2)$$

§ 40. ТЕОРЕМЫ МЕНЕЛАЯ И ЧЕВЫ

1. Прямоугольные треугольники, имеющие общий угол. Из рубрики 5 § 36 (стр. 298) ясно, что в гиперболической плоскости прямоугольный треугольник вполне определяется своими углами. Мы это обнаружили еще раньше для всякого треугольника элементарными



Черт. 221.

соображениями, не требующими тригонометрических соотношений (§ 17, рубр. 7, теорема 8, стр. 161). Таким образом, о подобии треугольников, как мы это понимаем в евклидовой геометрии, в гиперболической плоскости не может быть речи; два прямоугольных треугольника не могут иметь больше одного общего острого угла. Однако прямоугольные треугольники, имеющие один общий угол, обладают некоторыми свойствами, напоминающими евклидову теорию подобия; это приводит в гиперболической геометрии к теоремам, также весьма близко стоящим к некоторым важным теоремам классической геометрии.

Рассмотрим два прямоугольных треугольника ABC и AB_1C_1 , имеющие общий угол A (черт. 221). Обозначая, как обыкновенно, катеты и гипотенузы треугольников через a_1, b_1, c_1 и a_2, b_2, c_2 , будем иметь:

$$\text{ctg } \tilde{a}_1 = \text{ctg } \tilde{c}_1 \sin A,$$

$$\text{ctg } \tilde{a}_2 = \text{ctg } \tilde{c}_2 \sin A.$$

Отсюда

$$\frac{\operatorname{ctg} \tilde{a}_1}{\operatorname{ctg} \tilde{a}_2} = \frac{\operatorname{ctg} \tilde{c}_1}{\operatorname{ctg} \tilde{c}_2}. \quad (\text{XXXVII}_1)$$

Таким же образом

$$\cos \tilde{b}_1 = \cos \tilde{c}_1 \cos A, \quad \cos \tilde{b}_2 = \cos \tilde{c}_2 \cos A.$$

Следовательно,

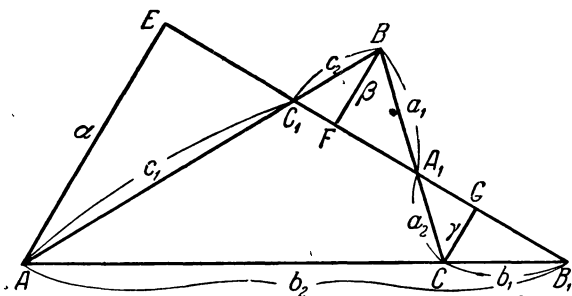
$$\frac{\cos \tilde{b}_1}{\cos \tilde{b}_2} = \frac{\cos \tilde{c}_1}{\cos \tilde{c}_2}. \quad (\text{XXXVII}_2)$$

Теорема. В прямоугольных треугольниках, имеющих общий угол, котангенсы катетов, противолежащих этому углу, относятся как котангенсы гипотенуз, а косинусы катетов, прилежащих к этому углу, относятся как косинусы гипотенуз.

Эти соотношения дают возможность установить теоремы, представляющие собой перенесение в гиперболическую плоскость теорем Менелая и Чевы.

2. Теорема Менелая. Положим, что стороны треугольника ABC рассечены трансверсалью $A_1B_1C_1$ (черт. 222) в точках B_1, A_1, C_1 . Из вершин треугольника ABC опустим перпендикуляры на эту трансверсаль,

которые обозначим через α, β, γ , как указано на чертеже. Основания перпендикуляров пусть будут E, F, G . Отрезки сечения обозначим последовательно через a_1, b_1, c_1 и a_2, b_2, c_2 , тоже как указано на чертеже (в последовательности, в которой эти отрезки размечаются обыкновенно в теореме Менелая). Прямоугольные треугольники AEC_1 и BFC_1 имеют общий угол при точке C_1 ; таким же образом треугольники AB_1E и CB_1G имеют общий угол при точке B_1 , и, наконец, треугольники CA_1G и BA_1F имеют общий угол при вершине A_1 . В силу предыдущей теоремы мы имеем равенства:



Черт. 222.

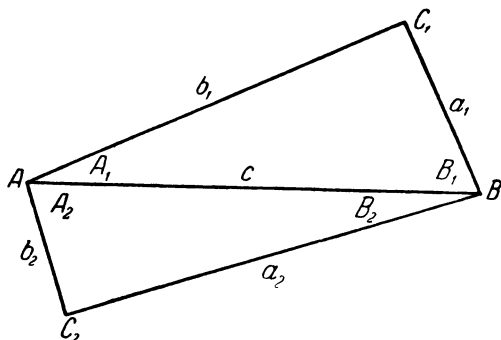
$$\frac{\operatorname{ctg} \tilde{a}_1}{\operatorname{ctg} \tilde{a}_2} = \frac{\operatorname{ctg} \tilde{\beta}}{\operatorname{ctg} \tilde{\gamma}}, \quad \frac{\operatorname{ctg} \tilde{b}_1}{\operatorname{ctg} \tilde{b}_2} = \frac{\operatorname{ctg} \tilde{\gamma}}{\operatorname{ctg} \tilde{\alpha}}, \quad \frac{\operatorname{ctg} \tilde{c}_1}{\operatorname{ctg} \tilde{c}_2} = \frac{\operatorname{ctg} \tilde{\alpha}}{\operatorname{ctg} \tilde{\beta}}.$$

Перемножая эти пропорции, получаем:

$$\operatorname{ctg} \tilde{a}_1 \cdot \operatorname{ctg} \tilde{b}_1 \cdot \operatorname{ctg} \tilde{c}_1 = \operatorname{ctg} \tilde{a}_2 \cdot \operatorname{ctg} \tilde{b}_2 \cdot \operatorname{ctg} \tilde{c}_2. \quad (\text{XXXVIII})$$

Это равенство выражает теорему, вполне аналогичную известной теореме Менелая евклидовой геометрии.

3. Прямоугольные треугольники, имеющие общую гипотенузу. Положим теперь, что прямоугольные треугольники ABC_1 и ABC_2 имеют общую гипотенузу AB (черт. 223); острые их углы обозначим через A_1 и A_2 , B_1 и B_2 , катеты — через a_1 , b_1 и a_2 , b_2 . В таком случае



Черт. 223.

$$\operatorname{ctg} \tilde{a}_1 = \operatorname{ctg} \tilde{c} \sin A_1,$$

$$\operatorname{ctg} \tilde{a}_2 = \operatorname{ctg} \tilde{c} \sin A_2,$$

$$\cos \tilde{a}_1 = \cos \tilde{c} \cos B_1,$$

$$\cos \tilde{a}_2 = \cos \tilde{c} \cos B_2.$$

Следовательно,

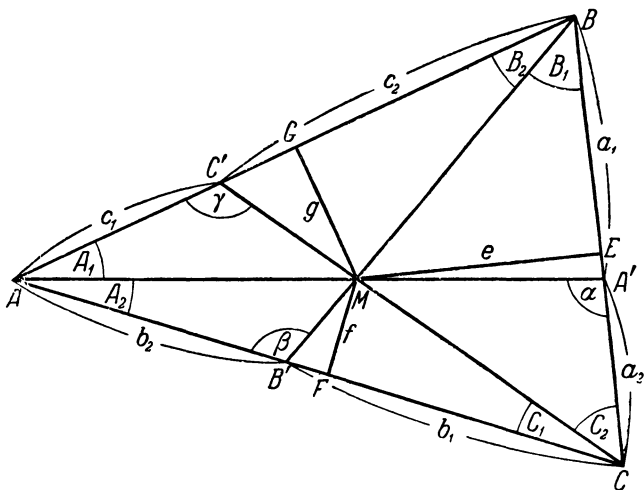
$$\frac{\operatorname{ctg} \tilde{a}_1}{\operatorname{ctg} \tilde{a}_2} = \frac{\sin A_1}{\sin A_2}, \quad \frac{\cos \tilde{a}_1}{\cos \tilde{a}_2} = \frac{\cos B_1}{\cos B_2}.$$

Точно так же

$$\frac{\operatorname{ctg} \tilde{a}_1}{\operatorname{ctg} \tilde{b}_2} = \frac{\sin A_1}{\sin B_2}, \quad \frac{\cos \tilde{a}_1}{\cos \tilde{b}_2} = \frac{\cos B_1}{\cos A_2}.$$

Теорема. В двух прямоугольных треугольниках, имеющих общую гипотенузу, котангенсы катетов относятся как синусы противолежащих им углов, а косинусы катетов — как косинусы прилежащих к ним углов.

4. Теорема, двойственная теореме Менелая. Положим теперь, что прямые, соединяющие какую-либо точку плоскости M с тремя вершинами треугольника ABC , встречают его стороны в точках A' , B' , C' ,



Черт. 224.

которые разделяют стороны последовательно на отрезки a_1 и a_2 , b_1 и b_2 , c_1 и c_2 (черт. 224). Из точки M опустим на стороны треугольника перпендикуляры ME , MF , MG , которые обозначим через e , f , g . Получим шесть прямоугольных треугольников, которые попарно

имеют общую гипотенузу. Поэтому, согласно предыдущей теореме:

$$\frac{\sin B_1}{\sin B_2} = \frac{\operatorname{ctg} \tilde{e}}{\operatorname{ctg} \tilde{g}}, \quad \frac{\sin C_1}{\sin C_2} = \frac{\operatorname{ctg} \tilde{f}}{\operatorname{ctg} \tilde{e}}, \quad \frac{\sin A_1}{\sin A_2} = \frac{\operatorname{ctg} \tilde{g}}{\operatorname{ctg} \tilde{f}}.$$

Перемножением получаем:

$$\sin A_1 \sin B_1 \sin C_1 = \sin A_2 \sin B_2 \sin C_2. \quad (\text{XXXIX})$$

Это равенство выражает предложение, двойственное теореме Менелая. Читатель без труда убедится, что это равенство остается в силе, где бы ни лежала точка M .

5. Теорема Чевы. Обозначим еще углы, которые прямые $АМА'$, $ВМВ'$, $СМС'$ образуют со сторонами треугольника ABC (с той или другой стороны — в данном случае безразлично), через α , β , γ (тот же чертеж 224). Тогда из треугольников $АВА'$ и $АСА'$ по теореме синусов (§ 36, рубр. 6, стр. 298—299) получим:

$$\frac{\operatorname{ctg} \tilde{a}_1}{\operatorname{ctg} \tilde{c}} = \frac{\sin A_1}{\sin \alpha}, \quad \frac{\operatorname{ctg} \tilde{a}_2}{\operatorname{ctg} \tilde{b}} = \frac{\sin A_2}{\sin \alpha}.$$

Точно так же из треугольников $ВСВ'$ и $ВАВ'$ и из треугольников $САС'$ и $СВС'$ имеем:

$$\begin{aligned} \frac{\operatorname{ctg} \tilde{b}_1}{\operatorname{ctg} \tilde{a}} &= \frac{\sin B_1}{\sin \beta}, & \frac{\operatorname{ctg} \tilde{b}_2}{\operatorname{ctg} \tilde{c}} &= \frac{\sin B_2}{\sin \beta}, \\ \frac{\operatorname{ctg} \tilde{c}_1}{\operatorname{ctg} \tilde{b}} &= \frac{\sin C_1}{\sin \gamma}, & \frac{\operatorname{ctg} \tilde{c}_2}{\operatorname{ctg} \tilde{a}} &= \frac{\sin C_2}{\sin \gamma}. \end{aligned}$$

Если перемножим почленно левые равенства и так же перемножим правые равенства, то получим:

$$\begin{aligned} \frac{\operatorname{ctg} \tilde{a}_1 \operatorname{ctg} \tilde{b}_1 \operatorname{ctg} \tilde{c}_1}{\operatorname{ctg} \tilde{a} \operatorname{ctg} \tilde{b} \operatorname{ctg} \tilde{c}} &= \frac{\sin A_1 \sin B_1 \sin C_1}{\sin \alpha \sin \beta \sin \gamma}, \\ \frac{\operatorname{ctg} \tilde{a}_2 \operatorname{ctg} \tilde{b}_2 \operatorname{ctg} \tilde{c}_2}{\operatorname{ctg} \tilde{a} \operatorname{ctg} \tilde{b} \operatorname{ctg} \tilde{c}} &= \frac{\sin A_2 \sin B_2 \sin C_2}{\sin \alpha \sin \beta \sin \gamma}. \end{aligned}$$

Поэтому

$$\frac{\operatorname{ctg} \tilde{a}_1 \operatorname{ctg} \tilde{b}_1 \operatorname{ctg} \tilde{c}_1}{\sin A_1 \sin B_1 \sin C_1} = \frac{\operatorname{ctg} \tilde{a}_2 \operatorname{ctg} \tilde{b}_2 \operatorname{ctg} \tilde{c}_2}{\sin A_2 \sin B_2 \sin C_2}.$$

Принимая во внимание соотношение (XXXIX), отсюда получаем:

$$\operatorname{ctg} \tilde{a}_1 \operatorname{ctg} \tilde{b}_1 \operatorname{ctg} \tilde{c}_1 = \operatorname{ctg} \tilde{a}_2 \operatorname{ctg} \tilde{b}_2 \operatorname{ctg} \tilde{c}_2. \quad (\text{XL})$$

Таково соотношение между отрезками, на которые трансверсали треугольника, идущие от вершин к общей точке, делят стороны треугольника. Это — аналог теоремы Чевы.

6. Теоремы, обратные теоремам Менелая и Чевы. Обращение обеих теорем выполняется совершенно аналогично тому, как это делается в евклидовой геометрии; доказательство основано на том, что на прямой существует только одна точка, делящая данный отрезок a на такие части a_1 , a_2 , что отношение $\operatorname{ctg} \Pi(a_1) : \operatorname{ctg} \Pi(a_2)$ имеет заданное значение. Таким образом, если три точки расположены на сторонах треугольника или их продолжениях таким образом, что имеет место соотношение (XXXVIII), то эти три точки лежат на одной прямой; точно так же, если трансверсали, выходящие из вершин треугольника, пересекают противоположные стороны таким образом, что выполняется равенство (XL), то эти трансверсали пересекаются в одной точке.

Нужно отметить тот случай, когда трансверсалими служат медианы треугольника; в этом случае равенство (XL) явно выполняется, и, следовательно, в гиперболической плоскости медианы треугольника пересекаются в одной точке. Либман дал доказательство этого предложения, которое выполняется наиболее элементарными средствами без пособия тригонометрии (во 2-м издании книги^[88]). Но он пользуется стереометрическими соображениями. Изложенное доказательство принадлежит М. Симону^[92].

§ 41. ИЗМЕРЕНИЕ ПЛОЩАДЕЙ ПРЯМОЛИНЕЙНЫХ ФИГУР

1. Постановка задачи. Задача об измерении площадей плоских фигур заключается в том, чтобы каждой фигуре отнести арифметическое (положительное) число с соблюдением двух условий: 1) равным (конгруэнтным) фигурам должно отвечать одно и то же число, 2) число, которое отнесено фигуре, составленной из нескольких фигур, должно быть равно сумме чисел, отнесенных составляющим фигурам. В настоящем параграфе мы ограничимся решением этой задачи в гиперболической плоскости по отношению к прямолинейным фигурам и соответственно этому будем иметь в виду разбиение фигуры, предусматриваемое требованием 2), на прямолинейные же многоугольники. Число, отнесенное при этом данному многоугольнику, называют его площадью (иногда — численным значением площади); многоугольники, имеющие одинаковую площадь, называются равновеликими. Равносоставленные многоугольники, т. е. составленные из равных (конгруэнтных) частей, согласно требованиям 1) и 2), равновелики. Многоугольники, которые могут быть присоединением соответственно равных (конгруэнтных) многоугольников дополнены до равных или даже равновеликих многоугольников, по той же причине равновелики.

Если установлена система измерения многоугольников [удовлетворяющая, следовательно, требованиям 1) и 2)], то мы получим другую систему измерения многоугольников, умножив численные значения всех площадей на одно и то же положительное число. Измерение площадей требованиями 1) и 2) может быть определено во всяком случае только с точностью до постоянного множителя; можно сказать, оно оставляет произвольный выбор многоугольника, площадь которого выражается числом 1, — произвольный выбор единицы меры. Учение об измерении площадей прямолинейных фигур заключается в том, чтобы: а) показать, что задача, как она формулирована выше, в этом смысле разрешается однозначно, т. е. площадь каждого многоугольника получает определенное значение, коль скоро выбрана единица меры; б) установить, как она разыскивается. Этим мы и займемся, как уже сказано, в гиперболической плоскости H_2 .

Чтобы предварительно еще упростить задачу, мы займемся сначала только измерением площади треугольника. Для того же чтобы читателю было легче следить за ее решением, укажем тут же, в чем это решение заключается. Оно сводится к тому, что во всякой системе измерения площадей многоугольников в плоскости H_2 численное значение площади треугольника пропорционально его угловому дефекту. Это значит: чтобы установить систему измерения площадей прямолинейных фигур в H_2 , необходимо и достаточно отнести каждому треугольнику число, пропорциональное его угловому дефекту; коэффициент пропорциональности определяется выбором единицы меры площадей.

2. Вспомогательные предложения. Средней линией треугольника, соответствующей какой-либо его стороне, называют прямую, соединяющую середины двух других сторон.

Теорема 1. Все треугольники, имеющие общее основание и один и тот же угловой дефект и расположенные по одну сторону основания, имеют общую среднюю линию, соответствующую этому основанию.

Доказательство. Пусть ABC будет данный треугольник (черт. 225); примем сторону AB за основание и проведем соответствующую среднюю линию EF ; из вершин A и B опустим на нее перпендикуляры AA' и BB' и из третьей вершины C опустим на нее перпендикуляр CC' . Из равенства треугольников $AA'E$ и $CC'E$, а также $BB'F$ и $CC'F$ убеждаемся, во-первых, в том, что $AA' = BB' = CC'$, во-вторых,

что $\angle A'AE = \angle C'CE$ и $\angle B'BF = \angle C'CF$. Поэтому сумма углов $A'AB$ и $B'BA$ равна сумме углов (S) данного треугольника ABC . А так как $AA'B'B$ при равенстве сторон AA' и BB' есть четырехугольник Саккери с верхним основанием AB , то углы $A'AB$ и $B'BA$ равны, так что каждый из них равен $\frac{1}{2} S$.

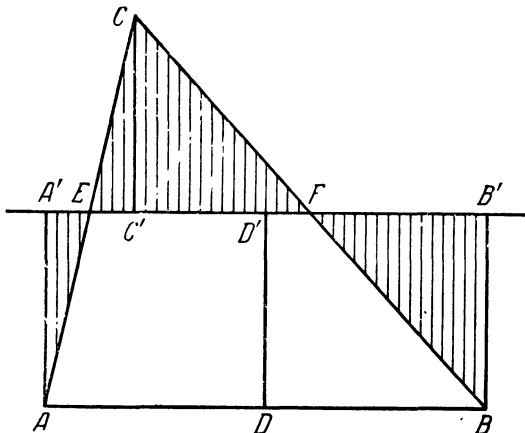
Но если даны основание и сумма углов треугольника или (что сводится к тому же) его угловой дефект, то в четырехугольнике Саккери $AA'B'B$ определены верхнее основание и углы при нем; определен поэтому весь четырехугольник (§ 23, рубр. 1, теорема 1, стр. 193), а вместе с тем определены его высота и нижнее основание $A'B'$.

Доказательство выполнено в предположении, что перпендикуляр CC' падает в точку C' , лежащую между точками E и F ; читателя не затруднит распространить его и на другие возможные случаи. Сущность доказательства основана на том, что все вершины треугольника отстоят на одно и то же расстояние от его средней линии; это есть предложение абсолютной геометрии. Это расстояние, соответствующее основанию AB , будем обозначать через h .

Отсюда следует ряд простых выводов. Средняя линия DD' четырехугольника Саккери $AA'B'B$ перпендикулярна к обоим его основаниям. Это значит:

Теорема 2. Перпендикуляр, восстановленный к стороне треугольника из ее середины, перпендикулярен к соответствующей средней линии треугольника. Это — также теорема абсолютной геометрии.

Теорема 3. Геометрическое место вершин треугольников, имеющих общее основание и общую сумму углов (общий дефект) и расположенных по одну сторону общего основания, есть эквидистанта, базой которой служит соответствующая (общая) средняя линия, а параметром — расстояние h .



Черт. 225.

димо располагать еще одним заданием, например, углом BAC' при основании AB ; проведя под этим углом к основанию луч AC' , получим в пересечении с эквидистантой третью вершину треугольника C' . Здесь нужно отметить, что угол BAC' не может быть задан совершенно произвольно: если из вершины A проведем лучи AA'' и AB'' , параллельные средней линии $A'B'$ в обе стороны, то луч AC' пересечет среднюю линию $A'B'$ и эквидистанту в том и только в том случае, если он проходит внутри угла $A''AB''$. Заметим, однако, — это нам будет необходимо, — что если при заданном основании AB и заданном угле BAC' пересечение при некотором значении суммы углов S (или дефекте δ) имеет место, то оно подавно имеет место при большем значении S (при меньшем дефекте δ), ибо с увеличением суммы углов (с уменьшением дефекта) угол $A''AB''$ возрастает; это видно из уравнения (XXXIII₆) (стр. 308), которое мы в применении к четырехугольнику $AA'B'B$ можем написать в виде:

$$\cos \frac{1}{2} S = \cos \Pi \left(\frac{a}{2} \right) \cos \Pi (h).$$

Если при постоянном a величина S возрастает, то возрастает и $\Pi(h)$.

Теорема 6. Все треугольники, имеющие общее основание и ту же сумму углов (тот же дефект), равновелики.

В самом деле, как видно на чертеже 225, все треугольники ABC , удовлетворяющие требованию, равноставлены с общим четырехугольником Саккери, равновелики ему, а следовательно, равновелики между собой.

3. Основная теорема в учении об измерении площадей.

Теорема 7 (основная теорема о площадях). При всякой системе измерения площади двух треугольников относятся одна к другой как их угловые дефекты.

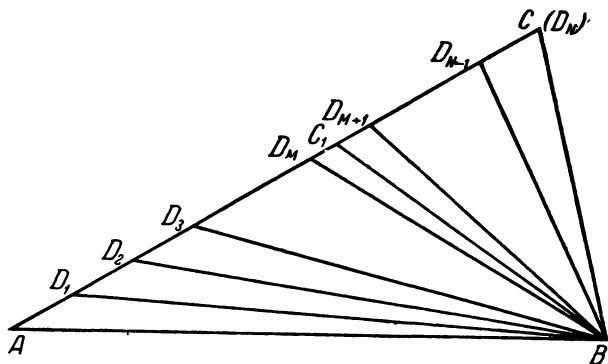
Доказательство.

а) Рассмотрим сначала два треугольника ABC и ABC_1 , из которых второй отсечен от первого трансверсалью, проходящей через вершину B (черт. 227); положим,

что в некоторой системе измерения площади их выражаются числами Δ и Δ_1 , а их угловые дефекты — числами δ и δ_1 . Угол δ в H_2 может быть разделен на 2^n частей при любом целом значении n ; положим $\theta = \frac{\delta}{2^n}$. Построим

треугольник BAD_1 с основанием AB , углом при этом основании A и угловым дефектом θ .

Как показано при доказательстве теоремы 5, это возможно, поскольку существует треугольник ABC с тем же основанием AB и углом A , в котором, однако, угловой дефект $\delta > \theta$. Согласно теореме 7 § 17 (стр. 161), треугольник ABC разобьется на два треугольника ABD_1 и BD_1C с угловыми дефектами θ и $(N-1)\theta$, где $N=2^n$.



Черт. 227.

Теперь построим треугольник BD_1D_2 с основанием BD_1 , с углом BD_1C при этом основании и угловым дефектом θ ; это опять возможно, потому что угловой дефект треугольника BD_1C превышает θ . Построив затем треугольники BD_2D_3 , BD_3D_4 , ..., $BD_{N-1}D_N$, каждый с угловым дефектом θ , мы разобьем треугольник BAC на N треугольников (точка D_N совпадает с C) с общим дефектом θ ; при этом дефект треугольника BAC $\delta = N\theta$. Точка C_1 упадет между двумя последовательными вершинами D_M и D_{M+1} (первая из них может совпасть с C_1). Поэтому

$$M\theta \leq \delta_1 < (M+1)\theta,$$

где δ_1 — дефект треугольника ABC_1 .

Вместе с тем

$$\frac{M}{N} \leq \frac{\delta_1}{\delta} < \frac{M+1}{N}. \quad (1)$$

С другой стороны, все треугольники, на которые мы разбили треугольник ABC , равновелики, так как два смежных из них всегда имеют общую сторону и общий дефект (теорема 6). Вместе с тем, если площадь каждого из них обозначим через Θ , то

$$\Delta = N\Theta,$$

$$M\Theta \leq \Delta_1 < (M+1)\Theta.$$

Поэтому

$$\frac{M}{N} \leq \frac{\Delta_1}{\Delta} < \frac{M+1}{N}. \quad (2)$$

И так как соотношения (1) и (2) имеют место, каково бы ни было значение показателя n в выражении $N = 2^n$, то отсюда следует, что

$$\frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{\delta_1}{\delta}. \quad (\text{XLII})$$

Черт. 228.

Случай а), таким образом, исчерпан.

б) Докажем теперь, что теорема всегда справедлива, когда треугольники ABC и ABC_1 имеют общую сторону AB . Если при этом $\angle BAC_1 = \angle BAC$, то мы возвращаемся к рассмотренному уже случаю а). Положим поэтому, что эти углы не равны, $\angle BAC_1 < \angle BAC$ (черт. 228). Если луч AC_1 встречает сторону BC в точке C_2 , совпадающей с C_1 , то мы снова находимся в условиях случая а). Предположим поэтому, что точка C_1 предшествует C_2 . Если обозначим площади треугольников ABC , ABC_1 , ABC_2 соответственно через Δ , Δ_1 , Δ_2 , а их угловые дефекты — через δ , δ_1 , δ_2 , то, в силу установленной теоремы для случая а), теперь имеем:

$$\Delta_1 : \Delta_2 = \delta_1 : \delta_2; \quad \Delta_2 : \Delta = \delta_2 : \delta,$$

а потому

$$\Delta_1 : \Delta = \delta_1 : \delta.$$

Если вершина второго треугольника упадет в точку C'_1 за точку C_2 , а площадь и угловой дефект треугольника ABC'_1 обозначим через Δ' и δ'_1 , то

$$\Delta'_1 : \Delta_2 = \delta'_1 : \delta_2; \quad \Delta_2 : \Delta = \delta_2 : \delta,$$

а потому

$$\Delta'_1 : \Delta = \delta'_1 : \delta.$$

с) Возьмем теперь произвольные два треугольника с площадями Δ и Δ_1 и угловыми дефектами δ и δ_1 . Построим третий треугольник, имеющий одну сторону, общую с первым треугольником, а другую — общую со вторым треугольником. Если площадь этого треугольника обозначим через Δ_2 , а дефект через δ_2 , то

$$\Delta_1 : \Delta_2 = \delta_1 : \delta_2, \quad \Delta_2 : \Delta = \delta_2 : \delta$$

и потому

$$\Delta_1 : \Delta = \delta_1 : \delta,$$

т. е. всегда имеет место пропорция (XLII). Из этой пропорции следует, что при всякой системе измерения площадей и углов

$$\Delta = c\delta, \quad (\text{XLIII})$$

где c — постоянная, зависящая от выбора единиц меры для углов и площадей. И так как выбор той и другой единицы остается произвольным, то произвольным остается и значение константы c . Угол обычно измеряется в так называемой радианной мере, при которой прямой угол выражается числом $\frac{\pi}{2}$. Но и при этих условиях значение постоянной c остается произвольным, зависит от выбора единицы площади.

Два выбора этой постоянной получают преимущественное применение. Во-первых, полагают $c=1$; в этом случае формула (XLIII) получает наиболее простой вид:

$$\Delta = \delta = \pi - A - B - C, \quad (\text{XLIII}_1)$$

— площадь треугольника выражается просто его угловым дефектом. Во-вторых, полагают $c=k^2$, где k , как обыкновенно, означает гиперболическую постоянную; в этой системе измерения

$$\Delta = k^2 \delta = k^2 (\pi - A - B - C). \quad (\text{XLIII}_2)$$

В этой системе значение площади при радианной мере углов зависит от выбора единицы длины и представляет собой величину 2-го измерения; преимущество этой системы выяснится ниже.

4. Выражение площади прямоугольного треугольника через его стороны. Если a , b и c суть катеты и гипотенуза прямоугольного треугольника, то по формулам (XXVI_{8,9}) (стр. 297)

$$\sin \Pi(a) = \frac{\sin B}{\cos A}, \quad \sin \Pi(b) = \frac{\sin A}{\cos B}.$$

Вследствие этого по формуле (XXX₆) (стр. 302)

$$\begin{aligned} \operatorname{ctg}^2 \Pi \left(\frac{a}{2} \right) &= \frac{1 - \sin \Pi(a)}{2 \sin \Pi(a)} = \frac{\cos A - \sin B}{2 \sin B} = \\ &= \frac{\sin \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{2} - A - B \right) \cos \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{2} - A + B \right)}{\sin B} = \frac{\sin \frac{\delta}{2} \cos \left(\frac{\delta}{2} + B \right)}{\sin B}, \end{aligned}$$

где δ , по обыкновению, обозначает угловой дефект треугольника. Таким же образом,

$$\operatorname{ctg}^2 \Pi \left(\frac{b}{2} \right) = \frac{\sin \frac{\delta}{2} \cos \left(\frac{\delta}{2} + A \right)}{\sin A}.$$

С другой стороны, по формуле (XXX₄) (стр. 302):

$$\sin^2 \Pi \left(\frac{c}{2} \right) = \frac{2 \sin \Pi(c)}{1 + \sin \Pi(c)}.$$

Заменяя же $\sin \Pi(c)$, согласно формуле (XXVI₁₀) (стр. 297), через $\operatorname{tg} A \operatorname{tg} B$, получим:

$$\sin^2 \Pi \left(\frac{c}{2} \right) = \frac{2 \sin A \sin B}{\cos(A-B)}.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \operatorname{ctg}^2 \Pi \left(\frac{a}{2} \right) \operatorname{ctg}^2 \Pi \left(\frac{b}{2} \right) \sin^2 \Pi \left(\frac{c}{2} \right) &= \\ &= \sin^2 \frac{\delta}{2} \frac{2 \cos \left(\frac{\delta}{2} + B \right) \cos \left(\frac{\delta}{2} + A \right)}{\cos(A-B)}. \end{aligned}$$

Легко, однако, усмотреть, что

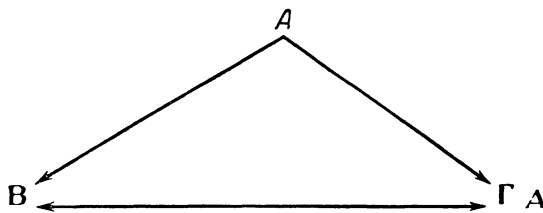
$$2 \cos \left(\frac{\delta}{2} + B \right) \cos \left(\frac{\delta}{2} + A \right) = \cos(A-B),$$

и поэтому предыдущее равенство принимает вид:

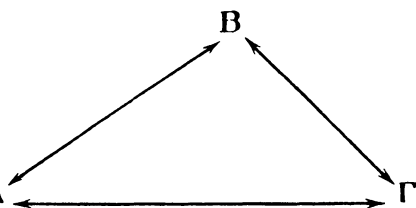
$$\sin \frac{\delta}{2} = \operatorname{ctg} \Pi \left(\frac{a}{2} \right) \operatorname{ctg} \Pi \left(\frac{b}{2} \right) \sin \Pi \left(\frac{c}{2} \right). \quad (\text{XLIV})$$

Эта формула определяет угловой дефект δ , а вместе с тем и площадь прямоугольного треугольника по его сторонам. Формула принадлежит Н. И. Лобачевскому.

5. Площадь вырожденного треугольника. Если в треугольнике ABC одна из вершин C удаляется — уходит в бесконечность ($C \rightarrow \Gamma$),



Черт. 229.



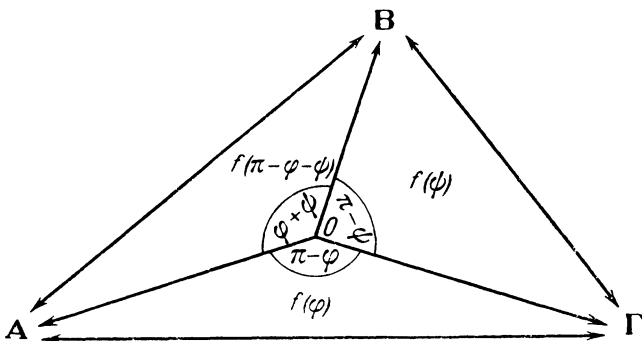
Черт. 230.

то угол C стремится к нулю; если при этом два других угла стремятся к предельным значениям A и B , то площадь треугольника [исходя из формулы (XLIII₁) (стр. 324)] стремится к предельному значению $\pi - A - B$; оно поэтому и рассматривается как площадь вырожденного треугольника с двумя конечными вершинами (двуугольника). Если и вторая вершина B уходит в бесконечность ($B \rightarrow \Gamma$), то и угол B стремится к нулю; площадь полосы, заключенной между двумя прямыми, пересекающимися под углом A , и заградительной прямой $B\Gamma'$ (черт. 229), равна $\pi - A$. Наконец, треугольник $AB\Gamma$, все вершины которого лежат в бесконечности (черт. 230), имеет площадь, равную π ; это — наибольшее значение, которое площадь треугольника может иметь. То обстоятельство, что в гиперболической плоскости площадь треугольника стремится к конечному пределу, когда его стороны неограниченно возрастают, послужило Гауссу точкой отправления при выводе общего выражения площади треугольника (XLIII). Этот вывод, правда, не безукоризненно строгий, очень любопытен. Он изложен Гауссом в письме от 6 марта 1832 г. к В. Больаи [70]. Мы этот вывод здесь воспроизводим.

6. Вывод площади треугольника, предложенный Гауссом. Гаусс исходит из допущения, что полоса, содержащаяся между двумя прямыми, пересекающимися под углом A , и заградительной прямой $B\Gamma$, ограничивающей этот угол (черт. 229), имеет конечное значение; это значение в таком случае представляет собой функцию угла A или дефекта этого вырожденного треугольника ($\pi - A$). Гаусс полагает эту площадь равной $f(\pi - A)$ и ставит себе задачей эту функцию f разыскать. Он отмечает, что особое значение имеет вырожденный треугольник $AB\Gamma'$, все вершины которого лежат в бесконечности (черт. 231), и площадь его обозначает через t . Взяв на стороне $A\Gamma'$ произвольную точку D , он проводит через нее луч DB , параллельный AB и $\Gamma'B$; углы ADB и $\Gamma'DB$, которые этот луч образует с прямой $A\Gamma'$, он обозначает через φ и $\pi - \varphi$; с изменением положения точки D на прямой $A\Gamma'$ угол φ меняется, его можно считать произвольным. Луч DB разбивает треугольник $AB\Gamma$ на два вырожденных треугольника с одной конечной вершиной (D) каждый. Согласно принятому положению, площади этих треугольников имеют значения: $f(\pi - \varphi)$ и $f(\varphi)$, а потому

$$f(\varphi) + f(\pi - \varphi) = t. \quad (3)$$

Это — первое функциональное уравнение, устанавливаемое Гауссом для разыскания функции f .



Черт. 232.

Теперь внутри того же вырожденного треугольника Гаусс произвольно выбирает точку O и из нее проводит лучи OA , OB , $O\Gamma$, параллельные каждому двум сторонам треугольника (черт. 232). Получаются три вырожденных треугольника с одной конечной вершиной каждый. Если дефекты треугольников $AO\Gamma$ и $BO\Gamma$ обозначить соответственно через φ и ψ , то дефект треугольника AOB будет $\pi - \varphi - \psi$. Поэтому площади этих треугольников будут $f(\varphi)$, $f(\psi)$, $f(\pi - \varphi - \psi)$. Вместе с тем

$$f(\varphi) + f(\psi) + f(\pi - \varphi - \psi) = t. \quad (4)$$

Но, согласно тождеству (3),

$$f(\pi - \varphi - \psi) = t - f(\varphi + \psi).$$

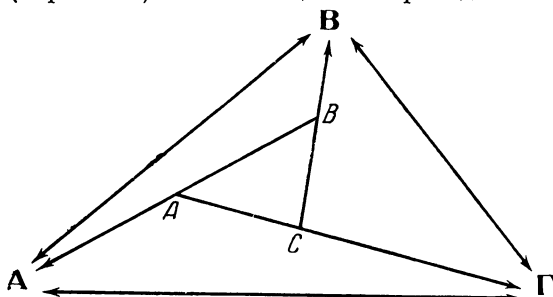
Тождество (4) дает поэтому

$$f(\varphi) + f(\psi) = f(\varphi + \psi).$$

Отсюда Гаусс заключает, что $f(\varphi) = c\varphi$. Нетрудно рассчитать и значение постоянной c . Именно, тождество (3) теперь дает:

$$c\varphi + c(\pi - \varphi) = t, \text{ т. е. } c = \frac{t}{\pi}, \quad f(\varphi) = \frac{t}{\pi} \varphi. \quad (5)$$

Теперь нетрудно уже вычислить площадь любого треугольника ABC (черт. 233). С этой целью проведем заградительные прямые для трех



Черт. 233.

углов, смежных с его внутренними углами, именно: прямую AG — заградительную для угла AAG , прямую GB — заградительную для угла $ГCB$ и прямую AB — заградительную для угла ABV . Образуется вполне вырожденный треугольник $ABГ$, который теперь разбит на четыре треугольника: AAG с площадью $\frac{t}{\pi} A$, $ГCB$ с площадью

$\frac{t}{\pi} C$, BBA с площадью $\frac{t}{\pi} B$ и, наконец, исходный треугольник ABC , площадь которого обозначим через Δ . Следовательно,

$$\frac{t}{\pi} A + \frac{t}{\pi} B + \frac{t}{\pi} C + \Delta = t.$$

Отсюда,

$$\Delta = \frac{t}{\pi} (\pi - A - B - C).$$

Это совпадает с формулой (XLIII) (стр. 324). Если мы выберем для измерения площадей единицу так, чтобы площадь t выражалась числом π , то получим выражение (XLIII₁); если же выберем эту единицу так, чтобы площадь выражалась числом πk^2 , то получим выражение (XLIII₂).

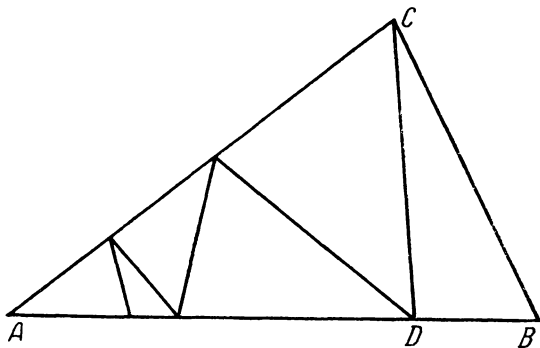
7. Площадь многоугольника. Выпуклый многоугольник с n сторонами разбивается диагоналями, выходящими из одной вершины, на $n - 2$ треугольников. Если за угловой дефект многоугольника принять $2d(n - 2) - S$, где S — сумма его углов, то он равняется сумме дефектов составляющих его треугольников. Так как и площадь его должна быть равна сумме площадей этих треугольников, то ясно, что эта площадь должна быть пропорциональна его угловому дефекту, т. е. формула (XLIII) остается в силе и для многоугольника, если под Δ разуметь его площадь. Она справедлива для всякого «простого» многоугольника, т. е. такого, в котором внутренняя точка одной стороны не может принадлежать другой стороне. Таким образом, для площади всякого простого многоугольника

$$\Delta = k^2 \delta = k^2 [\pi (n - 2) - S]. \quad (XLIII_3)$$

Эта теория, как она здесь изложена, может быть названа классической теорией площадей. Как ни различны результаты этой теории в евклидовой и гиперболической геометрии, замысел, по существу, один и тот же: доказывается, что в любой системе измерения площадей (предполагая, что таковая установлена) площадь треугольника должна быть пропорциональна некоторой величине (произведению из основания на высоту — в евклидовой геометрии, угловому дефекту — в гиперболической геометрии) и потому этой величиной измеряется. Однако С. О. Шатуновский [112] и Д. Гильберт [89] указали, что этого недостаточно, что теория площадей требует еще как в евклидовой, так и в неевклидовой геометрии существенного дополнения, которое заключается в следующем.

Равенство (XLIII) выражает только, что при всякой системе измерения площадей, удовлетворяющей поставленным двум исходным требованиям, число, измеряющее площадь треугольника, необходимо должно быть пропорционально его угловому дефекту, т. е. площадь должна измеряться угловым дефектом, выраженным в тех или иных единицах. Но достаточно ли это? Будет ли число, пропорциональное угловому дефекту, действительно удовлетворять этим двум требованиям. Что конгруэнтные треугольники имеют равные дефекты, — это ясно. Но будет ли дефект треугольника, составленного из нескольких треугольников, равен сумме дефектов составляющих треугольников? Это нуждается в доказательстве. Доказательство было дано С. О. Шатуновским.

8. Теорема Шатуновского. Для того случая, когда треугольник разбит на составляющие треугольники прямыми, выходящими из одной вершины, теорема уже, по существу, доказана. Это разбиение мы будем называть *трансверсальным*. Легко убедиться, что теорема справедлива и при другом разбиении, которое будем называть *поперечным*. Под этим названием мы разумеем такое разбиение, при котором все вершины составляющих треугольников лежат на двух сторонах данного треугольника (черт. 234).



Черт. 234.

Если треугольник разбит поперечно на два треугольника, то это деление явно можно рассматривать также, как трансверсальное, и теорема в этом случае справедлива. Мы можем поэтому доказывать теорему индуктивно по отношению к числу треугольников разбиения. Предположим, что теорема справедлива, когда число составляющих треугольников равно n ; покажем, что она справедлива также, если это число равно $n + 1$. Итак положим, что треугольник ABC разбит на $n + 1$ составляющих треугольников, вершины которых расположены на сторонах AB и AC данного треугольника. Ясно, что сторона BC в этом случае необходимо составляет также сторону одного из составляющих треугольников, третья вершина которого D лежит на одной из сторон AB и AC , скажем, на стороне AB . Угловой дефект всего треугольника ABC обозначим через δ , угловые дефекты треугольников DBC и DCA — через δ_0 и δ' , тогда $\delta = \delta_0 + \delta'$.

С другой стороны, треугольник ADC разбит поперечно на n треугольников; если обозначим их дефекты через $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n$, то, согласно допущению, $\delta' = \delta_1 + \delta_2 + \dots + \delta_n$, а потому

$$\delta = \delta_0 + \delta_1 + \dots + \delta_n$$

Теорема, таким образом, доказана для поперечного разбиения.

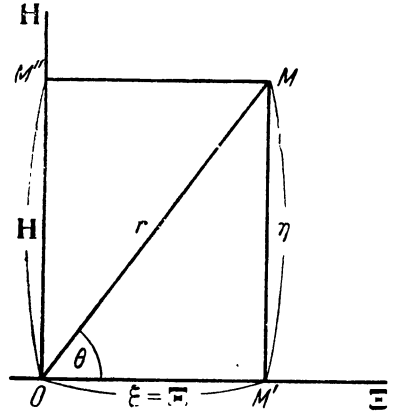
Положим теперь, что треугольник ABC разбит на треугольники каким-либо образом. Из одной из вершин, скажем, из вершины A , проведем трансверсали, проходящие через все вершины составляющих треугольников, не лежащие на сторонах AB и AC . Это приведет к трансверсальному разбиению треугольника. Трансверсали могут разбивать составляющие треугольники на треугольники и четырехугольники. В последнем случае мы в четырехугольнике проведем какую-либо диагональ; проделав это во всех четырехугольниках, мы явно достигнем того, что треугольник ABC будет разбит трансверсально на треугольники, каждый из которых будет, в свою очередь, разбит на составляющие треугольники поперечно. Если при этом какой-либо составляющий треугольник пришлось разбить, то по ходу разложения сумма дефектов треугольников, на которые он разобьется, будет равна дефекту разбиваемого треугольника. Вместе с тем, и исходный треугольник, как уже сказано, разобьется трансверсально на составляющие треугольники, которые, в свою очередь, разобьются на составляющие треугольники поперечно. Так как то и другое разбиение дает дефект, равный сумме дефектов составляющих треугольников, то дефект треугольника ABC будет равен сумме дефектов треугольников, из которых он был составлен. Теперь ясно, что достаточно отнести каждому треугольнику число, пропорциональное его угловому дефекту, чтобы этим было установлено измерение площадей треугольников, а вместе с тем и многоугольников.

ГЛАВА ВОСЬМАЯ

НАЧАЛА АНАЛИТИЧЕСКОЙ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ НА ГИПЕРБОЛИЧЕСКОЙ ПЛОСКОСТИ

§ 42. НАЧАЛА АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ

1. Две системы декартовых координат. Координация точек на гиперболической плоскости в некотором отношении более многообразна, чем в плоскости Евклида. Две взаимно перпендикулярные прямые OE и OH примем за оси координат (черт. 235). Из произвольной точки M плоскости опустим на эти оси перпендикуляры MM' и MM'' . Длины отрезков OM' (ξ) и $M'M$ (η), взятые с надлежащими знаками, как это обыкновенно делается, примем за декартовы координаты точки M (абсциссу и ординату). Они во многих отношениях представляют наибольшую аналогию с декартовыми координатами евклидовой плоскости. Во-первых, каждой точке плоскости M соответствуют определенные значения ξ и η ; и обратно, каждой паре значений ξ и η соответствует одна и только одна точка M плоскости. Во-вторых, координатными линиями $\xi = \text{const}$ служат прямые, перпендикулярные к оси OE ; координатными линиями $\eta = \text{const}$ служат эквидистантные линии, ортогональные к прямым $\xi = \text{const}$; координация ортогональная. В-третьих, когда точка M неограниченно удаляется от начала, то по крайней мере одна из координат ξ и η неограниченно возрастает.



Черт. 235.

При всем том эти координаты имеют и существенные отличия от декартовых координат евклидовой плоскости; координатный четырехугольник $MM'OM''$ имеет при точке M острый угол; длины отрезков $M'M$ и OM'' , $M''M$ и OM' не равны между собой. Поэтому длины отрезков OM' (ξ) и OM'' (η), взятые с надлежащими знаками, должны быть рассматриваемы как другая система координат. Координатными линиями в системе E, H служат перпендикуляры к одной и другой оси, и так как эти перпендикуляры пересекаются не под прямым углом, то эта координация — не ортогональная. Координация системы E, H рассматривается как вторая система, в отличие от первой ξ, η . Формулы перехода от одной из этих систем к другой получаются из трипрямоугольника $MM'OM''$ [формула (XXXII₁), стр. 304]:

$$\Xi = \xi, \quad \cos \tilde{H} = \cos \tilde{\eta} \sin \tilde{\xi}. \quad (XLV)$$

Легко видеть, что последняя формула имеет место, в какой бы четверти ни лежала точка M . Нужно только помнить основное положение (VI_2) (стр. 210).

2. Полярные координаты. Однако две системы декартовых координат имеют еще более существенное отличие одна от другой; это становится ясным при переходе к полярным координатам. За полярные координаты точки M , как и в евклидовой плоскости, принимается длина радиуса-вектора OM (r) и угол θ , который он образует с осью абсцисс. Формулы перехода от координат r, θ к координатам $\Xi, \tilde{H}$ получаются из прямоугольных треугольников $OM'M$ и $OM''M$ (черт. 235) по теореме косинусов:

$$\cos \tilde{\Xi} = \cos \tilde{r} \cos \theta, \quad \cos \tilde{H} = \cos \tilde{r} \sin \theta. \quad (XLVI)$$

Отсюда следует, что

$$\cos^2 \tilde{\Xi} + \cos^2 \tilde{H} = \cos^2 \tilde{r}. \quad (XLVII)$$

Любой точке M на плоскости соответствуют определенные значения Ξ и $\tilde{H}$, но не всякой паре значений Ξ и $\tilde{H}$ отвечает точка на плоскости.

В самом деле, для того чтобы такая точка существовала, как видно из равенства (XLVII), необходимо, чтобы было

$$\cos^2 \tilde{\Xi} + \cos^2 \tilde{H} \leq 1; \quad (1)$$

но этого и достаточно: если условие (1) выполнено, то, в случае неравенства

$$\cos^2 \tilde{\Xi} + \cos^2 \tilde{H} < 1, \quad (2)$$

уравнения (XLVI) и (XLVII) однозначно определяют r и θ — полярные координаты соответствующей точки M . При

$$\cos^2 \tilde{\Xi} + \cos^2 \tilde{H} = 1 \quad (2')$$

$\cos \tilde{r} = 1$, $\tilde{r} = 0$, $r = \infty$; значит, в случае равенства (2') значениям $\Xi, \tilde{H}$ отвечает бесконечно удаленная точка на луче, направление которого определяется тем, что

$$\cos \theta = \cos \tilde{\Xi}, \quad \sin \theta = \sin \tilde{\Xi}. \quad (XLVI_1)$$

Условие (1) легко непосредственно интерпретируется геометрически. Если на осях координат отложим отрезки Ξ и $\tilde{H}$ и из их концов M' и M'' восставим перпендикуляры, то они пересекутся и определят конечную точку M в том и только в том случае (§ 25, рубр. 6, стр. 214), если $\tilde{\Xi} + \tilde{H} > \frac{\pi}{2}$; но в таком случае

$$\begin{aligned} \cos \tilde{\Xi} &< \sin \tilde{H}, \quad \cos^2 \tilde{\Xi} < \sin^2 \tilde{H}, \\ \cos^2 \tilde{\Xi} + \cos^2 \tilde{H} &< 1. \end{aligned}$$

Если $\tilde{\Xi} + \tilde{H} = \frac{\pi}{2}$, т. е. условие (1) выполняется в форме равенства (2'), то перпендикуляры параллельны и определяют бесконечно удаленную точку.

Заметим, что уравнение (XLVII) есть не что иное, как соотношение (XXXI₁) (стр. 304), связывающее основания $\Xi, \tilde{H}$ любого трипрямоугольника с его главной диагональю r , идущей к вершине острого угла.

3. Расстояние между двумя точками. Если $\xi_1, \eta_1; \xi_2, \eta_2$ суть декартовы координаты первого рода двух точек M_1 и M_2 (черт. 236), то расстояние между ними определяется из двупрямоугольника $M_1M'_1M'_2M_2$ по формуле (XXXIV₁) (стр. 308), полагая в ней $h_1 = \eta_1$, $h_2 = \eta_2$, $a = M'_1M'_2 = \xi_2 - \xi_1$ и обозначая расстояние M_1M_2 через ρ , получим:

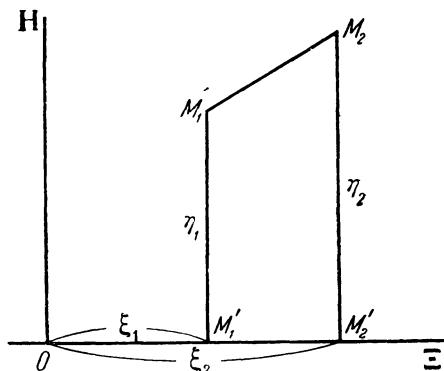
$$\sin \tilde{\rho} = \frac{\sin \tilde{\eta}_1 \sin \tilde{\eta}_2 \sin \Pi (\xi_2 - \xi_1)}{1 - \cos \tilde{\eta}_1 \cos \tilde{\eta}_2 \sin \Pi (\xi_2 - \xi_1)}.$$

(XLVIII)

Если $\sin \Pi (\xi_2 - \xi_1)$ выразить по формуле (XXIX₆) (стр. 302), то получим:

$$\begin{aligned} \sin \tilde{\rho} &= \\ &= \frac{\sin \tilde{\eta}_1 \sin \tilde{\eta}_2 \sin \tilde{\xi}_1 \sin \tilde{\xi}_2}{1 - \cos \tilde{\xi}_1 \cos \tilde{\xi}_2 - \cos \tilde{\eta}_1 \cos \tilde{\eta}_2 \sin \tilde{\xi}_1 \sin \tilde{\xi}_2}. \end{aligned}$$

(XLVIII₁)



Черт. 236.

Эта громоздкая формула допускает, однако, при переходе к другим координатам значительное упрощение.

4. Бельтрамиевы координаты. Введем теперь новые координаты точки x, y , полагая:

$$x = \cos \tilde{E} = \cos \tilde{\xi}, \quad y = \cos \tilde{H} = \cos \tilde{\eta} \sin \tilde{\xi}. \quad (\text{XLIX})$$

К этим координатам впервые пришел Бельтрами при решении картографической задачи, о которой мы будем говорить во второй части настоящего сочинения; их называют в настоящее время бельтрамиевыми координатами.

Соотношение (XLVII) можно написать в виде:

$$x^2 + y^2 = \cos^2 \Pi(r). \quad (\text{XLVII}_1)$$

Отсюда ясно, что при конечном r (и, следовательно, при $\cos^2 \tilde{r} < 1$)

$$x^2 + y^2 < 1. \quad (\text{L})$$

Каждой конечной точке плоскости отвечают бельтрамиевы координаты x, y , однозначно определяемые формулами (XLIX). Нужно только иметь в виду, что как $\tilde{E}, \tilde{H}$, так и бельтрамиевы координаты x, y могут иметь положительные или отрицательные значения. Так, в первой четверти $\tilde{E} > 0$ и $\tilde{H} > 0$; поэтому углы $\tilde{E}$ и $\tilde{H}$ острые, а вместе с тем $x > 0, y > 0$. Во второй четверти $\tilde{E} < 0, \tilde{H} > 0$, так что $\tilde{E} > \frac{\pi}{2}$, $\tilde{H} < \frac{\pi}{2}$, т. е. $x < 0, y > 0$. В третьей четверти $\tilde{E} < 0$ и $\tilde{H} < 0$, $\tilde{E} > \frac{\pi}{2}$ и $\tilde{H} > \frac{\pi}{2}$; $x < 0$ и $y < 0$; и, наконец, в четвертой четверти $\tilde{E} > 0, \tilde{H} < 0$; $\tilde{E} < \frac{\pi}{2}$, $\tilde{H} > \frac{\pi}{2}$; $x > 0, y < 0$. Знаки бельтрамиевых координат в каждой четверти такие же, как и знаки декартовых. Читатель легко себе уяснит, какие значения имеют бельтрамиевы координаты на осях координат.

Но и обратно, каковы бы ни были числа x, y , удовлетворяющие неравенству (L), им отвечает одна и только одна точка плоскости.

В самом деле, из уравнений (XLVII₁) однозначно определим $\cos \Pi(r)$ и r , имея в виду, что $r > 0$. Вместе с тем уравнения (XLVI), которые теперь можно написать в виде:

$$x = \cos \tilde{r} \cos \theta, \quad y = \cos \tilde{r} \sin \theta, \quad (\text{XLVI}_2)$$

однозначно определяют полярный угол θ .

Положим теперь, что числа x, y связаны уравнением

$$x^2 + y^2 = 1, \quad (\text{L}_1)$$

иначе говоря, от неравенства (L) перейдем к равенству (L₁). Такие числа могут быть бельтрамиевыми координатами только такой точки, для которой $\cos \tilde{r} = 1$, т. е. $r = \infty$; в этом случае уравнения (XLVI) принимают вид:

$$x = \cos \theta, \quad y = \sin \theta. \quad (\text{XLVI}_3)$$

Можно сказать, числа x, y , связанные соотношением (L₁), определяют бесконечно удаленную точку луча, который выходит из начала координат под углом θ , устанавливаемым равенством (XLVI₃).

5. Расстояние между двумя точками в бельтрамиевых координатах. Теперь преобразуем правую часть уравнения (XLVIII₁) к бельтрамиевым координатам. Для этого заметим, что по формулам преобразования (XLIX) знаменатель этого выражения примет вид:

$$1 - \cos \tilde{\xi}_1 \cos \tilde{\xi}_2 - \cos \tilde{\eta}_1 \cos \tilde{\eta}_2 \sin \tilde{\xi}_1 \sin \tilde{\xi}_2 = 1 - x_1 x_2 - y_1 y_2.$$

Для преобразования же числителя заметим, что

$$\sin^2 \tilde{\eta}_1 \sin^2 \tilde{\xi}_1 = 1 - \cos^2 \tilde{\xi}_1 - \cos^2 \tilde{\eta}_1 \sin^2 \tilde{\xi}_1 = 1 - x_1^2 - y_1^2.$$

И таким же образом:

$$\sin^2 \tilde{\eta}_2 \sin^2 \tilde{\xi}_2 = 1 - x_2^2 - y_2^2.$$

Для упрощения формул полагаем:

$$+ \sqrt{1 - x^2 - y^2} = z. \quad (\text{LI}_1)$$

На число z можно смотреть как на третью (избыточную) координату, связанную с x и y соотношением

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1; \quad (\text{LI}_2)$$

для бесконечно удаленной точки $z = 0$.

Для двух точек (x_1, y_1) и (x_2, y_2) полагаем:

$$z_{12} = 1 - x_1 x_2 - y_1 y_2. \quad (\text{LI}_3)$$

Ясно, что $z_{12} > 0$, кроме того случая, когда

$$x_1 = x_2, \quad y_1 = y_2, \quad x_1^2 + y_1^2 = x_2^2 + y_2^2 = 1,$$

т. е. когда обе точки бесконечно удаленные; в этом последнем случае $z_{12} = 0$. Вместе с тем формула (XLVIII₁) принимает вид:

$$\sin \Pi(\rho) = \frac{z_1 z_2}{z_{12}}. \quad (\text{XLVIII}_2)$$

В частности, расстояние точки x, y от начала координат ($x_2 = y_2 = 0$) определяется формулой:

$$\sin \Pi(\rho) = z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}. \quad (\text{XLVIII}_3)$$

Для того чтобы выражение $(XLVIII_2)$ всегда давало действительное значение для расстояния ρ , необходимо, чтобы было $z_1 z_2 < z_{12}$, т. е., чтобы

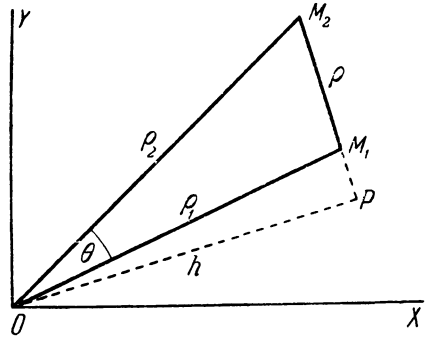
$$(1 - x_1^2 - y_1^2)(1 - x_2^2 - y_2^2) < (1 - x_1 x_2 - y_1 y_2)^2 \quad (3)$$

при всех значениях x_1, y_1 и x_2, y_2 , удовлетворяющих неравенству (L). (Здесь, впрочем, не исключено и равенство $z_1 z_2 = z_{12}$; однако это имеет место только в том случае, когда точки x_1, y_1 и x_2, y_2 совпадают.) Чтобы обнаружить, что это действительно имеет место, представим себе (черт. 237) две точки $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$ в евклидовой плоскости, отстоящие от начала координат O на расстояния ρ_1, ρ_2 , меньшие единицы. Если θ есть угол между радиусами-векторами OM_1 и OM_2 , который мы сначала предположим отличным от нуля, то $x_1 x_2 + y_1 y_2 = \rho_1 \rho_2 \cos \theta$, и неравенство (3) принимает вид:

$$(1 - \rho_1^2)(1 - \rho_2^2) < (1 - \rho_1 \rho_2 \cos \theta)^2,$$

что можно представить в виде:

$$\rho_1 \rho_2 \sin^2 \theta < \rho_1^2 + \rho_2^2 - 2\rho_1 \rho_2 \cos \theta. \quad (4)$$



Черт. 237.

Так как $OM_1 < 1$ и $OM_2 < 1$, то высота h треугольника $OM_1 M_2$, выходящая из вершины O , также меньше единицы; поэтому произведение стороны $M_1 M_2 (\rho)$ на h меньше ρ , иначе говоря, двойная площадь треугольника $OM_1 M_2$ меньше ρ . так что $\rho_1 \rho_2 \sin \theta < \rho$, а это и выражается неравенством (4); это неравенство обращается, впрочем, в равенство в том и только в том случае, когда $\rho_1 = \rho_2$ и $\theta = 0$, т. е. когда две точки совпадают. Разумеется, неравенство (3) нетрудно установить чисто алгебраически: предыдущее рассуждение представляет собой пример применения евклидовой геометрии к установлению алгебраического факта. Но если исключить возможность какого-либо противоречия в гиперболической геометрии, то соотношение $(XLVIII_2)$ само по себе устанавливает то же неравенство и представляет собой очень простой пример применения гиперболической геометрии к установлению алгебраического факта; как мы увидим, Лобачевский придавал этому существенное значение.

6. Явное выражение расстояния между двумя точками через бельтрамиевы координаты этих точек. Согласно формуле $(XXII_1)$ (стр. 294),

$$\sin \Pi(\rho) = \frac{2}{e^{\frac{\rho}{k}} + e^{-\frac{\rho}{k}}}.$$

Если поэтому положим

$$\frac{z_1 z_2}{z_{12}} = \frac{\sqrt{1 - x_1^2 - y_1^2} \sqrt{1 - x_2^2 - y_2^2}}{1 - x_1 x_2 - y_1 y_2} = \tau(x_1, y_1; x_2, y_2), \quad (LI)$$

то равенство $(XLVIII_2)$ примет вид:

$$\frac{e^{\frac{\rho}{k}} + e^{-\frac{\rho}{k}}}{2} = \frac{1}{\tau} \quad \text{или} \quad e^{\frac{2\rho}{k}} - \frac{2}{\tau} e^{\frac{\rho}{k}} + 1 = 0. \quad (5)$$

Решая это уравнение относительно $e^{\frac{\rho}{k}}$ и имея в виду, что $e^{\frac{\rho}{k}} > 1$, получаем:

$$e^{\frac{\rho}{k}} = \frac{1 + \sqrt{1 - \tau^2}}{\tau}, \quad e^{-\frac{\rho}{k}} = \frac{1 - \sqrt{1 - \tau^2}}{\tau}. \quad (5')$$

Отсюда $e^{\frac{2\rho}{k}} = \frac{1 + \sqrt{1 - \tau^2}}{1 - \sqrt{1 - \tau^2}}$ и, таким образом, окончательно

$$\rho = \frac{k}{2} \ln \frac{1 + \sqrt{1 - \tau^2}}{1 - \sqrt{1 - \tau^2}}. \quad (\text{LIII})$$

При $\tau = 1$, что может иметь место только, когда точки (x_1, y_1) и (x_2, y_2) совпадают, ρ обращается в нуль.

Это выражение расстояния между двумя точками, как увидим ниже, сыграло основную роль в дальнейшем уяснении неевклидовой геометрии.

Заметим, что формула (LIII) дает явное выражение расстояния между двумя точками в их бельтрамиевых координатах. В неявном виде оно содержится уже в равенстве (5), которое можно написать в виде:

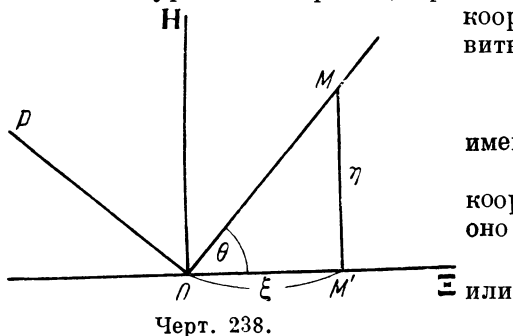
$$\text{ch} \left(\frac{\rho}{k} \right) = \frac{1}{\sin \Pi(\rho)} = \frac{1}{\tau}. \quad (\text{LIII}_1)$$

7. Уравнение прямой. Если прямая OM проходит через начало (черт. 238) под углом θ к оси абсцисс, то из треугольника MOM' имеем [формула (XXVII₃)], (стр. 297)

$$\cos \Pi(\eta) = \text{ctg} \Pi(\xi) \text{tg} \theta. \quad (\text{LIV})$$

При выводе предполагается, что $\theta < \frac{\pi}{2}$; равенство остается в силе и при $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ (в этом случае ξ и η имеют противоположные знаки).

Это есть уравнение прямой, проходящей через начало, в декартовых координатах. Его можно представить в виде:



$$\begin{aligned} & \cos \Pi(\xi) \sin \theta - \\ & - \cos \Pi(\eta) \sin \Pi(\xi) \cos \theta = 0, \end{aligned}$$

имеющем силу при всех значениях θ .

Если перейдем к бельтрамиевым координатам по формуле (XLIX), то оно примет вид:

$$\left. \begin{aligned} x \sin \theta - y \cos \theta &= 0 \\ y &= x \text{tg} \theta. \end{aligned} \right\} \quad (\text{LIV}_1)$$

Если через начало координат проведем перпендикуляр OP к данной прямой и обозначим через ω угол POM' , который он образует с осью абсцисс, то уравнение можно представить в виде:

$$x \cos \omega + y \sin \omega = 0. \quad (\text{LIV}_2)$$

К этому виду приводится всякое уравнение вида

$$Ax + By = 0,$$

если обе части его разделить на $\sqrt{A^2 + B^2}$.

Переходя к прямой, не проходящей через начало (черт. 239), опускаем на нее перпендикуляр OP из начала координат; длину этого перпендикуляра обозначим через p , угол POE , который он образует с осью абсцисс, обозначим через ω , углы же, которые радиус-вектор OM образует с этим перпендикуляром и с осью абсцисс, обозначим через α и β . Тогда из прямоугольного треугольника MOP по теореме косинусов [формула (XXVII₂) (стр. 297)] имеем:

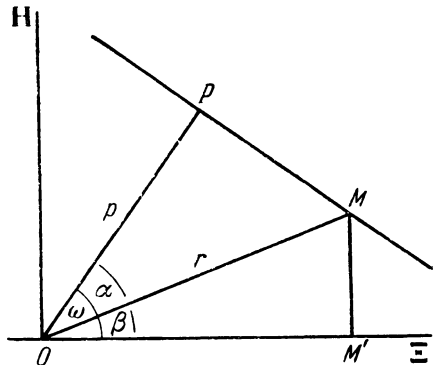
$$\begin{aligned}\cos \Pi(p) &= \cos \Pi(r) \cos \alpha = \\ &= \cos \Pi(r) \cos (\omega - \beta) = \\ &= \cos \Pi(r) \cos \omega \cos \beta + \\ &\quad + \cos \Pi(r) \sin \omega \sin \beta. \quad (6)\end{aligned}$$

Переходя теперь к координатам E и H по формулам (XLVI) (β вместо θ), получаем:

$$\begin{aligned}\cos \Pi(p) &= \\ &= \cos \Pi(E) \cos \omega + \cos \Pi(H) \sin \omega,\end{aligned}$$

а в бельтрамиевых координатах:

$$x \cos \omega + y \sin \omega = \cos \Pi(p). \quad (LV)$$



Черт. 239.

Это есть уравнение прямой, как принято говорить, в нормальном виде; оно отличается от соответствующего уравнения в евклидовой плоскости только тем, что вместо p здесь фигурирует $\cos \Pi(p)$.

Наиболее важную особенность бельтрамиевых координат составляет то обстоятельство, что в них прямая выражается линейным уравнением.

Уравнение (LV) выведено в предположении, что перпендикуляр OP проходит в первом квадранте и в первом же квадранте лежит и точка M прямой. Читатель без труда убедится, что это уравнение сохраняет тот же вид и в других предположениях. Легко видеть также, что уравнение (LIV₂) представляет только частный случай этого общего уравнения.

8. Приведение линейного уравнения прямой к нормальному виду. Итак, в бельтрамиевых координатах прямая выражается линейными уравнениями. Всякое ли линейное уравнение, в свою очередь, выражает прямую линию?

Чтобы уравнение

$$Ax + By = C \quad (LVI)$$

привести к виду (LV), необходимо прежде всего нормировать коэффициенты при x и y ; для этого достаточно разделить обе части уравнения (LVI) на $\sqrt{A^2 + B^2}$ и положить

$$\frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \cos \omega, \quad \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \sin \omega. \quad (LVI_1)$$

Чтобы уравнение приняло вид (LV), нужно положить

$$\frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \cos \Pi(p). \quad (LVI_2)$$

Для этого, однако, необходимо, чтобы имело место

$$\frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2}} < 1, \quad \text{т. е. } C^2 < A^2 + B^2. \quad (LVI_3)$$

Вместе с тем радикал $\sqrt{A^2 + B^2}$ нужно взять с тем знаком, какой имеет число C , чтобы $\cos \Pi(p)$ получил положительное значение. Таким образом, неравенство (LVI₃) представляет условие, необходимое для того, чтобы уравнение (LVI) выражало прямую линию. Если, однако, от неравенства (LVI₃) перейти к равенству

$$C^2 = A^2 + B^2, \quad (\text{LVI}_4)$$

то это будет соответствовать тому, что $\cos \Pi(p) = 1$, $\Pi(p) = 0$, т. е. $p = \infty$. Однако в этом предположении равенство (6), если в нем заменить β через θ , примет вид:

$$\cos \Pi(r) \cos(\omega - \theta) = 1,$$

что возможно только при

$$\cos \Pi(r) = 1 \text{ и } \cos(\omega - \theta) = 1, \text{ т. е. при } r = \infty \text{ и } \omega = \theta.$$

Вместе с тем

$$x = \cos \Pi(r) \cos \theta = \cos \theta, \quad y = \cos \Pi(r) \sin \theta = \sin \theta.$$

В соответствии с соотношением (XLVII₁) (стр. 329) это означает, что (x, y) есть бесконечно удаленная точка луча, который образует с положительным направлением оси абсцисс угол $\theta = \omega$, определяемый формулами (XLVI₂) (стр. 328). Иначе говоря, при соотношении между коэффициентами (LVI₄) уравнению (LVI) не удовлетворяет ни одна конечная точка гиперболической плоскости. Если же учитывать и бесконечно удаленные точки, то ему удовлетворяет бесконечно удаленная точка луча (XLVI₁) ($\omega = \theta$). Прямая как бы свертывается в одну бесконечно удаленную точку.

9. Бельтрамиевы координаты прямой. Уравнение (LVI) при $C \neq 0$ можно также привести к виду:

$$\lambda x + \mu y = 1, \quad (\text{LVII})$$

где

$$\lambda = \frac{A}{C}, \quad \mu = \frac{B}{C}.$$

Условие (LVI₄) теперь можно представить в виде:

$$\lambda^2 + \mu^2 > 1. \quad (\text{LVII}_1)$$

По аналогии с плюккеровыми координатами прямой в евклидовой плоскости, числа λ и μ можно рассматривать как бельтрамиевы координаты прямой в гиперболической плоскости. Они должны удовлетворять условию (LVII₁); каждые два числа, удовлетворяющих этому условию, определяют прямую, не проходящую через начало координат. Если положим

$$v = \sqrt{\lambda^2 + \mu^2 - 1} \quad (\text{LVIII}_1)$$

при положительном значении корня, то v можно рассматривать как третью (избыточную) координату прямой, связанную с λ и μ уравнением

$$\lambda^2 + \mu^2 - v^2 = 1; \quad (\text{LVIII}_2)$$

Для прямой, проходящей через начало, не существует определенных значений бельтрамиевых координат, так как такая прямая выражается не уравнением (LVII), а уравнением

$$\lambda x + \mu y = 0,$$

где коэффициенты λ и μ определены только с точностью до произвольного множителя.

10. Расстояние точки от прямой. Чтобы вычислить расстояние точки $M_0(x_0, y_0)$ от прямой AB , выражаемой уравнением (LV) (черт. 240), опустим из нее перпендикуляры: $M_0N(=h)$ на эту прямую (длину его h нам нужно вычислить), M_0P_0 на ось абсцисс и M_0P_0 на перпендикуляр OP к данной прямой. Длина OP есть p ; длину отрезка OP_0 обозначим через p_0 , P_0P — через q . Наконец, длину перпендикуляра M_0P_0 обозначим через l . Уравнение прямой M_0P_0 , определяемой расстоянием от начала p_0 и углом $M_0'OP_0$, совпадающим с углом $M_0'OP = \omega$, будет

$$\cos \Pi(p_0) = x \cos \omega + y \sin \omega,$$

и так как точка M_0 лежит на этой прямой, то ее координаты x_0, y_0 удовлетворяют этому уравнению, т. е.

$$\cos \Pi(p_0) = x_0 \cos \omega + y_0 \sin \omega.$$

С другой стороны, согласно формуле (XXIX₂) (стр. 302)

$$\begin{aligned} \operatorname{ctg} \Pi(q) &= \operatorname{ctg} \Pi(p - p_0) = \frac{\cos \Pi(p) - \cos \Pi(p_0)}{\sin \Pi(p) \sin \Pi(p_0)} = \\ &= \frac{\cos \Pi(p) - x_0 \cos \omega - y_0 \sin \omega}{\sin \Pi(p) \sin \Pi(p_0)}. \end{aligned}$$

Из трипрямоугольника M_0P_0PN по формуле (XXXII₂) (стр. 305) (полагая в ней $h_e = h$, $e = q$, $h_f = l$) имеем:

$$\operatorname{ctg} \Pi(h) = \frac{\operatorname{ctg} \Pi(q)}{\sin \Pi(l)},$$

и потому

$$\operatorname{ctg} \Pi(h) = \frac{\cos \Pi(p) - x_0 \cos \omega - y_0 \sin \omega}{\sin \Pi(p) \sin \Pi(p_0) \sin \Pi(l)}.$$

А так как из треугольника OP_0M_0

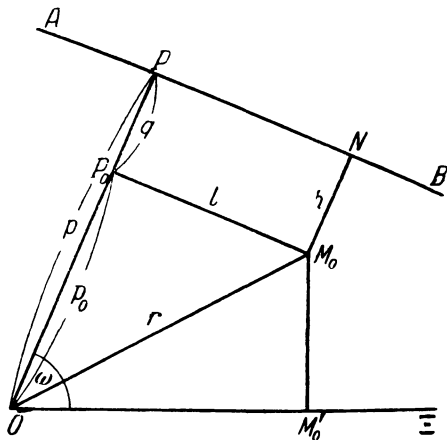
$$\sin \Pi(p_0) \sin \Pi(l) = \sin \Pi(r),$$

то получаем окончательно:

$$\operatorname{ctg} \Pi(h) = \frac{\cos \Pi(p) - x_0 \cos \omega - y_0 \sin \omega}{\sin \Pi(p) \sin \Pi(r)}$$

или по формуле (XLVIII₂) (стр. 330)

$$\operatorname{ctg} \Pi(h) = \frac{\cos \Pi(p) - x_0 \cos \omega - y_0 \sin \omega}{\sin \Pi(p) \sqrt{1 - x_0^2 - y_0^2}},$$



Черт. 240.

Вывод сделан в некоторых особых предположениях о положении точки M_0 относительно прямой AB (точки M_0 и O расположены по одну сторону от прямой AB , а точки P_0 и P — по одну сторону от точки O); читателю не представит труда рассмотреть другие возможные расположения; он убедится, что положение точки P_0 относительно O и P не имеет значения; в случае же, когда точка M_0 и начало расположены по разные стороны прямой AB , выражение меняет знак, так что всегда

$$\operatorname{ctg} \Pi(h) = \frac{\cos \Pi(p) - x_0 \cos \omega - y_0 \sin \omega}{\epsilon \sin \Pi(p) \sqrt{1 - x_0^2 - y_0^2}}, \quad (\text{LIX})$$

где $\epsilon = +1$, когда точка M_0 расположена с той же стороны прямой AB , что и начало, и $\epsilon = -1$ в противоположном случае.

11. Точка пересечения двух прямых. Координаты точки пересечения двух прямых, не проходящих через начало (имеющих определенные координаты λ, μ)

$$\lambda_1 x + \mu_1 y = 1, \quad \lambda_2 x + \mu_2 y = 1, \quad (7)$$

найдем, решая совместно эти два уравнения. Получим:

$$x = \frac{\mu_2 - \mu_1}{\lambda_1 \mu_2 - \lambda_2 \mu_1}, \quad y = \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{\lambda_1 \mu_2 - \lambda_2 \mu_1}. \quad (\text{LX})$$

Однако, чтобы точка пересечения действительно существовала, ее координаты должны удовлетворять условию (L) (стр. 329). Чтобы существовала конечная точка пересечения, должно быть:

$$\left(\frac{\mu_2 - \mu_1}{\lambda_1 \mu_2 - \lambda_2 \mu_1} \right)^2 + \left(\frac{\lambda_1 - \lambda_2}{\lambda_1 \mu_2 - \lambda_2 \mu_1} \right)^2 < 1, \quad (8)$$

или

$$(\mu_2 - \mu_1)^2 + (\lambda_1 - \lambda_2)^2 < (\lambda_1 \mu_2 - \lambda_2 \mu_1)^2.$$

Ввиду тождества

$$\begin{aligned} & (\lambda_1 \mu_2 - \lambda_2 \mu_1)^2 - (\lambda_1 - \lambda_2)^2 - (\mu_1 - \mu_2)^2 = \\ & = (\lambda_1^2 + \mu_1^2 - 1)(\lambda_2^2 + \mu_2^2 - 1) - (\lambda_1 \lambda_2 + \mu_1 \mu_2 - 1)^2, \end{aligned} \quad (\text{LXI})$$

предыдущее условие можно представить в виде:

$$v_1^2 v_2^2 > v_{12}^2, \quad (\text{LXI}_1)$$

где

$$v_{12} = \lambda_1 \lambda_2 + \mu_1 \mu_2 - 1, \quad (\text{LVIII}_3)$$

т. е.

$$-1 < \frac{v_{12}}{v_1 v_2} < +1.$$

(Нужно иметь в виду, что при условии (LXI₁) v_{12} может иметь как положительное, так и отрицательное значение.) Если неравенство заменяется равенством, т. е.

$$v_1^2 v_2^2 = v_{12}^2, \quad (\text{LXI}_2)$$

то точка пересечения лежит в бесконечности — прямые параллельны (в частности, могут совпадать); если же

$$v_1^2 v_2^2 < v_{12}^2, \quad (\text{LXI}_3)$$

то пересечение не имеет места — прямые расходятся. Ввиду тождества (LXI), последнее имеет место, в частности, когда

$$\lambda_1 \mu_2 - \lambda_2 \mu_1 = 0.$$

12. Вычисление угла между двумя прямыми. Положим сначала, что прямые AC и BC (черт. 241) заданы уравнениями:

$$\cos \tilde{p}_1 = x \cos \omega_1 + y \sin \omega_1, \quad \cos \tilde{p}_2 = x \cos \omega_2 + y \sin \omega_2.$$

Пусть OP_1 и OP_2 будут перпендикуляры, опущенные на эти прямые из начала O; тогда $OP_1 = p_1$, $\angle EOP_1 = \omega_1$, $OP_2 = p_2$, $\angle EOP_2 = \omega_2$, $\angle P_1OP_2 = \omega_2 - \omega_1$. Если через C обозначим угол ACB, под которым прямые пересекаются, то по формуле (XXXIV₃) (стр. 309)

$$\cos C = \frac{\cos \tilde{p}_1 \cos \tilde{p}_2 - \cos(\omega_2 - \omega_1)}{\sin p_1 \sin p_2}. \quad (\text{LXI}_2)$$

Если прямые заданы уравнениями (7), то

$$\begin{aligned}\cos \omega_1 &= \frac{\lambda_1}{\sqrt{\lambda_1^2 + \mu_1^2}}, & \sin \omega_1 &= \frac{\mu_1}{\sqrt{\lambda_1^2 + \mu_1^2}}, \\ \cos \omega_2 &= \frac{\lambda_2}{\sqrt{\lambda_2^2 + \mu_2^2}}, & \sin \omega_2 &= \frac{\mu_2}{\sqrt{\lambda_2^2 + \mu_2^2}}, \\ \cos \tilde{p}_1 &= \frac{1}{\sqrt{\lambda_1^2 + \mu_1^2}}, & \cos \tilde{p}_2 &= \frac{1}{\sqrt{\lambda_2^2 + \mu_2^2}}, \\ \sin \tilde{p}_1 &= \frac{\sqrt{\lambda_1^2 + \mu_1^2} - 1}{\sqrt{\lambda_1^2 + \mu_1^2}}, & \sin \tilde{p}_2 &= \frac{\sqrt{\lambda_2^2 + \mu_2^2} - 1}{\sqrt{\lambda_2^2 + \mu_2^2}}.\end{aligned}$$

Поэтому

$$\cos C = \frac{1 - \lambda_1 \lambda_2 - \mu_1 \mu_2}{\sqrt{\lambda_1^2 + \mu_1^2} \sqrt{\lambda_2^2 + \mu_2^2} - 1} = - \frac{\nu_{12}}{\nu_1 \nu_2} \quad ^1). \quad (\text{LXII}_2)$$

Отсюда следует, что угол имеет действительное значение, когда выполняется неравенство (LXI₁), т. е. когда прямые пересекаются, — как этого, конечно, и следовало ожидать. Если это неравенство заменяется равенством (LXI₂), то угол C обращается в нуль — линии параллельны. Наконец, если имеет место неравенство (LXI₃), угол не существует, можно сказать — он становится мнимым.

Условие перпендикулярности двух прямых выражается равенством $\nu_{12} = 0$ или

$$\lambda_1 \lambda_2 + \mu_1 \mu_2 = 1. \quad (\text{LXIII}_1)$$

Это условие перпендикулярности двух прямых предполагает, что прямые выражаются уравнениями (7), т. е. что ни одна из них не проходит через начало координат.

Если одна из них проходит через начало, так что их уравнения будут $\lambda_1 x + \mu_1 y = 1$ и $\lambda x + \mu y = 0$, то перпендикуляр, проведенный из начала к первой из них, образует с осью абсцисс угол ω , для которого

$$\cos \omega = \frac{\lambda_1}{\sqrt{\lambda_1^2 + \mu_1^2}}, \quad \sin \omega = \frac{\mu_1}{\sqrt{\lambda_1^2 + \mu_1^2}},$$

а вторая сама образует с осью абсцисс угол θ , для которого

$$\cos \theta = \frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2 + \mu^2}}, \quad \sin \theta = - \frac{\mu}{\sqrt{\lambda^2 + \mu^2}}.$$

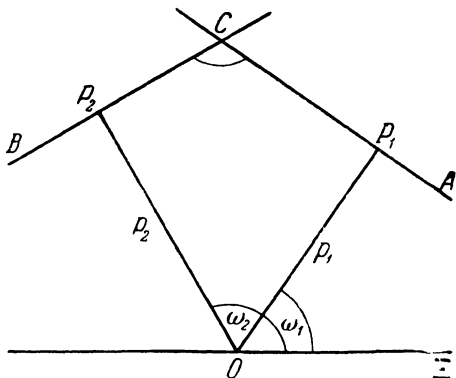
Эти прямые перпендикулярны, если угол $\omega = \theta$ или $\omega = \theta + \pi$, т. е. если

$$\frac{\lambda_1}{\sqrt{\lambda_1^2 + \mu_1^2}} = \pm \frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2 + \mu^2}}, \quad \frac{\mu_1}{\sqrt{\lambda_1^2 + \mu_1^2}} = \mp \frac{\mu}{\sqrt{\lambda^2 + \mu^2}}.$$

В том и в другом случае

$$\lambda \lambda_1 + \mu \mu_1 = 0. \quad (\text{LXIII}_2)$$

¹⁾ Здесь знак «минус» в правой части заменяется на «плюс», если за C прием угол, смежный с ACB .



Черт. 241.

Обратно, если имеет место равенство (LXIII₂), то

$$\frac{\lambda_1}{\sqrt{\lambda_1^2 + \mu_1^2}} \cdot \frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2 + \mu^2}} + \frac{\mu_1}{\sqrt{\lambda_1^2 + \mu_1^2}} \cdot \frac{\mu}{\sqrt{\lambda^2 + \mu^2}} = 0,$$

т. е.

$$-\cos \omega \sin \theta + \sin \omega \cos \theta = 0, \quad \sin(\omega - \theta) = 0, \quad \omega = \theta \quad \text{или} \quad \omega = \theta + \pi.$$

Таким образом, условие, необходимое и достаточное для того, чтобы прямая, проходящая через начало, была перпендикулярна к прямой, не проходящей через начало, выражается условием (LXIII₂). Вообще, случай, когда прямая проходит через начало координат (когда в уравнении $Ax + By = C$ свободный член $C = 0$), часто приходится обрабатывать особо.

Наконец, если обе прямые проходят через начало, т. е. выражаются уравнениями

$$x \sin \theta_1 - y \cos \theta_1 = 0, \quad x \sin \theta_2 - y \cos \theta_2 = 0,$$

то угол между ними ($\theta_2 \geq \theta_1$) равен $\theta_2 - \theta_1$, т. е. имеет то же значение, что и угол между прямыми в евклидовой плоскости, выражающимися теми же уравнениями. В качестве условия перпендикулярности снова получается (LXIII₂).

13. Разыскание общего перпендикуляра к двум прямым. Посмотрим, существует ли общий перпендикуляр к двум прямым (7).

Если он выразится уравнением

$$\lambda x + \mu y = 1,$$

то по формуле (LXIII₁) должно быть $\lambda_1 \lambda + \mu_1 \mu = 1$, $\lambda_2 \lambda + \mu_2 \mu = 1$. Эти уравнения отличаются от уравнений (7) только тем, что x и y заменены через λ и μ . Если определитель $\lambda_1 \mu_2 - \lambda_2 \mu_1$ отличен от нуля, то

$$\lambda = \frac{\mu_2 - \mu_1}{\lambda_1 \mu_2 - \lambda_2 \mu_1}, \quad \mu = \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{\lambda_1 \mu_2 - \lambda_2 \mu_1}.$$

Однако, чтобы этим значениям λ и μ соответствовала прямая на плоскости, должно быть

$$\lambda^2 + \mu^2 > 1.$$

Мы получили неравенство, аналогичное (8) на стр. 336, но в нем знак $<$ должен быть заменен знаком $>$; тем же преобразованием, которое было произведено в рубрике 11, мы убедимся, что общий перпендикуляр к двум прямым существует в том случае, когда выполняется неравенство (LXI₃), т. е. когда прямые (7) расходятся.

Принимая, что это имеет место, разыщем длину общего перпендикуляра. С этой целью разыщем прежде всего точки его пересечения с прямыми; мы получим координаты этих точек x_1, y_1 и x_2, y_2 , если в формулах (LX) заменим один раз λ_2, μ_2 через λ и μ , а другой раз λ_1, μ_1 через λ и μ . Будем иметь:

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{\mu - \mu_1}{\lambda_1 \mu - \lambda \mu_1}, & y_1 &= \frac{\lambda_1 - \lambda}{\lambda_1 \mu - \lambda \mu_1}, \\ x_2 &= \frac{\mu_2 - \mu}{\lambda \mu_2 - \lambda_2 \mu}, & y_2 &= \frac{\lambda - \lambda_2}{\lambda \mu_2 - \lambda_2 \mu}. \end{aligned}$$

Подставляя сюда вместо λ и μ найденные выше их значения, после несложных преобразований получим:

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{\lambda_2 v_1^2 - \lambda_1 v_{12}}{v_1^2 - v_{12}}, & y_1 &= \frac{\mu_2 v_1 - \mu_1 v_{12}}{v_1^2 - v_{12}}, \\ x_2 &= \frac{\lambda_1 v_2^2 - \lambda_2 v_{12}}{v_2^2 - v_{12}}, & y_2 &= \frac{\mu_1 v_2^2 - \mu_2 v_{12}}{v_2^2 - v_{12}}, \end{aligned}$$

а вместе с тем

$$z_1^2 = \frac{v_1^2 (v_{12}^2 - v_1^2 v_2^2)}{(v_1^2 - v_{12})^2}, \quad z_2^2 = \frac{v_2^2 (v_{12}^2 - v_1^2 v_2^2)}{(v_2^2 - v_{12})^2},$$

$$z_{12} = \frac{v_{12} (v_1^2 v_2^2 - v_{12}^2)}{(v_1^2 - v_{12})(v_2^2 - v_{12})}.$$

Отсюда

$$\frac{z_1^2 z_2^2}{z_{12}^2} = \frac{v_1^2 v_2^2}{v_{12}^2}.$$

Таким образом, длина ρ (XLVIII₂) (стр. 330) общего перпендикуляра (расстояние между двумя расходящимися прямыми) определяется по формуле:

$$\sin \Pi(\rho) = \frac{v_1 v_2}{|v_{12}|}, \quad (\text{LXIV})$$

где $|v_{12}|$ — абсолютное значение числа v_{12} . И так как прямые расходятся, то имеет место неравенство (LXI₃); правая часть равенства, будучи числом, меньшим единицы, определяет действительное значение ρ . С другой стороны, то же равенство можно представить в виде:

$$\text{ch}\left(\frac{\rho}{k}\right) = \frac{|v_{12}|}{v_1 v_2}.$$

Но если бы мы определяли угол между теми же прямыми по формуле (LXII₂) (стр. 337, см. также сноску к ней), то получили бы:

$$\cos \theta = \frac{v_{12}}{v_1 v_2}; \quad (\text{LXV})$$

и так как справа стоит число, большее единицы, то мы получили бы мнимый угол; это вполне соответствует тому, что прямые расходятся.

Но так как $\cos \theta$ отличается от $\text{ch} \frac{\rho}{k}$ тем, что θ заменяется через $\frac{\rho}{ki}$, то формально кратчайшее расстояние между двумя прямыми можно рассматривать как мнимый угол между ними. Многие авторы — Киллинг ([¹¹³], [¹¹⁴]), Либман ([¹⁰⁸], [¹⁰⁹]) и другие — так его и трактуют.

14. Взаимное расположение трех прямых на гиперболической плоскости. Найдем теперь условие, при котором три прямые

$$\lambda_0 x + \mu_0 y = 1, \quad \lambda_1 x + \mu_1 y = 1, \quad \lambda_2 x + \mu_2 y = 1 \quad (9)$$

пересекаются в одной точке. Необходимое условие заключается в том что

$$\begin{vmatrix} \lambda_0 & \mu_0 & 1 \\ \lambda_1 & \mu_1 & 1 \\ \lambda_2 & \mu_2 & 1 \end{vmatrix} = 0. \quad (\text{LXVI})$$

Если при этом две из этих прямых пересекаются, т. е. если двум уравнениям удовлетворяют числа x и y , для которых $x^2 + y^2 < 1$, то при наличии условия (LXVI) эти числа удовлетворяют и третьему уравнению, т. е. три прямые действительно имеют общую точку. Если две прямые параллельны, т. е. если два уравнения (9) имеют общее решение x, y , для которого $x^2 + y^2 = 1$, то это решение удовлетворяет и третьему уравнению, т. е. три прямые параллельны. Наконец, если две прямые расходятся, т. е. уравнениям удовлетворяют числа x, y , для которых $x^2 + y^2 > 1$, то те же числа удовлетворяют и третьему уравнению, т. е. три прямые попарно расходятся. Однако в этом последнем случае две прямые, скажем, вторая и третья, имеют общий перпендикуляр, коор-

динаты которого λ, μ удовлетворяют уравнениям

$$\lambda_1 \lambda + \mu_1 \mu = 1, \quad \lambda_2 \lambda + \mu_2 \mu = 1.$$

Если имеет место условие (LXVI), то эти же числа удовлетворяют также уравнению

$$\lambda_0 \lambda + \mu_0 \mu = 1,$$

т. е. та же прямая перпендикулярна и к первой прямой.

Необходимо рассмотреть еще тот случай, когда три определителя уравнений (9), взятых попарно, обращаются в нуль:

$$\lambda_1 \mu_2 - \lambda_2 \mu_1 = 0, \quad \lambda_2 \mu_0 - \lambda_0 \mu_2 = 0, \quad \lambda_0 \mu_1 - \lambda_1 \mu_0 = 0,$$

т. е.

$$\lambda_1 = \rho \lambda_0, \quad \mu_1 = \rho \mu_0, \quad \lambda_2 = \sigma \lambda_0, \quad \mu_2 = \sigma \mu_0. \quad (10)$$

В этом случае проведем к прямой (λ_0, μ_0) перпендикуляр (λ, μ) из начала координат. Согласно формуле (LXIII₂) (стр. 337), λ, μ получаются из уравнения

$$\lambda \lambda_0 + \mu \mu_0 = 0.$$

Но ввиду соотношений (10) в этом случае имеют также место равенства

$$\lambda_1 \lambda + \mu_1 \mu = 0 \quad \text{и} \quad \lambda_2 \lambda + \mu_2 \mu = 0.$$

Та же прямая (λ, μ) перпендикулярна ко всем трем лучам — они образуют пучок.

Итак равенство (LXVI) выражает условие, необходимое и достаточное для того, чтобы три прямые (9) составляли пучок. Условие это остается в силе и в том случае, если какая-либо из прямых проходит через начало координат. В этом случае в определителе (LXVI) в соответствующей строке вместо 1 будет стоять 0.

15. Однородные координаты в гиперболической плоскости. В некоторых случаях, как мы увидим ниже, бывает целесообразно перейти от бильтрамиевых координат (x, y) к однородным координатам аналогично тому, как это делается в евклидовой плоскости. Как известно, это может быть сделано различными способами; простейший из них заключается в том, что мы полагаем

$$x_1 = \rho x, \quad x_2 = \rho y, \quad x_3 = \rho, \quad (\text{LXVII})$$

где ρ есть произвольное число или функция от x, y , не обращающаяся в нуль, так что

$$x = \frac{x_1}{x_3}, \quad y = \frac{x_2}{x_3}. \quad (\text{LXVII}_1)$$

В этом последнем случае x_1, x_2, x_3 называются однородными бильтрамиевыми координатами. Условие (L) (стр. 329) заменяется тем, что

$$x_1^2 + x_2^2 \leq x_3^2. \quad (\text{LXVIII})$$

Выражение τ (LII) (стр. 334) в этих координатах для точек (x_1, x_2, x_3) и (y_1, y_2, y_3) принимает вид:

$$\tau = \frac{\sqrt{x_3^2 - x_1^2 - x_2^2} \sqrt{y_3^2 - y_1^2 - y_2^2}}{x_3 y_3 - x_1 y_1 - x_2 y_2}.$$

Выражение расстояния между двумя точками (LIII) (стр. 332) можно представить в виде:

$$\rho = \frac{k}{2} \ln \frac{x_3 y_3 - x_1 y_1 - x_2 y_2 + \sqrt{(x_3 y_3 - x_1 y_1 - x_2 y_2)^2 - (x_3^2 - x_1^2 - x_2^2)(y_3^2 - y_1^2 - y_2^2)}}{x_3 y_3 - x_1 y_1 - x_2 y_2 - \sqrt{(x_3 y_3 - x_1 y_1 - x_2 y_2)^2 - (x_3^2 - x_1^2 - x_2^2)(y_3^2 - y_1^2 - y_2^2)}}. \quad (\text{LXIX})$$

Если, следуя Клейну, квадратичную форму $x_3^2 - x_1^2 - x_2^2$ обозначим через $\Omega(x, x)$, а соответствующую билинейную форму $x_3y_3 - x_1y_1 - x_2y_2$ через $\Omega(x, y)$, то формула (LXIX) примет вид:

$$\rho = \frac{k}{2} \ln \frac{\Omega(x, y) + \sqrt{[\Omega(x, y)]^2 - \Omega(x, x)\Omega(y, y)}}{\Omega(x, y) - \sqrt{[\Omega(x, y)]^2 - \Omega(x, x)\Omega(y, y)}}. \quad (\text{LXIX}_1)$$

Аналогично могут быть введены однородные координаты прямой. Однородные координаты (LXVII) при $\rho = \frac{q}{z}$, где q есть постоянная, отличная от нуля, так что

$$x_1 = \frac{qx}{z}, \quad x_2 = \frac{qy}{z}, \quad x_3 = \frac{q}{z}, \quad (\text{LXX})$$

обыкновенно называются Вейерштрассовыми координатами. По свидетельству Киллинга [114], Вейерштрасс пользовался этими координатами в своем семинаре при Берлинском университете в 1872 г.

§ 43. УРАВНЕНИЯ КРИВЫХ ПОСТОЯННОЙ КРИВИЗНЫ

1. Уравнение окружности. Уравнение окружности в бельтрамиевых координатах можно составить, непосредственно пользуясь формулой (XLVIII₂) (стр. 330), выражающей расстояние двух точек в бельтрамиевых координатах. Если через α, β обозначим координаты центра, а через x, y — текущие координаты точки окружности, то, согласно указанной формуле, уравнение окружности можно написать в виде:

$$(1 - x^2 - y^2)(1 - \alpha^2 - \beta^2) = \sin^2 \tilde{r} (1 - \alpha x - \beta y)^2,$$

где r — радиус окружности. Так как при этом (L) (стр. 329)

$$\alpha^2 + \beta^2 < 1, \quad (1)$$

то это уравнение можно представить в виде:

$$1 - x^2 - y^2 = \mu^2 (1 - \alpha x - \beta y)^2, \quad (\text{LXXI})$$

где

$$\mu^2 = \frac{\sin^2 \tilde{r}}{1 - \alpha^2 - \beta^2}; \quad (2)$$

при этом $\mu^2 > 0$. Иначе это уравнение можно представить в виде:

$$1 - x^2 - y^2 - P(x, y) = 0, \quad (\text{LXXII})$$

где $P(x, y)$ есть полный квадрат линейного трехчлена $\mu - \mu\alpha x - \mu\beta y$; или, в других обозначениях,

$$P(x, y) \equiv Q^2 \equiv (ax + by + c)^2, \quad (3)$$

где

$$a = -\mu\alpha, \quad b = -\mu\beta, \quad c = \mu. \quad (4)$$

Впредь под функцией $P(x, y)$ мы здесь всегда будем понимать полный квадрат линейного трехчлена (3). При этом $c = \mu \neq 0$, а потому

$$\alpha = -\frac{a}{c}, \quad \beta = -\frac{b}{c}. \quad (5)$$

Неравенство (1) принимает вид $e > 0$, где

$$e = c^2 - a^2 - b^2; \quad (6)$$

соотношение же (2) можно написать в виде:

$$\sin^2 \tilde{r} = e; \quad (7)$$

отсюда видно, что $e < 1$.

Итак, уравнение окружности в бельтрамиевых координатах можно представить в виде (LXXII), где P есть квадрат линейного трехчлена, причем

$$1 > e > 0. \quad (\text{LXXII}_1)$$

Обратно, уравнение (LXXII), в котором $P(x, y)$ есть квадрат линейного трехчлена (3), при дополнительном условии (LXXII₁) выражает окружность, центр которой α, β определяется формулами (5), а радиус r — уравнением (7).

Заметим, что уравнение (LXXII) можно представить в виде:

$$\frac{(1 - x^2 - y^2)(1 - \alpha^2 - \beta^2)}{(1 - \alpha x - \beta y)^2} = e \quad (8)$$

и так как левая часть представляет собой правильную дробь, каковы бы ни были две различные точки (x, y) и (α, β) [§ 42, рубр. 5; формула (3) (стр. 331)], то при $e > 1$ это уравнение не выражает никакого действительного геометрического места; при $e = 1$ оно может иметь место только в том случае, если точка (x, y) совпадает с точкой (α, β) , уравнение выражает в этом случае точку (α, β) .

2. Уравнение предельной линии. Уравнение предельной линии, казалось бы, можно получить из уравнения окружности (LXXI), если в нем отнести центр в бесконечно удаленную точку, а радиус считать бесконечно большим. Однако в этом случае в выражении (2) для μ^2 числитель и знаменатель обращаются в нуль, так что μ^2 теряет определенное значение. К разысканию уравнения предельной линии необходимо поэтому подойти иначе.

Возьмем уравнение окружности (LXXI) и предположим, что эта окружность проходит через точку (x_1, y_1) . Тогда

$$1 - x_1^2 - y_1^2 = \mu^2 (1 - \alpha x_1 - \beta y_1)^2. \quad (9)$$

Вместе с тем, деля почленно уравнение (LXXI) на (9), можно уравнение окружности представить в виде:

$$1 - x^2 - y^2 = \mu^2 (1 - \alpha x - \beta y)^2, \quad (10)$$

где μ^2 имеет не прежнее значение, а

$$\mu^2 = \frac{1 - x_1^2 - y_1^2}{(1 - \alpha x_1 - \beta y_1)^2}. \quad (11)$$

Теперь, сохраняя точку (x_1, y_1) , будем удалять центр (α, β) в бесконечность по прямой, исходящей из (x_1, y_1) . Окружность в пределе заменится предельной линией, которая будет выражена уравнением (10), при значении μ (11), соответствующем добавочному соотношению

$$\alpha^2 + \beta^2 = 1. \quad (12)$$

Ось этой предельной линии, выходящая из начала координат, имеет уравнение (LIV₁) (стр. 332)

$$y \cos \theta = x \sin \theta, \quad (13)$$

где θ — угол, который она образует с осью абсцисс. И так как она идет к бесконечно удаленной точке α, β , то мы можем положить

$$\alpha = \cos \theta, \quad \beta = \sin \theta. \quad (14)$$

Чтобы фиксировать точку (x_1, y_1) , возьмем ее в пересечении предельной линии с осью (13). Для разыскания этой точки M обозначим ее расстояние от начала через r . Если начало лежит вне предельной линии,

то луч OM направлен в ту же сторону, что и ось. По формулам (XLVI) (стр. 328) получим

$$x = \rho \cos \theta, \quad y = \rho \sin \theta, \quad \text{где } \rho = \cos \tilde{r}. \quad (15)$$

Подставляя значения (14) и (15) в уравнение предельной линии (10), получим

$$1 - \rho^2 = \mu^2 (1 - \rho)^2. \quad (16)$$

Таким образом,

$$\mu^2 = \frac{1 + \rho}{1 - \rho}. \quad (17)$$

В этом случае $\mu^2 \geq 1$, причем равенство наступает только в том случае, когда $\rho = 0$, т. е. $\tilde{r} = \frac{1}{2}\pi$, $r = 0$, иначе говоря, когда предельная линия проходит через начало координат.

Если начало O лежит внутри предельной линии, то луч OM обращен в сторону, противоположную оси. Вместо (15) мы имеем тогда:

$$x = -\rho \cos \theta, \quad y = -\rho \sin \theta. \quad (15_1)$$

Подставляя эти выражения в уравнение предельной линии, вместо уравнения (16) получаем:

$$1 - \rho^2 = \mu^2 (1 + \rho)^2 \quad (16_1)$$

и отсюда

$$\mu^2 = \frac{1 - \rho}{1 + \rho}. \quad (17_1)$$

В этом случае $\mu^2 < 1$ и переходит в единицу, когда начало лежит на предельной линии. Уравнение предельной линии, таким образом, также может быть представлено в виде (LXXII), где P есть полный квадрат (3). Теперь равенства (5) принимают вид:

$$\alpha = \cos \theta = -\frac{a}{c}, \quad \beta = \sin \theta = -\frac{b}{c}, \quad (15_1)$$

а потому неравенство (LXXII₁) заменяется равенством $c^2 = a^2 + b^2$ или $e = 0$. (LXXII₂)

И так как $\mu^2 = c^2$, то условия (17) и (17₁) можно представить в виде:

$$c^2 = \frac{1 + \rho}{1 - \rho} \quad (18)$$

и

$$c^2 = \frac{1 - \rho}{1 + \rho}. \quad (18_1)$$

Вместе с тем ясно, что уравнение (LXXII) при дополнительном условии (LXXII₂) $e = 0$ выражает предельную линию, направление оси которой определяется уравнениями (15₁), а начало (точка, которая лежит на оси, проходящей через начало координат) — уравнениями (18) или (18₁), смотря по тому, будет ли $c^2 \geq 1$ или $c^2 \leq 1$.

Заметим, что равенство (LXXII₂) не исключает возможности $c = 0$; в этом случае $a = b = 0$, т. е. $P(x, y)$ обращается тождественно в нуль. Уравнение (LXXII) принимает вид:

$$1 - x^2 - y^2 = 0. \quad (19)$$

Этому уравнению не удовлетворяет никакая конечная точка плоскости; его можно рассматривать как уравнение совокупности всех бесконечно удаленных точек гиперболической плоскости.

3. Уравнение эквидистанты. Чтобы составить уравнение эквидистанты, предположим, что уравнение ее базы в нормальном виде есть

$$x \cos \omega + y \sin \omega = \cos \tilde{p}. \quad (20)$$

Тогда расстояние h точки (x, y) эквидистанты от ее базы выражается, согласно (LIX) (стр. 335), формулой

$$\operatorname{ctg} \tilde{h} = \frac{\cos \tilde{p} - x \cos \omega - y \sin \omega}{\varepsilon \sin \tilde{p} \sqrt{1 - x^2 - y^2}}. \quad (21)$$

Уравнение эквидистанты можно поэтому представить в виде:

$$1 - x^2 - y^2 = \frac{\operatorname{tg}^2 \tilde{h}}{\sin^2 \tilde{p}} (\cos \tilde{p} - x \cos \omega - y \sin \omega)^2, \quad (22)$$

т. е. опять в виде (LXXII), причем

$$a = -\frac{\cos \omega \operatorname{tg} \tilde{h}}{\sin \tilde{p}}, \quad b = -\frac{\sin \omega \operatorname{tg} \tilde{h}}{\sin \tilde{p}}, \quad c = \frac{\cos \tilde{p} \operatorname{tg} \tilde{h}}{\sin \tilde{p}}. \quad (23)$$

В этом случае

$$a^2 + b^2 = \frac{\operatorname{tg}^2 \tilde{h}}{\sin^2 \tilde{p}}, \quad c^2 = \frac{\operatorname{tg}^2 \tilde{h}}{\sin^2 \tilde{p}} \cos^2 \tilde{p}. \quad (24)$$

Таким образом, в этом случае

$$c^2 < a^2 + b^2, \quad \text{т. е. } e < 0. \quad (\text{LXXII}_1)$$

Вместе с тем

$$\operatorname{tg} \omega = \frac{b}{a}, \quad \frac{c^2}{a^2 + b^2} = \cos^2 \tilde{p}, \quad (25)$$

$$\operatorname{tg}^2 \tilde{h} = (a^2 + b^2) \sin^2 \tilde{p}. \quad (26)$$

Обратно, уравнение (LXXII) при дополнительном условии (LXXII₁) выражает эквидистанту, база которой (ω и p) определяется уравнением (25), а параметр h — уравнением (26).

4. Кривые постоянной кривизны как кривые второго порядка. Под алгебраическими кривыми в гиперболической плоскости разумеют такие кривые, которые в бельтрамиевых координатах выражаются уравнением вида $f(x, y) = 0$, где $f(x, y)$ — целый полином от x и y ; степень этого уравнения выражает порядок кривой. Мы видим, что кривые постоянной кривизны в гиперболической плоскости представляют собой кривые второго порядка. Ясно, что уравнение всякой кривой второго порядка может быть представлено в виде:

$$1 - x^2 - y^2 - P(x, y) = 0, \quad (\text{LXXII})$$

где $P(x, y)$ — полином не выше второй степени. Мы видели выше, что кривые постоянной кривизны могут быть представлены в этом виде таким образом, что $P(x, y)$ есть полный квадрат линейного трехчлена. И обратно, уравнение (LXXII), в котором $P(x, y)$ есть полный квадрат линейного трехчлена $ax + by + c$, либо не выражает никакого действительного геометрического места, либо выражает кривую постоянной кривизны, и именно, при обозначении (6) (стр. 341) оно не выражает никакого действительного места, если $e > 1$; выражает окружность, если $1 \geq e > 0$ (при $e = 1$ окружность вырождается в точку); выражает предельную линию, если $e = 0$, и эквидистанту при $e < 0$. Нужно, впрочем, отметить случай, когда полином $P(x, y)$ тождественно

обращается в нуль ($a = b = c = 0$). Уравнение принимает вид (19) и выражает совокупность бесконечно удаленных точек плоскости. В связи с этим говорят, что бесконечно удаленные точки гиперболической плоскости расположены не на прямой, как в евклидовой плоскости, а на кривой второго порядка (19).

Общую теорию кривых второго порядка в гиперболической плоскости будет удобнее изложить во второй части настоящего сочинения.

§ 44. ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ СООТНОШЕНИЯ В БЕСКОНЕЧНО МАЛОМ ТРЕУГОЛЬНИКЕ

1. Значения тригонометрических функций угла параллельности при весьма малых значениях аргумента. Положим, что аргумент x в функции $\Pi(x)$ принимает столь малые по сравнению с гиперболической постоянной k значения Δx , что кубом отношения $\frac{\Delta x}{k}$ можно пренебречь. В этом предположении вычислим значения тригонометрических функций от $\Pi(x)$; иначе говоря, вычислим значения этих функций с точностью до бесконечно малых второго порядка относительно отношения $\frac{\Delta x}{k}$. Мы воспользуемся соотношением (XXII₁) (стр. 294), полагая в нем $\xi = \Delta x$. Разлагая $\text{sh } \frac{\Delta x}{k}$ в ряд по степеням $\frac{\Delta x}{k}$ и отбрасывая члены третьей и более высоких степеней, получим по второй формуле (XXII₁):

$$\text{ctg } \Pi(\Delta x) = \text{sh} \left(\frac{\Delta x}{k} \right) = \frac{\Delta x}{k}. \quad (\text{LXXIII}_1)$$

Еще с более высокой точностью первое соотношение (XXII₁) дает:

$$\text{csc } \Pi(\Delta x) = \text{ch } \frac{\Delta x}{k} = 1 + \frac{(\Delta x)^2}{2k^2}, \quad (\text{LXXIII}_2)$$

а вместе с тем

$$\sin \Pi(\Delta x) = 1 - \frac{(\Delta x)^2}{2k^2}. \quad (\text{LXXIII}_3)$$

Перемножая же равенства (LXXIII₁) и (LXXIII₃), с той же точностью получаем:

$$\cos \Pi(\Delta x) = \frac{\Delta x}{k}. \quad (\text{LXXIV})$$

Можно сказать, что формулы (LXXIII) и (LXXIV) выражают значения соответствующих функций с точностью до бесконечно малых значений аргумента второго порядка (включительно).

2. Тригонометрические соотношения в треугольниках с весьма малыми сторонами. Рассмотрим теперь прямоугольный треугольник, в котором стороны настолько малы по сравнению с k , что кубом отношения каждой стороны к k можно пренебречь; иначе говоря, посмотрим, какой вид принимают тригонометрические уравнения прямоугольного треугольника, если стороны его бесконечно малы, и мы ограничиваемся бесконечно малыми второго порядка. Вставляя в формулы (XXVII_{1,2}) (стр. 297) вместо $\text{ctg } \tilde{a}$, $\text{ctg } \tilde{b}$, $\text{ctg } \tilde{c}$ значения (LXXIII₁), получим:

$$a = c \sin A, \quad b = c \sin B. \quad (\text{LXXV}_1)$$

Точно так же, заменяя в формулах (XXVI_{6,7}) $\cos \tilde{a}$, $\cos \tilde{b}$, $\cos \tilde{c}$ соответственно через $\frac{a}{k}$, $\frac{b}{k}$ и $\frac{c}{k}$, получим:

$$a = c \cos B, \quad b = c \cos A. \quad (\text{LXXV}_2)$$

Если, наконец, в (XXVII₆) вместо $\sin \tilde{a}$, $\sin \tilde{b}$, $\sin \tilde{c}$ подставим, согласно формуле (LXXIII₃),

$$1 - \frac{a^2}{2k^2}, \quad 1 - \frac{b^2}{2k^2}, \quad 1 - \frac{c^2}{2k^2}$$

и опустим члены порядка выше второго, то получим:

$$a^2 + b^2 = c^2. \quad (\text{LXXV}_3)$$

Мы видим, таким образом, что тригонометрические соотношения гиперболической плоскости вырождаются в уравнения евклидовой геометрии, если стороны треугольника становятся весьма малыми, — настолько малыми, что третьими степенями отношений сторон к гиперболической постоянной можно пренебречь; иначе говоря, если выразить эти соотношения с точностью до бесконечно малых второго порядка.

Правда, предыдущие соображения относятся только к уравнениям прямоугольного треугольника. Но если тот же прием применить к общему уравнению (XXI) (стр. 290), то увидим, что и оно перейдет в обыкновенное выражение теоремы косинусов евклидовой геометрии.

Мысль Лобачевского, изложенная в рубрике 5 § 20 (стр. 177—178), допускает теперь более точное выражение: метрические соотношения гиперболической геометрии обращаются в уравнения евклидовой геометрии, когда длины входящих в эти уравнения линейных элементов настолько малы, что кубами их отношений к гиперболической постоянной можно пренебречь. Коротко это выражают так: в гиперболической плоскости геометрия участка бесконечно малого протяжения совпадает с геометрией Евклида.

Иначе это выражают следующим образом. Если сосредоточить внимание не на элементах длины фигур, а на значении постоянной k , т. е., сохраняя в треугольнике длины сторон, считать, что постоянная k неограниченно возрастает, то метрические соотношения приближаются к евклидовым и в пределе в них обращаются; евклидова геометрия является предельным случаем неевклидовой геометрии.

Число $-\frac{1}{k^2}$ называют кривизной гиперболической плоскости.

Обоснование этой терминологии найдет себе место ниже (во второй части настоящего сочинения). Когда кривизна плоскости стремится к нулю, ее геометрия приближается к евклидовой, и когда кривизна плоскости обращается в нуль, ее геометрия переходит в евклидову. Можно сказать, что геометрия Евклида есть геометрия плоскости нулевой кривизны. Как мы увидим ниже, это соображение относится не только к плоскости, но и к пространству.

Посмотрим еще, как выражается площадь прямоугольного треугольника, катеты которого (a , b) весьма малы (кубами их длины можно пренебрегать). Воспользуемся для этого формулой (XLIV) (стр. 322), выражающей площадь прямоугольного треугольника через его стороны.

Вычислим правую часть с точностью до бесконечно малых третьего порядка относительно сторон треугольника. Заменяя для этого, согласно формулам (LXXIII) (стр. 345), в правой части (XLIV) $\operatorname{ctg} \Pi\left(\frac{a}{2}\right)$, $\operatorname{ctg} \Pi\left(\frac{b}{2}\right)$ и $\sin \Pi\left(\frac{c}{2}\right)$ через $\frac{a}{2k}$, $\frac{b}{2k}$ и $1 - \frac{c^2}{8k^2}$, а в левой части $\sin \frac{\delta}{2}$ через $\frac{\delta}{2}$, получим:

$$\delta = \frac{1}{2k^2} ab;$$

вместе с тем, по формуле (XLIII₂) (стр. 321),

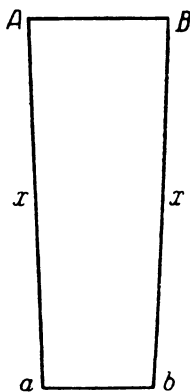
$$\Delta = \delta k^2 = \frac{1}{2} ab;$$

мы приходим к формуле евклидовой геометрии.

3. Задача Гаусса. В связи с этим Гаусс поставил себе вопрос, в какой мере тригонометрия неевклидовой плоскости определяется тем, что соотношения между элементами бесконечно малого треугольника совпадают с уравнениями евклидовой тригонометрии. В его литературном наследии сохранился фрагмент, содержащий решение этого вопроса. Это — чрезвычайно сжато составленный схематический набросок¹⁾, сохранившийся на четырех листах в принадлежавшем Гауссу экземпляре «*Geometrische Untersuchungen*» Лобачевского. Штекелю составило немало труда его расшифровать. На наш взгляд, это — наиболее ценный материал из всего наследия Гаусса, относящегося к основаниям геометрии. Мы помещаем свободное, но обстоятельное изложение этого фрагмента. Нужно, однако, иметь в виду следующее: метрические соотношения, изложенные выше, относятся к плоскости H_2 ; но рассуждения Гаусса предполагают непрерывную плоскость, непрерывность прямой и даже существование производных от тех функций, к которым он приходит. С другой стороны, не только фрагмент Гаусса, но и комментарии Штекеля не претендуют на выдержанную строгость рассуждения. При всем том они представляют несомненный интерес; мы здесь дадим им место.

4. Вспомогательные функции. Как Лобачевский и Больаи, Гаусс при построении метрики неевклидова пространства вводит для своего исследования вспомогательные функции, именно две, одну из которых он обозначает через $f(x)$, а другую — через $g(x)$. Первая из них, $f(x)$, по существу, не отличается от функции, которой пользовался Больаи, $\bigcirc x$ (длина окружности, радиус которой равен x); именно:

$$f(x) = \frac{\bigcirc x}{2\pi}. \quad (1)$$

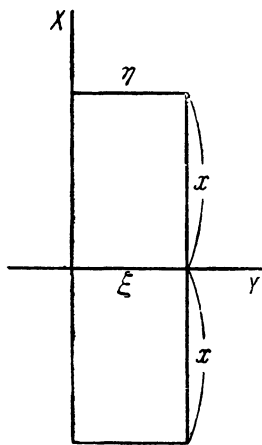


Черт. 242.

Другая функция $g(x)$ имеет следующее значение. Если возьмем четырехугольник Саккери $AaBb$ с бесконечно малым нижним основанием ab (черт. 242), верхним основанием AB и высотой x , то отношение $AB : ab$ в пределе (т. е. при $ab \rightarrow 0$) представляет собой функцию от x ,

¹⁾ [70], стр. 255 — 264.

которую Гаусс и обозначает через $g(x)$. Заметим, что $g(x) \geq 1$. Мы эту функцию $g(x)$ уже знаем. В самом деле, согласно формуле (XXXIII₁) (стр. 307), с одной стороны, и формуле (LXXIV) (стр. 345), с другой, когда отрезки AB и ab стремятся к нулю, их отношение $(AB : ab)$ стремится к пределу $\frac{1}{\sin h}$, потому что при этом предельном переходе m стре-



Черт. 243.

т. е. $g(x)$ есть функция четная. Когда x стремится к нулю, $g(x)$ стремится к единице. Если поэтому функция $g(x)$ допускает производные первого и второго порядка (Гаусс это везде предполагает), то разность $1 - g(x)$ при $x \rightarrow 0$ представляет собой бесконечно малую не ниже второго порядка.

б. Дифференциальные соотношения в прямоугольном треугольнике. Пусть ABC будет прямоугольный треугольник с прямым углом при вершине C (черт. 244). Перейдем от этого треугольника к прямоугольному же треугольнику $AB'C'$, причем катеты a и b получают весьма малые приращения $CC' = db$ и $DB' = da$ (на нашем чертеже $DC' = BC = a$). Отрезок DB проектируем на AB' и тогда, с точностью до бесконечно малых первого порядка, приращение гипотенузы

$$dc = B'F = B'E + EF.$$

Так как углы $DB'E$ и EDB бесконечно мало отличаются от угла B , а в бесконечно малом прямоугольнике $BGEF$ $EF = BG$, то с той же

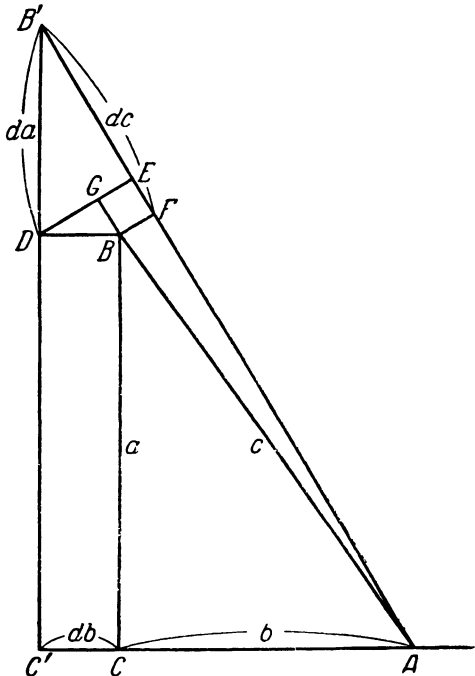
мится к h ; поэтому (заменяя h через x) находим, что

$$g(x) = \frac{1}{\sin \Pi(x)}.$$

Но Гауссу еще нужно эту функцию разыскать, исходя только из сделанного допущения.

Здесь отметим одно существенное свойство функции $g(x)$, о котором Гаусс не упоминает, хотя в ходе дальнейшего рассуждения оно необходимо. Построим на осях координат четырехугольник Саккери с бесконечно малыми основаниями ξ и η (черт. 243). Пусть x будет абсцисса вершины верхнего основания (при расположении координат, указанном на чертеже); она может иметь как положительное, так и отрицательное значение. Под

$g(x)$ мы можем разуметь отношение $\frac{\eta}{\xi}$; вместе с тем ясно, что следует положить $g(-x) = g(x)$,



Черт. 244.

точностью до бесконечно малых первого порядка

$$B'E = da \cos B, EF = BG = DB \sin B = CC' g(a) \sin B = db g(a) \sin B.$$

Вследствие этого

$$dc = da \cos B + db g(a) \sin B. \quad (2a)$$

Совершенно ясно, что таким же образом мы можем получить

$$dc = db \cos A + da g(b) \sin A. \quad (2b)$$

Это — дифференциальные соотношения прямоугольного треугольника в том смысле, что они связывают бесконечно малые приращения его элементов ¹⁾.

6. Общие уравнения, связывающие элементы прямоугольного треугольника. Исключая dc из уравнений (2a) и (2b), получаем

$$\begin{aligned} da [\cos B - g(b) \sin A] = \\ = db [\cos A - g(a) \sin B]. \end{aligned}$$

А так как приращения da и db могут иметь совершенно произвольные значения, то

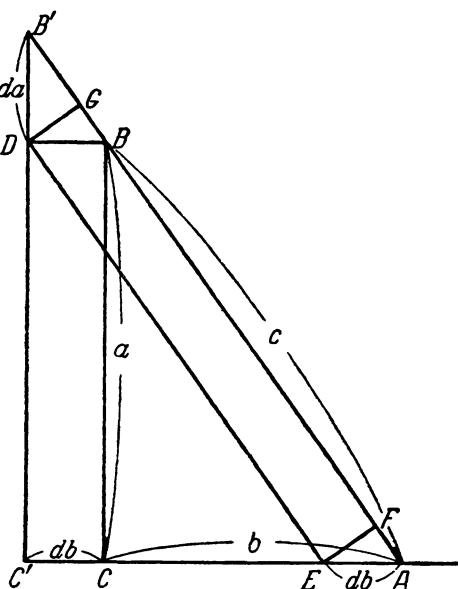
$$\cos B = g(b) \sin A, \quad (3a)$$

$$\cos A = g(a) \sin B. \quad (3b)$$

Так Гаусс с совершенно неожиданной простотой получает два общих уравнения, связывающих элементы прямоугольного треугольника во всякой геометрии, которая в бесконечно малом совпадает с геометрией Евклида.

Гаусс выводит еще одно, третье соотношение, которое мы сейчас изложим.

В прямоугольном треугольнике ABC (черт. 245) дадим катету b бесконечно малое приращение $CC' = db$ и, сохраняя угол A , составим прямоугольный треугольник $AB'C'$; пусть $C'D = CB = a$, так что $DB' = da$. Если сделаем $C'E = CA = b$, то треугольники $DC'E$ и BCA будут равны, $DE = c$, $EA = db$. Теперь, проектируя отрезок DE на гипотенузу AB' , получаем бесконечно малые прямоугольные треугольники: $\triangle DB'G$ с углом B' , бесконечно мало отличаю-



Черт. 245.

¹⁾ Полезно посмотреть, как выглядят эти соотношения в евклидовой геометрии. Дифференцируя соотношение

$$c^2 = a^2 + b^2,$$

получаем

$$c \, dc = a \, da + b \, db.$$

Заменяя здесь a через $c \cos B$, а b — через $c \sin B$ и сокращая на c , получаем:

$$dc = da \cos B + db \sin B.$$

Это совпадает с уравнением (2a), так как в евклидовом пространстве $g(a) = 1$. Последнее соотношение в евклидовой геометрии можно написать также в виде:

$$dc = db \cos A + da \sin A.$$

идимся от B ; $\triangle GDB$, в котором от B бесконечно мало отличается угол GDB , и, наконец, $\triangle EFA$, в котором угол при E бесконечно мало отличается от $\frac{\pi}{2} - A$. Вследствие этого угол DEF можно считать прямым.

Из бесконечно малого треугольника EFA имеем

$$EF = db \sin A,$$

а вследствие соотношения (3а)

$$EF = \frac{db \cos B}{g(b)} = \frac{db \cos B g(a)}{g(a) g(b)}.$$

С другой стороны, из четырехугольника Саккери $DC'CB$ следует, что

$$DB = db g(a),$$

а из треугольника DGB :

$$DG = DB \cos B = db \cos B g(a).$$

Сличая полученные выражения для EF и DG и имея в виду, что $g(a) \cdot g(b) > 1$, находим, что $DG > EF$. Мы можем поэтому смотреть на $DGFE$ как на четырехугольник Саккери с нижним основанием EF . Таким образом,

$$DG = EF g(DE) = EF g(c) = db \sin A g(c).$$

Сопоставляя эти два результата, получаем:

$$g(a) \cos B = g(c) \sin A \quad (4a)$$

и совершенно аналогично

$$g(b) \cos A = g(c) \sin B. \quad (4b)$$

Ввиду соотношений (3а) и (3b) каждое из равенств (4а) и (4b) дает

$$g(c) = g(a) g(b)^{-1}. \quad (5)$$

Уравнениями (3а), (3b) и (5) или (4а), (4b) и (5) исчерпываются соотношения между элементами прямоугольного треугольника.

Тригонометрия прямоугольного треугольника в плоскости, удовлетворяющей поставленным требованиям, таким образом, по существу, установлена. Гаусс выводит, однако, еще одно соотношение.

Именно, перемножая уравнения (3а) и (3b) и учитывая равенство (5), получаем

$$\operatorname{ctg} A \operatorname{ctg} B = g(c). \quad (6)$$

Уравнения (3а), (3b) и (6) также составляют полную систему независимых уравнений прямоугольного треугольника. Они имеют место на евклидовой плоскости; они сохраняются также на гиперболической плоскости, поскольку на ней выполняются предпосылки, на основе которых они выведены: в бесконечно малом треугольнике имеют место соотношения евклидовой геометрии. Мы и непосредственно можем убедиться

¹⁾ В евклидовом пространстве это уравнение обращается в тождество. В гиперболическом пространстве $g(x) = 1 : \sin \Pi(x)$ (см. стр. 348), и соотношение (5) принимает известную нам форму:

$$\sin \Pi(c) = \sin \Pi(a) \sin \Pi(b).$$

в том, что они справедливы и на гиперболической плоскости, поскольку в этой плоскости мы уже знаем ее тригонометрические уравнения и функцию $g(x)$. С этой точки зрения на соотношения (3) — (6) можно смотреть как на уравнения абсолютной тригонометрии, т. е. не зависящие от постулата о параллельных линиях; от постулата зависит только вид функции $g(x)$. Некоторые авторы, например, Бонола [115], называют эти соотношения абсолютной тригонометрией.

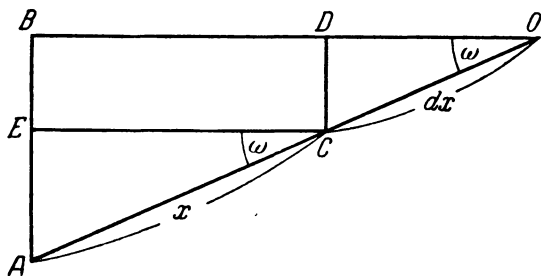
Любопытно, однако, что они могут быть выведены и без гипотезы о бесконечно малых треугольниках, непосредственно из аксиоматики и предположений абсолютной геометрии. Это и было выполнено Тилли (J. Tilly [116]), которому заметка в наследии Гаусса известна не была.

Но Гаусса интересует более глубокий вопрос. Поскольку в гиперболической плоскости действует предпосылка о бесконечно малых треугольниках, в ней имеют место тригонометрические соотношения (3), (4), (5) и (6). Но следует ли отсюда, что всякая геометрия, для которой в бесконечно малом действуют евклидовы соотношения и поэтому имеют место уравнения (3) — (6), совпадает либо с геометрией Евклида, либо с геометрией Лобачевского; иначе говоря, определяется ли гиперболическая геометрия, отличная от евклидовой, тем, что в ней в бесконечно малом сохраняется геометрия Евклида? Для решения этого вопроса нужно попытаться разыскать функцию $g(x)$, поскольку она определяется установленными уравнениями. В процессе этого вычисления играет вспомогательную, но все же существенную роль функция $f(x)$.

7. Первое дифференциальное уравнение, связывающее функции $f(x)$ и $g(x)$. Гаусс устанавливает, прежде всего, два дифференциальных уравнения первого порядка, связывающих функции $f(x)$ и $g(x)$. Рассуждения, приводящие к первому из этих уравнений, также очень просты. Они сводятся к следующему.

Дуга радиуса r , которой соответствует центральный угол ω , имеет длину $\frac{\omega \cdot r}{2\pi} =$

$= \omega f(r)$ [см. (1)]. Если на стороне весьма малого угла $AOB = \omega$ (черт. 246) отложим от вершины отрезки $dx = OC$ и $x = CA$ и из точек C и A опустим перпендикуляры CD и AB на вторую сторону угла OB , то они по длине отличаются от дуг радиусов OC и OA на бесконечно малые высших порядков, так что мы можем положить:



Черт. 246.

$$CD = \omega f(dx), \quad AB = \omega f(x + dx) = [f(x) + df(x)] \omega.$$

Если теперь из точки C восставим перпендикуляр CE к CD и примем во внимание, что в бесконечно малом треугольнике COD угол при вершине C равен $\frac{\pi}{2} - \omega$, то найдем, что угол $ACE = \omega$.

Поэтому

$$AE = \omega f(x), \quad EB = CD g(x) = \omega f(dx) g(x).$$

Следовательно,

$$\omega f(x) + \omega f(dx) g(x) = \omega [f(x) + df(x)],$$

$$df(x) = g(x) f(dx).$$

Но $f(0) = 0$, поэтому $f(dx) = c dx$, где c — постоянная; вместе с тем

$$\frac{df(x)}{dx} = c g(x)^1). \quad (7)$$

Это и есть первое дифференциальное уравнение, связывающее функции $f(x)$ и $g(x)$.

8. Вспомогательная формула. Вывод второго дифференциального уравнения несколько сложнее и распадается на две части. Первая, вспомогательная часть заключается в следующем.

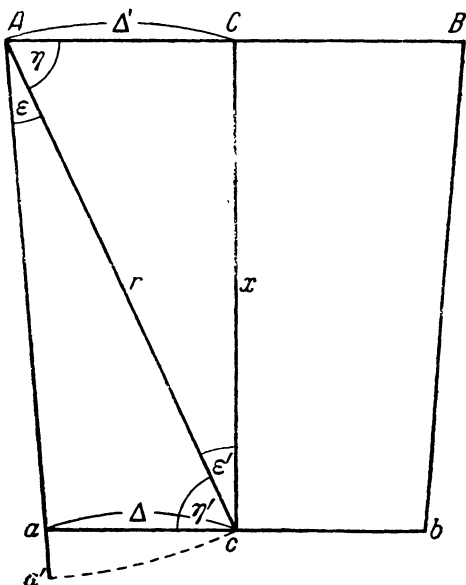
Возьмем опять четырехугольник Саккери $AabB$ (черт. 247) с бесконечно малым нижним основанием ab . Угол A бесконечно мало отличается от прямого угла; эту бесконечно малую разность $\frac{\pi}{2} - A$ обозначим через δ :

$$\frac{\pi}{2} - A = \delta.$$

Гаусс выражает эту разность через основание и высоту четырехугольника и этим путем обнаруживает, что она представляет собой бесконечно малую того же порядка, что и основание четырехугольника. Этот вывод в несколько более подробном изложении, чем у Гаусса, заключается в следующем.

Соединив середины C и c оснований четырехугольника Саккери, $AabB$, получим среднюю линию Cc , которая перпендикулярна к обоим основаниям. Проведем диагональ Ac четырехугольника $AacC$ и обозначим четыре угла, образовавшиеся при вершинах A и c , через ε , η и ε' , η' , как размечено на чертеже; основание ac , которое считаем бесконечно малым, будем обозначать через Δ , среднюю линию четырехугольника Cc — через x , а диагональ Ac — через r . То обстоятельство, что $ac = \Delta$ есть бесконечно малая величина, тогда как $Cc = x$ (а с ним и Aa) сохраняет конечное значение, имеет двоякое следствие. Во-первых, угол $\varepsilon = \angle Aac$ бесконечно мал; во-вторых, ac отличается от дуги $a's$ круга, описанного из точки A как из центра, на бесконечно малую более высокого порядка, чем Δ ; поэтому, с точностью до бесконечно малых первого порядка

¹⁾ Заметим, что $c = 1$. В самом деле, $2\pi f(dx)$ есть длина окружности радиуса dx ; поскольку в бесконечно малом имеет место геометрия Евклида, $2\pi f(dx) = 2\pi dx$, т. е. $\frac{f(dx)}{dx} = 1$. Впрочем, это не имеет значения для дальнейших рассуждений.



Черт. 247:

относительно Δ , можно положить

$$ac = a'c = \varepsilon f(r),$$

а потому

$$\varepsilon = \frac{\Delta}{f(r)}.$$

Если же обозначим AC через Δ' , то таким же образом получим

$$\varepsilon' = \frac{\Delta'}{f(r)}.$$

Теперь заметим, что ввиду бесконечно малой протяженности отрезков ac и AC , отрезки Aa' , Cc , Ac бесконечно мало отличаются один от другого. Поэтому в пределах бесконечно малых первого порядка относительно Δ :

$$\varepsilon = \frac{\Delta}{f(x)}, \quad \varepsilon' = \frac{\Delta'}{f(x)},$$

а с другой стороны, по определению функции $g(x)$,

$$AB : ab = AC : ac = g(Aa),$$

а потому, также в пределах бесконечно малых первого порядка относительно Δ ,

$$\Delta' = \Delta g(x), \quad \varepsilon' = \frac{\Delta g(x)}{f(x)}.$$

Теперь воспользуемся любым из тригонометрических соотношений (3) в применении к треугольнику ACc . Положив, скажем, в первом из них $B = \eta$, $b = x$, $A = \varepsilon'$, получим:

$$\cos \eta = g(x) \sin \varepsilon'$$

или

$$\sin \left(\frac{\pi}{2} - \eta \right) = g(x) \sin \varepsilon'.$$

Так как угол ε' бесконечно мал, то это равенство обнаруживает, что и угол $\frac{\pi}{2} - \eta$ бесконечно мал (что, впрочем, следует и непосредственно из того, что в прямоугольном треугольнике ACc катет AC бесконечно мал, тогда как другой катет Cc сохраняет конечное значение); вместе с тем, в пределах бесконечно малых первого порядка

$$\frac{\pi}{2} - \eta = g(x) \varepsilon' = \frac{\Delta [g(x)]^2}{f(x)}.$$

Вычитая из этого равенства найденное выше значение ε , получим для разности $\delta = \frac{\pi}{2} - \varepsilon - \eta$, разыскание которой составляет поставленную выше задачу, выражение

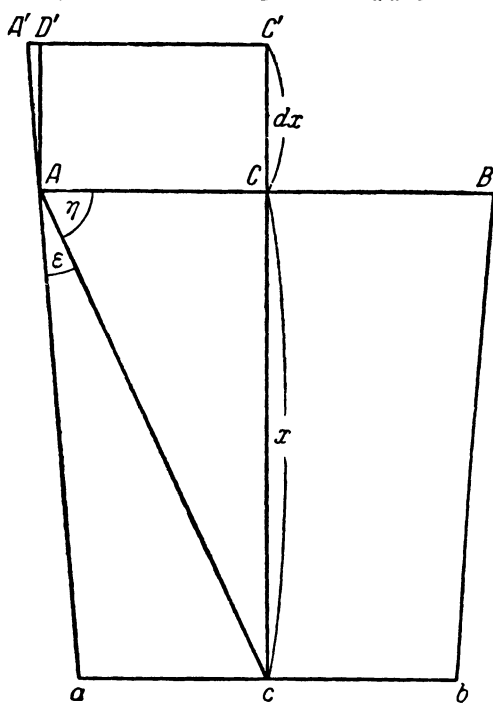
$$\delta = -\frac{\Delta}{f(x)} (1 - [g(x)]^2). \quad (8)$$

При всей элементарности этого вывода он имеет исключительно важное значение. Результат показывает, что сделанное допущение оставляет еще место трем гипотезам:

- 1) $g = 1$; $\delta = 0$; угол aAC прямой; это есть гипотеза прямого угла по терминологии Саккери-Ламберта, ведущая к евклидовой геометрии;
- 2) $g > 1$, $\delta > 0$; угол aAC острый; это есть гипотеза острого угла, ведущая к гиперболической геометрии;
- 3) $g < 1$, $\delta < 0$; угол aAC тупой; это есть гипотеза тупого угла, ведущая к сферической геометрии.

К этому присоединим еще одно важное замечание. Формула (8) выражает отклонение от $\frac{\pi}{2}$ угла при верхнем основании четырехугольника Саккери при бесконечно малом нижнем основании; это есть бесконечно малая порядка Δ . Остановимся еще на том случае, когда высота четырехугольника $AabB$ бесконечно мала. Так как $g(x)$ есть четная функция и стремится к единице, когда x стремится к нулю, то $1 - g(x)$ есть бесконечно малая не ниже второго порядка (порядка x^2). Напротив, $f(x):x$ стремится к единице, когда x стремится к 0, так как при бесконечно малом x окружность радиуса x можно считать равной $2\pi x$. Поэтому при x бесконечно малом δ есть бесконечно малая не ниже второго порядка.

9. Второе дифференциальное уравнение. Теперь обратимся к самому выводу второго дифференциального уравнения, связывающего



Черт. 248.

функции $f(x)$ и $g(x)$. С этой целью (черт. 248) даем отрезку x малое приращение $CC' = dx$, из точки C' восстанавливаем перпендикуляр к прямой Cc и на нем откладываем отрезок $C'D' = CA$. Теперь получаем четырехугольник Саккери $ACC'D'$ с нижним основанием CC' и боковой стороной $AC = C'D'$. Однако в этом четырехугольнике все стороны бесконечно малы; в нем имеет, следовательно, место евклидова геометрия. Мы можем поэтому считать, что $AD' = CC'$, а углы при нижнем основании прямые, прочие отличаются от прямого на бесконечно малую второго порядка¹⁾.

Положим теперь, что продолжение AA' отрезка aA встречает прямую $C'D'$ в точке A' (наш чертеж сделан в предположении гипотезы острого угла, т. е. aAC считается острым; это никакого значения для дальнейшего развития вывода не имеет). Так как угол $D'AC$ не отличается в пре-

делах бесконечно малых первого порядка от прямого, то угол $A'AD'$ в тех же пределах не отличается от того угла, который мы выше обозначали через δ . Поэтому отрезок $A'D'$ можно считать равным $\delta f(AD') = \delta f(dx)$. С другой стороны,

$$A'D' = A'C' - AC = \Delta [g(x + dx) - g(x)] = \Delta g'(x) dx.$$

Следовательно, $\Delta g'(x) dx = \delta f(dx)$, и вследствие соотношения (8)

$$g'(x) dx = -\frac{f(dx)}{f(x)} (1 - [g(x)]^2). \quad (9)$$

¹⁾ В этом четырехугольнике и основание и высоты бесконечно малы.

Далее

$$f(dx) = f(0) + f'(0)dx + \frac{1}{2}f''(0)dx^2 + \dots$$

Но $f(0) = 0$ по самому определению функции $f(x)$; если поэтому обозначим постоянную $f'(0)$ через c , то в пределах бесконечно малых первого порядка получим $f(dx) = c dx$, а равенство (9) примет вид:

$$g'(x) = -c \frac{1 - [\varphi(x)]^2}{f(x)}. \quad (10)$$

Это и есть второе соотношение, связывающее функции $f(x)$ и $g(x)$.

10. Разыскание функций $f(x)$ и $g(x)$. Для разыскания этих функций исключим $f(x)$ из уравнений (7) и (10). Последнее дает

$$f(x) = -c \frac{1 - [g(x)]^2}{g'(x)}, \quad f'(x) = c \frac{(1 - [g(x)]^2)g''(x) + 2[g'(x)]^2 g(x)}{[g'(x)]^2}.$$

Сопоставляя этот результат с уравнением (7), приходим к дифференциальному уравнению второго порядка, которому должна удовлетворять функция $g(x)$:

$$(1 - g^2)g'' + g'^2 g = 0. \quad (11)$$

Этому дифференциальному уравнению, прежде всего, удовлетворяет $g(x) = C$, где C — постоянная. Но так как, во всяком случае, $g(x)$ стремится к единице, когда x стремится к нулю, то эта постоянная не может быть отличной от единицы. Мы получаем, таким образом, прежде всего интеграл $g(x) = 1$, которому, как мы уже знаем, соответствует евклидова геометрия.

Оставляя этот случай в стороне, рассмотрим случаи $[g(x)]^2 > 1$ и $[g(x)]^2 < 1$.

В первом случае уравнение (11) выражает, что функция $\frac{g'}{\sqrt{g^2 - 1}}$ сохраняет постоянное значение; это постоянное значение должно быть отлично от нуля, потому что случай $g' = 0$ уже исчерпан; обозначим его поэтому через $\frac{1}{k}$. Тогда

$$\frac{g'}{\sqrt{g^2 - 1}} = \frac{1}{k}, \quad \frac{d\varphi}{\sqrt{g^2 - 1}} = \frac{dx}{k}, \quad (12)$$

откуда интегрированием получаем:

$$\ln(g + \sqrt{g^2 - 1}) = \frac{x}{k} + C_1.$$

Но при $x = 0$, $g = 1$, поэтому $C_1 = 0$, $g + \sqrt{g^2 - 1} = e^{\frac{x}{k}}$, откуда

$$g = \frac{1}{2} (e^{\frac{x}{k}} + e^{-\frac{x}{k}}) = \operatorname{ch} \frac{x}{k}. \quad (13)$$

Это дает гиперболическую геометрию: в символике Лобачевского соотношение (13) можно написать в виде:

$$g = \frac{1}{\sin \Pi \left(\frac{x}{k} \right)},$$

как это в гиперболической геометрии действительно имеет место.

Если теперь в уравнении (11) будем считать, что $[g(x)]^2 < 1$, то оно выражает, что

$$\frac{g'}{\sqrt{1-g^2}} = \frac{1}{k},$$

где k — постоянная, отличная от нуля. Интегрирование при учете того же начального условия дает:

$$g = \cos \frac{x}{k},$$

как это имеет место в сферической геометрии.

11. Три системы тригонометрии. Итак, если примем в качестве исходного допущения, что в бесконечно малом имеет место геометрия Евклида, то приходим к трем системам геометрии. При $g(x) = 1$ мы получаем евклидову геометрию, при $g(x) > 1$ получаем гиперболическую геометрию (геометрию Лобачевского), при $g(x) < 1$ получаем сферическую геометрию.

Здесь возникают, однако, два существенных вопроса. Первый из них заключается в следующем. Три системы геометрии, которые мы получили, соответствуют трем гипотезам Саккери-Ламберта. Однако одна из этих гипотез (гипотеза тупого угла) была как одним, так и другим геометром отвергнута. Между тем здесь она выплывает, принося с собой новую, третью геометрическую систему. Где источник этого противоречия?

Это совершенно ясно. Как Саккери, так и Ламберт, а потом Лежандр, Лобачевский и Больyai принимали все постулаты Евклида, кроме постулата о параллельных. Таким образом, принимался и постулат второй, согласно которому отрезок прямой может быть неограниченно продолжен, т. е. может иметь любую длину. Этот именно постулат исключает гипотезу тупого угла. Рассуждения Гаусса этого постулата не предполагают, а потому сохраняют третью геометрическую систему.

Несколько сложнее обстоит дело со следующим вопросом. Рассуждения Гаусса основаны на допущении, что в бесконечно малом треугольнике имеют место соотношения евклидовой тригонометрии; вывод же заключается в том, что в этих условиях при конечных размерах необходимо имеет место одна из трех указанных выше геометрических систем. Между тем мы теперь хорошо знаем, что это не так. Непосредственно допущение Гаусса в евклидовом пространстве остается в силе на всякой поверхности¹⁾, а полученные Гауссом три системы играют роль лишь небольших частных случаев. Отчего же Гаусс уловил только эти три системы? Где источник того, что им утрачена общая геометрия поверхности?

Этот источник заключается в том, что у Гаусса содержатся два дополнительных, неявно им принимаемых постулата. Эти постулаты заключаются в том, что допускается существование функций $f(x)$ и $g(x)$. В самом деле, допущение существования функции $f(x)$ означает требование, что длина окружности есть функция одного только радиуса.

¹⁾ Это будет обстоятельно выяснено во второй части настоящего сочинения. Здесь же мы вынуждены ограничиться указанием, что этот факт выражается формулой (33) или, еще лучше, (33а), на стр. 178 — 179 принадлежащего автору сочинения «Основы теории поверхностей», ч. I. Эти формулы выражают, что на всякой поверхности в бесконечно малом треугольнике квадрат каждой стороны равен сумме квадратов двух других без удвоенного произведения этих сторон на косинус угла между ними — соотношение, характеризующее тригонометрию евклидовой плоскости.

Между тем представим себе две геодезические окружности одного и того же радиуса на эллипсоиде, из которых одна имеет центр в вершине большой оси, а другая — в вершине малой оси. Это значит, что из того и другого центров проведены на эллипсоиде геодезические линии во всех направлениях и на них отложены расстояния, равные x ; этим путем мы получим две геодезические окружности. Эти две окружности при одном и том же радиусе будут иметь различные длины: *длина окружности здесь определяется не только радиусом, но и положением центра. То же относится и к функции $g(x)$: предел отношения верхнего основания бесконечно малого четырехугольника Саккери к нижнему, вообще, зависит не только от высоты четырехугольника, но и от положения нижнего основания.

В чем же заключается источник этого различия? В том, что на эллипсоиде невозможно движение фигур по его поверхности без растяжений и складок, как это имеет место на поверхностях постоянной кривизны.

На поверхности, на которой такие движения возможны, каждая окружность может быть совмещена с любой другой окружностью того же радиуса, и поэтому длина окружности зависит только от радиуса. Таким образом, рассуждения Гаусса предполагают, кроме допущения, относящегося к бесконечно малым фигурам, еще постулат, относящийся к геометрии в целом, — существование движений. Так, в плоскости, к которой собственно и относятся рассуждения Гаусса, предполагается существование движений, при помощи которых каждая точка может быть совмещена с любой другой точкой, и каждый луч, выходящий из первой точки, может быть совмещен с любым лучом, выходящим из второй точки. Если будем такую совокупность движений называть полной, то результат, к которому приводят рассуждения Гаусса, заключается в следующем: если в пространстве в бесконечно малом имеет место геометрия Евклида и если в нем существует полная система движений¹⁾, то его геометрия принадлежит к одному из указанных трех типов.

Вывод Гаусса сделан с чрезвычайным искусством. Однако позже Софус Ли обнаружил, что из существования полной системы движений, сохраняющих инвариантным расстояние между двумя точками, уже без дальнейших допущений вытекает тот же результат: геометрия, предполагающая указанные движения, неизбежно принадлежит к одному из указанных трех типов.

При всем том, эти рассуждения Гаусса представляют большой интерес, во-первых, потому, что они с большой простотой устанавливают уравнения так называемой абсолютной тригонометрии, во-вторых, потому, что рассуждения Ли и его последователей очень сложны, требуют углубленной теории групп; мы к этим рассуждениям еще возвратимся.

Очень любопытно, что аналогичное рассуждение было проведено Киллингом [13] в 1880 г. еще до опубликования посмертной работы Гаусса и притом путем, до некоторой степени аналогичным тому, которым шел Гаусс; именно, он установил дифференциальное уравнение несколько иного типа, которое приводит к тому же результату. Но и рассуждение Киллинга имеет тот же дефект, что и рассуждение Гаусса; мы еще будем иметь случай к этому возвратиться.

¹⁾ О «полной системе движений» или, как часто говорят (следуя С. Ли), о «свободной подвижности» будет говориться во второй части настоящего сочинения.

§ 45. ОСНОВНАЯ МЕТРИЧЕСКАЯ ФОРМА ГИПЕРБОЛИЧЕСКОЙ ПЛОСКОСТИ

1. Дифференциал угла параллельности. Установленное предложение, согласно которому в гиперболической плоскости в бесконечно малом имеют место метрические соотношения евклидовой геометрии, приводит к приложениям исчисления бесконечно малых к геометрии гиперболической плоскости, — можно сказать, к ее дифференциальной геометрии, прежде всего — к измерению длин и площадей средствами дифференциального и интегрального исчисления. Однако совершенно естественно, что при этом приходится оперировать не в плоскости H_2 , в которой даже прямая не предполагается непрерывной, а в плоскости L_2 . Таким образом, в уравнении (XXII) или (XXIII) (стр. 294) мы можем считать, что независимая переменная ξ изменяется непрерывно, $\Pi(\xi)$ будет не только непрерывной, но и дифференцируемой функцией от ξ . Выполняя дифференцирование обеих частей уравнения (XXIII), получаем:

$$\frac{d \Pi(\xi)}{2 \cos^2 \frac{1}{2} \Pi(\xi)} = -\frac{1}{k} e^{-\frac{\xi}{k}} d\xi.$$

Заменяя же здесь $e^{-\frac{\xi}{k}}$ через $\operatorname{tg} \frac{1}{2} \Pi(\xi)$, получаем

$$d \Pi(\xi) = -\frac{2}{k} \sin \frac{1}{2} \Pi(\xi) \cos \frac{1}{2} \Pi(\xi) d\xi$$

или

$$d \Pi(\xi) = d\tilde{\xi} = -\frac{d\xi}{k} \sin \Pi(\xi). \quad (\text{LXXVI})$$

Это выражение дифференциала угла параллельности имеет особенно важное значение в инфинитезимальных вычислениях, проводимых в гиперболической геометрии.

2. Выражение элемента длины в декартовых координатах. Элементом длины служит расстояние между двумя бесконечно близкими точками (ξ_1, η_1) и $(\xi_1 + d\xi, \eta_1 + d\eta)$. Чтобы выразить это расстояние в декартовых координатах, проще всего воспользоваться формулой (XLVIII) (стр. 329). Принимая во внимание, что в рассматриваемом случае $\xi_2 - \xi_1 = d\xi$, заменяя ρ через ds и обращая дробь (XLVIII), можно представить это выражение в виде:

$$\csc \Pi(ds) = \frac{\csc \Pi(d\xi)}{\sin \Pi(\eta_1) \sin \Pi(\eta_2)} - \operatorname{ctg} \Pi(\eta_1) \operatorname{ctg} \Pi(\eta_2). \quad (1)$$

Ведя вычисление с точностью до бесконечно малых второго порядка, мы заменим, согласно формуле (LXXIII₂) (стр. 345), $\csc \Pi(ds)$ и $\csc \Pi(d\xi)$ соответственно через $1 + \frac{ds^2}{2k^2}$ и $1 + \frac{d\xi^2}{2k^2}$. Подставляя эти значения в формулу (1), получим

$$1 + \frac{ds^2}{2k^2} = \frac{1 + \frac{d\xi^2}{2k^2}}{\sin \Pi(\eta_1) \sin \Pi(\eta_2)} - \operatorname{ctg} \Pi(\eta_1) \operatorname{ctg} \Pi(\eta_2)$$

или

$$1 + \frac{ds^2}{2k^2} = \frac{d\xi^2}{2k^2 \sin \Pi(\eta_1) \sin \Pi(\eta_2)} + \csc \Pi(\eta_1) \csc \Pi(\eta_2) - \operatorname{ctg} \Pi(\eta_1) \operatorname{ctg} \Pi(\eta_2). \quad (2)$$

Принимая во внимание, что $\sin \Pi(\eta_2)$ бесконечно мало отличается от $\sin \Pi(\eta_1)$, мы можем с точностью до бесконечно малых второго порядка

заменить первый член через $\frac{d\xi^2}{2k^2 \sin^2 \Pi(\eta_1)}$. Преобразование же двух других членов значительно упростится, если в этом случае перейдем к гиперболическим функциям; по формулам (XXII₁) (стр. 294) имеем:

$$\begin{aligned} \csc \Pi(\eta_1) \csc \Pi(\eta_2) - \operatorname{ctg} \Pi(\eta_1) \operatorname{ctg} \Pi(\eta_2) &= \\ = \operatorname{ch}\left(\frac{\eta_1}{k}\right) \operatorname{ch}\left(\frac{\eta_2}{k}\right) - \operatorname{sh}\left(\frac{\eta_1}{k}\right) \operatorname{sh}\left(\frac{\eta_2}{k}\right) &= \operatorname{ch}\left(\frac{\eta_2 - \eta_1}{k}\right) = \operatorname{ch} \frac{d\eta}{k} = 1 + \frac{d\eta^2}{2k^2}. \end{aligned}$$

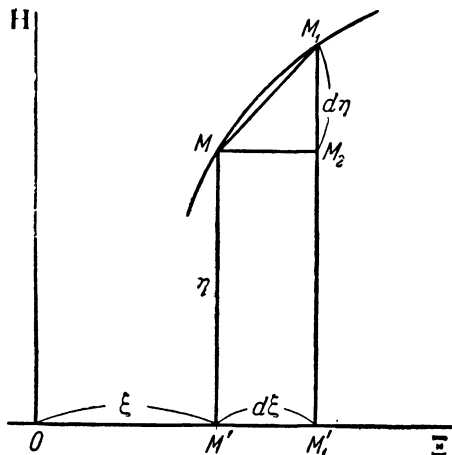
Подставляя полученные выражения в равенство (2) и отбрасывая индекс при η_1 , получаем:

$$ds^2 = \frac{d\xi^2}{\sin^2 \Pi(\eta)} + d\eta^2. \quad (\text{LXXVII})$$

Это есть выражение квадрата элемента длины в гиперболической плоскости в декартовых координатах; его можно рассматривать как основную метрическую форму гиперболической плоскости.

3. Другой вывод выражения метрической формы (LXXVII). Формула (LXXVII) имеет, конечно, основное значение в дальнейшем развитии гиперболической геометрии. Следующий ее вывод более нагляден. Отнесем плоскость к декартовым координатам $O\xi$ и $O\eta$ (черт. 249). Возьмем две бесконечно близкие точки $M(\xi, \eta)$ и $M_1(\xi + d\xi, \eta + d\eta)$ и спроектируем их на ось абсцисс в точки M' и M'_1 . На перпендикуляре $M_1M'_1$ отложим отрезок $M'_1M_2 = MM'$ и соединим точки M и M_2 . Согласно принятым обозначениям, $M'M'_1 = d\xi$, $M_2M'_1 = d\eta$. Четырехугольник Саккери $MM'M'_1M_2$ имеет бесконечно малые основания, а потому углы при верхнем основании MM_2 бесконечно мало отличаются от прямого. Мы можем рассматривать треугольник MM_1M_2 как прямоугольный и потому [по формуле (LXXV₃), стр. 346] положить:

$$\overline{MM_1^2} = \overline{MM_2^2} + \overline{M_2M_1^2}. \quad (3)$$



Черт. 249.

Здесь $MM_1 = ds$, $M_2M_1 = d\eta$. Чтобы вычислить второй катет MM_2 , воспользуемся формулой (XXXIII₁) (стр. 307), согласно которой

$$\cos \Pi\left(\frac{MM_2}{2}\right) = \cos \Pi\left(\frac{M'M'_1}{2}\right) : \sin \tilde{m},$$

где m — средняя линия четырехугольника Саккери $MM'M'_1M_2$. Но при бесконечно малом основании $M'M'_1$ с точностью до бесконечно малых третьего порядка можно, согласно формуле (LXXIV) (стр. 345), заменить $\cos \Pi\left(\frac{MM_2}{2}\right)$ и $\cos \Pi\left(\frac{M'M'_1}{2}\right)$ соответственно через $\frac{MM_2}{2k}$ и $\frac{M'M'_1}{2k}$, так что предыдущее равенство дает:

$$MM_2 = M'M'_1 : \sin \tilde{m} = d\xi : \sin \tilde{m}.$$

Наконец, средняя линия m четырехугольника бесконечно мало отличается от стороны $MM' = \eta$. Таким образом, в пределах бесконечно малых первого порядка

$$MM_2 = \frac{d\xi}{\sin \eta}, \quad (4)$$

и равенство (3) возвращает нас к формуле (LXXVII).

4. Вычисление длины кривой. Располагая выражением элемента длины, мы имеем возможность, как и в евклидовой геометрии, вычислить длину кривой, заданной уравнением

$$f(\xi, \eta) = 0. \quad (5)$$

Если возможно выразить явно η через ξ или ξ через η , вычисление длины соответствующей дуги кривой приводится к квадратурам

$$s = \int_{\xi_0}^{\xi_1} \sqrt{\frac{d\xi^2}{\sin^2 \Pi(\eta)} + d\eta^2} = \int_{\eta_0}^{\eta_1} \sqrt{\frac{d\xi^2}{\sin^2 \Pi(\eta)} + d\eta^2}, \quad (\text{LXXVIII})$$

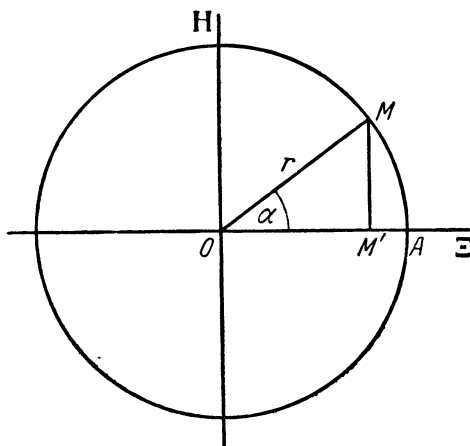
в первой из которых η должно быть выражено через ξ , а во второй ξ через η .

Вычислим, например, этими средствами длину дуги окружности радиуса r . Если начало декартовых координат поместим в центре окружности, а ось $\Xi(\xi)$ проведем через начало дуги, то уравнение окружности можно написать в виде (черт. 250):

$$\sin \Pi(\xi) \sin \Pi(\eta) = \sin \Pi(r). \quad (6)$$

Примем за независимую переменную η ; чтобы вычислить длину дуги в пределах четверти окружности, нужно второй интеграл (LXXVIII) вычислить в пределах от $\eta=0$ до $\eta=\eta_1$, выразив предварительно $d\xi$ через $d\eta$ и η ; ξ_1 и η_1 суть координаты конечной точки дуги. Если длину этой дуги обозначим через s , то

$$s = \int_0^{\eta_1} \sqrt{\frac{d\xi^2}{\sin^2 \Pi(\eta)} + d\eta^2}.$$



Черт. 250.

Дифференцируя уравнение (6), получаем:

$$\cos \Pi(\xi) \sin \Pi(\eta) d\Pi(\xi) + \sin \Pi(\xi) \cos \Pi(\eta) d\Pi(\eta) = 0.$$

Заменяя $d\Pi(\xi)$ и $d\Pi(\eta)$, согласно формуле (LXXVI) (стр. 358), соответственно через $-\frac{d\xi}{k} \sin \Pi(\xi)$ и $-\frac{d\eta}{k} \sin \Pi(\eta)$, получим

$$\cos \Pi(\xi) d\xi + \cos \Pi(\eta) d\eta = 0,$$

откуда

$$d\xi = -\frac{\cos \Pi(\eta)}{\cos \Pi(\xi)} d\eta; \quad (7)$$

вместе с тем

$$\begin{aligned} \frac{d\xi^2}{\sin^2 \tilde{\eta}} + d\eta^2 &= d\eta^2 \left(\frac{\cos^2 \tilde{\eta}}{\sin^2 \tilde{\eta} \cos^2 \tilde{\xi}} + 1 \right) = \\ &= \frac{d\eta^2}{\sin^2 \tilde{\eta} \cos^2 \tilde{\xi}} (1 - \sin^2 \tilde{\xi} \sin^2 \tilde{\eta}) = \frac{d\eta^2 \cos^2 \tilde{r}}{\sin^2 \tilde{\eta} \cos^2 \tilde{\xi}}, \end{aligned}$$

а следовательно,

$$ds = \frac{d\eta \cos \tilde{r}}{\sin \tilde{\eta} \cos \tilde{\xi}}.$$

Несмотря на кажущуюся простоту этого дифференциала, интегрирование его еще требует выражения $\cos \tilde{\xi}$ через η . Это выполняется следующим образом:

$$\begin{aligned} \cos \tilde{\xi} &= \sqrt{1 - \sin^2 \tilde{\xi}} = \frac{1}{\sin \tilde{\eta}} \sqrt{\sin^2 \tilde{\eta} - \sin^2 \tilde{r}} = \\ &= \frac{1}{\sin \tilde{\eta}} \sqrt{\sin^2 \tilde{\eta} \cos^2 \tilde{r} - \sin^2 \tilde{r} \cos^2 \tilde{\eta}} = \cos \tilde{r} \sqrt{1 - \left(\frac{\operatorname{ctg} \tilde{\eta}}{\operatorname{ctg} \tilde{r}} \right)^2} \end{aligned}$$

и таким образом,

$$ds = \frac{d\eta}{\sin \tilde{\eta} \sqrt{1 - \left(\frac{\operatorname{ctg} \tilde{\eta}}{\operatorname{ctg} \tilde{r}} \right)^2}}.$$

Заменяя же по формуле (LXXVI) (стр. 358) $d\eta$ через $-\frac{k d\tilde{\eta}}{\sin \tilde{\eta}}$, получим:

$$\begin{aligned} ds &= -\frac{k d\tilde{\eta}}{\sin^2 \tilde{\eta} \sqrt{1 - \left(\frac{\operatorname{ctg} \tilde{\eta}}{\operatorname{ctg} \tilde{r}} \right)^2}} = \frac{k d \operatorname{ctg} \tilde{\eta}}{\sqrt{1 - \left(\frac{\operatorname{ctg} \tilde{\eta}}{\operatorname{ctg} \tilde{r}} \right)^2}}, \\ s &= k \int_{\tilde{\eta}=0}^{\tilde{\eta}=\eta_1} \frac{d \operatorname{ctg} \tilde{\eta}}{\sqrt{1 - \left(\frac{\operatorname{ctg} \tilde{\eta}}{\operatorname{ctg} \tilde{r}} \right)^2}}. \end{aligned} \quad (8)$$

Из прямоугольного треугольника $МOM'$ (черт. 250) следует, что при всяком η

$$\operatorname{ctg} \tilde{\eta} = \operatorname{ctg} \tilde{r} \sin \alpha, \quad (9)$$

где α есть угол, который дуга AM стягивает при центре окружности. Принимая поэтому α за независимую переменную и дифференцируя уравнение (9), получаем:

$$d \operatorname{ctg} \tilde{\eta} = \operatorname{ctg} \tilde{r} \cos \alpha d\alpha.$$

Вставляя же это в формулу (8), получим

$$s = k \operatorname{ctg} \tilde{r} \int_0^{\alpha} d\alpha = k\alpha \operatorname{ctg} \tilde{r}. \quad (\text{LXXIX})$$

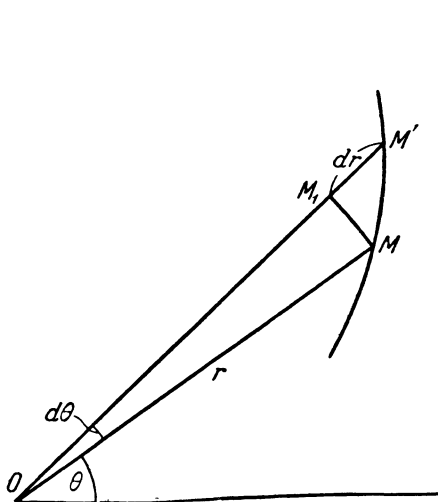
При этом угол α должен быть выражен в тех единицах, в которых $d \sin \alpha = \cos \alpha d\alpha$, т. е. в радианах. Длина всей окружности поэтому равна:

$$C = 2k\pi \operatorname{ctg} \tilde{r}. \quad (\text{LXXIX}_1)$$

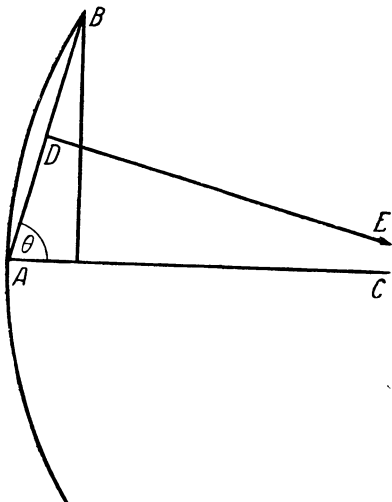
Этот результат мы уже получили выше [формула (XXXV) на стр. 310], пользуясь непосредственно методом Архимеда. В этом совпадении результатов, полученных существенно различными способами, Лобачевский усматривает лучшее доказательство правильности открытой им неевклидовой геометрии.

Конечно, этот простой пример не типичен для более глубоких вычислений Лобачевского, которые он проводит для подтверждения этой мысли и как демонстрацию применения неевклидовой геометрии к вычислениям определенных интегралов. Читателя, который хотел бы глубже вникнуть в этот замысел Лобачевского, мы вынуждены отослать к подлинным его работам (например, к сочинению «О началах геометрии» [53]).

• 5. Выражение основной метрической формы в полярных координатах. Положим, что кривая отнесена к полярным координатам; M и M' — две бесконечно близкие точки на ней с координатами (r, θ) и $(r + dr, \theta + d\theta)$ (черт. 251). Если через точку M проведем дугу



Черт. 251.



Черт. 252.

окружности с центром в начале координат до встречи с радиусом-вектором OM' в точке M_1 , то треугольник MM_1M' в пределах бесконечно малых первого порядка можем считать прямолинейным и прямоугольным, а потому положим:

$$\overline{MM'}^2 = \overline{MM_1}^2 + \overline{M_1M'}^2.$$

Но дуга $MM_1 = k \operatorname{ctg} \tilde{r} d\theta$, $M_1M' = dr$, а потому

$$ds^2 = k^2 \operatorname{ctg}^2 \tilde{r} d\theta^2 + dr^2. \quad (\text{LXXX})$$

Таково выражение квадрата элемента длины в гиперболической плоскости в полярных координатах.

Мы воспользуемся этим выражением для вычисления длины дуги предельной линии по ее хорде. С этой целью примем начало дуги A за начало координат, а проходящую через нее ось кривой AC — за полярную ось (черт. 252) и составим уравнение предельной линии в этих координатах. Это очень просто сделать. Если $B(r, \theta)$ есть произ-

вольная точка кривой, то BAC есть полярный угол θ , AB — радиус-вектор r . Если из середины D хорды AB восставим к ней перпендикуляр DE , то он будет параллелен оси AC ; поэтому

$$\theta = \Pi \left(\frac{r}{2} \right). \quad (\text{LXXXI})$$

Так своеобразно выражается уравнение предельной линии в этих координатах. Для некоторого упрощения вычислений положим $\frac{r}{2} = \rho$; уравнение примет вид $\theta = \tilde{\rho}$. Вместе с тем $d\theta = d\tilde{\rho}$, и формула (LXXX) дает:

$$ds^2 = k^2 \operatorname{ctg}^2 \Pi(2\rho) d\tilde{\rho}^2 + 4 d\rho^2.$$

Если теперь примем во внимание, что, согласно формулам (XXX₁) (стр. 302) и (LXXVI) (стр. 358):

$$\operatorname{ctg} \Pi(2\rho) = \frac{2 \cos \tilde{\rho}}{\sin^2 \tilde{\rho}} \text{ и } d\rho = -\frac{k d\tilde{\rho}}{\sin \tilde{\rho}},$$

то легко получим:

$$ds^2 = \frac{4k^3 d\tilde{\rho}^2}{\sin^4 \tilde{\rho}}; \quad ds = -\frac{2k d\tilde{\rho}}{\sin^2 \tilde{\rho}};$$

знак «минус» взят потому, что s возрастает с убыванием $\tilde{\rho}$ ($= \theta$):

$$s = -2k \int_{r=0}^{r=r} \frac{d\tilde{\rho}}{\sin^2 \tilde{\rho}} = -2k \int_{\tilde{\rho}=\frac{\pi}{2}}^{\tilde{\rho}=\tilde{\rho}} \frac{d\tilde{\rho}}{\sin^2 \tilde{\rho}} = 2k \operatorname{ctg} \tilde{\rho} = 2k \operatorname{ctg} \Pi \left(\frac{r}{2} \right),$$

что опять находится в полном согласии с выражением (XXVIII₂) (стр. 300).

6. Выражение основной метрической формы в бельтрамиевых координатах. В заключение выведем еще выражение элемента длины в бельтрамиевых координатах, которое в дальнейшем получит важное применение. Написав уравнения (XLIX) (стр. 329) преобразования бельтрамиевых координат в декартовы в виде:

$$\cos \tilde{\xi} = x \text{ и } \cos \tilde{\eta} = \frac{y}{\sqrt{1-x^2}} \quad \left(\text{или } \sin \tilde{\eta} = \frac{\sqrt{1-x^2-y^2}}{\sqrt{1-x^2}} \right)$$

и дифференцируя их, получим:

$$-\sin \tilde{\xi} d\tilde{\xi} = dx, \quad -\sin \tilde{\eta} d\tilde{\eta} = \frac{(1-x^2) dy + xy dx}{(1-x^2)^{3/2}};$$

отсюда и из (LXXVI) (стр. 358) получим:

$$d\xi = -\frac{k d\tilde{\xi}}{\sin \tilde{\xi}} = \frac{k dx}{\sin^2 \tilde{\xi}} = \frac{k dx}{1-x^2},$$

$$d\eta = -\frac{k d\tilde{\eta}}{\sin \tilde{\eta}} = \frac{[(1-x^2) dy + xy dx] k}{(1-x^2)^{1/2} (1-x^2-y^2)}.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} ds^2 &= \left(\frac{d\xi^2}{\sin^2 \eta} + d\eta^2 \right) = \\ &= k^2 \frac{dx^2}{(1-x^2)(1-x^2-y^2)} + k^2 \frac{[(1-x^2)dy + xy dx]^2}{(1-x^2)(1-x^2-y^2)^2} = \\ &= k^2 \frac{(1-y^2)dx^2 + (1-x^2)dy^2 + 2xy dx dy}{(1-x^2-y^2)^2} = \\ &= k^2 \frac{(x dx + y dy)^2 + (1-x^2-y^2)(dx^2 + dy^2)}{(1-x^2-y^2)^2}. \end{aligned} \quad (\text{LXXXII})$$

Этим именно выражением, как мы увидим, воспользовался Бельтрами в своем знаменитом мемуаре [117]. Это же выражение можно, конечно, получить непосредственно из формулы (LIII) (стр. 332) расстояния между двумя точками. Действительно, если положим

$$x_1 = x, \quad y_1 = y, \quad x_2 = x + dx, \quad y_2 = y + dy,$$

то соответствующее значение τ^2 [формула (LII) на стр. 331] можно представить в виде:

$$\tau^2 = \frac{1 - 2\alpha - \beta}{(1-\alpha)^2},$$

где

$$\alpha = \frac{x dx + y dy}{1-x^2-y^2}, \quad \beta = \frac{dx^2 + dy^2}{1-x^2-y^2}, \quad (10)$$

так что τ^2 стремится к единице, когда dx и dy стремятся к нулю, при этом α есть бесконечно малая первого порядка, а β — второго порядка по отношению к dx и dy .

С другой стороны, известно, что

$$\frac{1}{2} \ln \frac{1+u}{1-u} = u + \frac{u^3}{3} + \frac{u^5}{5} + \dots,$$

когда $u^2 < 1$; в нашем случае $u = \sqrt{1-\tau^2}$ есть бесконечно малая, а потому с точностью до бесконечно малых второго порядка

$$ds = k \sqrt{1-\tau^2}, \quad ds^2 = k^2 (1-\tau^2).$$

Но вследствие формул (10), $1-\tau^2 = \frac{\alpha^2 + \beta}{(1-\alpha)^2}$, а с точностью до бесконечно малых второго порядка

$$ds^2 = k^2 (\alpha^2 + \beta).$$

Подставляя сюда вместо α и β выражения (10), получим формулу (LXXXII). Заметим еще, что дискриминант формы (LXXXII) равен

$$\frac{1}{(1-x^2-y^2)^3}, \quad (\text{LXXXIIa}').$$

а потому, как и следовало ожидать, имеет положительное значение.

7. Выражение элемента дуги на либмановой карте гиперболической плоскости. Преобразование Либмана (стр. 269) относит каждой точке $M(x, y)$ точку $M'(x', y')$ таким образом, что

$$x' = x, \quad \tilde{y}' + \tilde{y} = \frac{\pi}{2} \quad (\sin \tilde{y}' = \cos \tilde{y}). \quad (11)$$

Дифференцируя эти соотношения, получим:

$$dx' = dx, \quad d\tilde{y}' = -d\tilde{y}.$$

Последнее соотношение напомним, согласно (LXXVI) (стр. 358) в виде

$$dy' \sin \tilde{y}' = -dy \sin \tilde{y}, \quad dy' = -\frac{dy \sin \tilde{y}}{\sin \tilde{y}'} = -\frac{dy \sin \tilde{y}}{\cos \tilde{y}}.$$

Длина элемента ds' , соответствующего элементу ds , выражается формулой

$$ds'^2 = \frac{dx'^2}{\sin^2 \tilde{y}'} + dy'^2 = \frac{dx^2}{\cos^2 \tilde{y}} + \frac{dy^2 \sin^2 \tilde{y}}{\cos^2 \tilde{y}} = \sigma^2 \left(\frac{dx^2}{\sin^2 y} + dy^2 \right),$$

где

$$\sigma^2 = \operatorname{tg}^2 \tilde{y}. \quad (\text{LXXXIII})$$

Таким образом,

$$ds' = \sigma ds. \quad (\text{LXXXIII}_1)$$

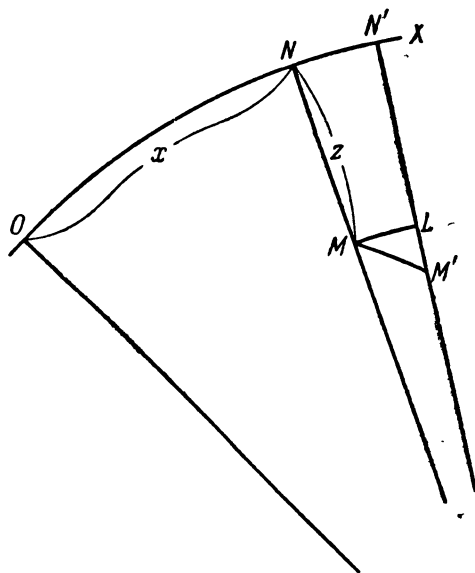
Этим устанавливается в каждой точке пропорциональность бесконечно малых отрезков — подобие в бесконечно малом; преобразование Либмана есть преобразование конформное. Заметим, что преобразование остается конформным и в том случае, если уравнение преобразования (11) заменяется более общим

$$\tilde{y}' + \tilde{y} = c,$$

где c — любая постоянная. Коэффициент подобия (конформности) в этом случае имеет более общее выражение.

8. Орициклические координаты в гиперболической плоскости. Преобразование Либмана приводит к конформному отображению гиперболической плоскости на себя самое.

Своеобразная орициклическая координация приводит к конформному ее отображению на евклидовой плоскости. Возьмем произвольную предельную линию (орицикл) OX (черт. 253), на ней произвольную же точку O . Через каждую точку M нашей гиперболической плоскости (L_2) проведем ось MN этой предельной линии, которая ее встретит в точке N . Длину предельной дуги ON , взяв с надлежащим знаком, обозначим через x , а расстояние NM (длину отрезка NM), также взятое с надлежащим знаком, будем обозначать через z ; число z будем считать положительным, если точка M лежит внутри предельной



Черт. 253;

линии (т. е. если отрезок NM обращен в ту же сторону, что и ось), и отрицательным — если точка M лежит вне предельной линии (т. е. если отрезок NM обращен в противоположную сторону). На самой предельной линии ON $z=0$. Ясно, что значениями x и z однозначно определяется точка M ; их естественно рассматривать как своеобразные координаты на гиперболической плоскости. Координатными линиями $z=c$, $x=a$ служат параллельные предельные линии и их общие оси; координация — ортогональная.

Вычислим элемент длины в этих координатах. Пусть M' будет другая точка, бесконечно близкая к M ; это значит, что если координаты точки M' имеют значения $x + dx$, $z + dz$, то мы будем считать dx и dz независимыми бесконечно малыми. Если через точку M' проведем ось $N'M'$, а через точку M — предельную дугу ML , которая встретит ось $N'M'$ в точке L , то dx и dz суть длины дуги NN' и отрезка LM' ,

длина же дуги $ML = dx \cdot e^{\frac{z}{k}}$ [формула (XIV), стр. 280]. Если через ds' обозначим длину дуги MM' , то

$$ds'^2 = dx^2 \cdot e^{-\frac{2z}{k}} + dz^2. \quad (\text{LXXXIV})$$

Мы заменим, однако, координату z другой y , положив

$$y = ke^{\frac{z}{k}}, \quad z = k \ln \frac{y}{k}.$$

Координата y , таким образом, всегда имеет положительное значение, но при этом дополнительном условии каждому значению y отвечает определенное значение z и обратно. Числа x и y называют орициклическими координатами точки M в гиперболической плоскости.

Вместе с тем,

$$e^{-\frac{2z}{k}} = \frac{k^2}{y^2}, \quad dy = e^{\frac{z}{k}} dz, \quad dz = dy e^{-\frac{z}{k}} = \frac{k dy}{y}.$$

Соотношение (LXXXIV) принимает вид:

$$ds'^2 = \frac{k^2 (dx^2 + dy^2)}{y^2}. \quad (\text{LXXXIV}_1)$$

Представим себе теперь евклидову плоскость и ортогональную координату (x, y) на ней. Каждой точке гиперболической плоскости, имеющей орициклические координаты (x, y) , будет соответствовать действительная точка евклидовой плоскости, имеющей на ней ортогональные декартовы координаты (x, y) ($y > 0$). Гиперболическая плоскость, таким образом, отображена на евклидову полуплоскость; если через ds обозначим элемент длины евклидовой плоскости, соответствующий элементу ds' (LXXXIV₁) гиперболической плоскости, то

$$ds' = k \frac{ds}{y}. \quad (\text{LXXXV})$$

Это отображение — конформное, и в этом смысле говорят, что гиперболическая плоскость, взятая в целом, есть конформно-евклидова. Выражение (LXXXV) называют конформно-евклидовым выражением элемента длины на гиперболической плоскости.

9. Риманово выражение элемента длины в пространстве постоянной кривизны. В своем знаменитом мемуаре «О гипотезах, лежащих в основе геометрии» [118] Риман дает следующее выражение основной метрической формы гиперболического пространства:

$$ds^2 = \frac{(dx_1)^2 + (dx_2)^2}{\left[1 + \frac{K}{4}(x_1^2 + x_2^2)\right]^2}, \quad (\text{LXXXVI})$$

где $K = -\frac{1}{k^2}$ есть кривизна гиперболической плоскости¹⁾. До сих пор неясно, каким образом Риман, не владея еще развернутой метрикой

¹⁾ Формула Римана имеет гораздо более общий характер; она относится к так называемым пространствам постоянной кривизны (как положительной, так и отрицательной) любого числа измерений. К этому мы подробно возвратимся во второй части настоящего сочинения.

неевклидовой геометрии, мог прийти к этому замечательному выражению. Долгое время оно и вообще оставалось недоказанным. В 1903 г. итальянский геометр Финци (А. Finzi) дал формулы, приведшие к доказательству этого утверждения. Однако такое доказательство только устанавливает возможность приведения основной метрической формы пространства постоянной кривизны к виду (LXXXVI), не указывая тех координат, в которых квадратичная форма получает такое выражение. Доказательство, основанное на формулах Финци, было дано Леви-Чивита и помещено им в книге, посвященной абсолютному исчислению [119]. В книге П. К. Рашевского [120] дана своеобразная модификация этого доказательства. Автору настоящего сочинения удалось разыскать эти координаты чисто геометрически, что привело к далеко идущему обобщению так называемых интерпретаций неевклидовой геометрии, которые будут изложены во второй части настоящего сочинения [121]. Покажем, как это осуществляется для гиперболической плоскости.

Пусть X и Y будут бельтрамиевы координаты точки M относительно ортогональных осей OX и OY (черт. 254). Это значит, что если G и H суть проекции точки M на оси координат, то, обозначая радиус-вектор точки M через R , имеем:

$$X = \cos \Pi (OG) = \cos \Pi (R) \cos \theta, \quad (12a)$$

$$Y = \cos \Pi (OH) = \cos \Pi (R) \sin \theta, \quad (12b)$$

и, следовательно,

$$X^2 + Y^2 = \cos^2 \Pi (R). \quad (13)$$

Пусть M' будет середина отрезка OM , x и y — ее бельтрамиевы координаты, $r = OM'$; так как они определяют точку M' , а через нее и точку M , то мы можем рассматривать их как своеобразные координаты точки M . В этих именно координатах основная метрическая форма гиперболической плоскости выражается формулой Римана (LXXXVI). Докажем это.

По определению,

$$x = \cos \Pi (r) \cos \theta, \quad y = \cos \Pi (r) \sin \theta \quad (R = 2r), \quad (14)$$

так что

$$\cos^2 \Pi (r) = x^2 + y^2, \quad x^2 + y^2 < 1. \quad (15)$$

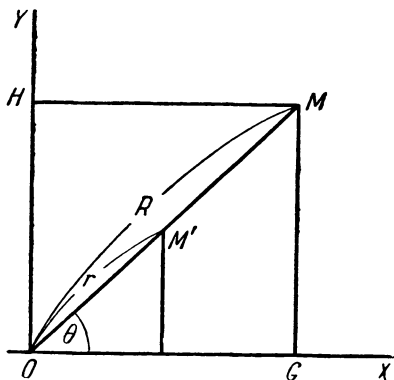
С другой стороны (формула XXX₂, стр. 302),

$$\cos \Pi (R) = \cos \Pi (2r) = \frac{2 \cos \Pi (r)}{1 + \cos^2 \Pi (r)}. \quad (16)$$

Поэтому

$$X = \frac{2 \cos \Pi (r) \cos \theta}{1 + \cos^2 \Pi (r)}, \quad Y = \frac{2 \cos \Pi (r) \sin \theta}{1 + \cos^2 \Pi (r)}, \quad (17)$$

$$X = \frac{2x}{1 + x^2 + y^2}, \quad Y = \frac{2y}{1 + x^2 + y^2}. \quad (18)$$



Черт. 254:

Но если даны координаты x, y точки M' , причем $x^2 + y^2 < 1$, то уравнение (15) определяет $\cos \Pi(r)$, а вместе с тем и r ; уравнения (12а, б) определяют угол θ ; из уравнений (18) найдем:

$$X^2 + Y^2 = \frac{4(x^2 + y^2)}{(1 + x^2 + y^2)^2} = 1 - \left(\frac{1 - x^2 - y^2}{1 + x^2 + y^2} \right)^2 < 1. \quad (19)$$

Соответствующими бельтрамиевыми координатами определится точка M , причем (гиперболический) ее радиус-вектор $R = 2r$. Из уравнений (14) имеем:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \theta &= \frac{y}{x}, \quad \frac{d\theta}{\cos^2 \theta} = \frac{x dy - y dx}{x^2}, \\ d\theta^2 &= \frac{(x dy - y dx)^2 \cos^4 \theta}{x^4} = \frac{(x dy - y dx)^2}{\cos^4 \Pi(r)} = \frac{(x dy - y dx)^2}{(x^2 + y^2)^2} = \\ &= \frac{(x^2 + y^2)(dx^2 + dy^2) - (x dx + y dy)^2}{(x^2 + y^2)^4}. \end{aligned}$$

По формулам удвоения аргумента (XXX) (стр. 302)

$$\cos^2 \Pi(R) = \frac{4 \cos^2 \Pi(r)}{[1 + \cos^2 \Pi(r)]^2}, \quad \sin^2 \Pi(R) = \left[\frac{1 - \cos^2 \Pi(r)}{1 + \cos^2 \Pi(r)} \right]^2.$$

Отсюда:

$$\operatorname{ctg}^2 \Pi(R) = \frac{4 \cos^2 \Pi(r)}{[1 - \cos^2 \Pi(r)]^2} = \frac{4(x^2 + y^2)}{(1 - x^2 - y^2)^2}.$$

Вместе с тем,

$$\operatorname{ctg}^2 \Pi(R) d\theta^2 = \frac{4(x^2 + y^2)(dx^2 + dy^2) - 4(x dx + y dy)^2}{(x^2 + y^2)^2 (1 - x^2 - y^2)^2};$$

С другой стороны, дифференцируя уравнение (15), получаем:

$$-\cos \Pi(r) \sin \Pi(r) d\Pi(r) = x dx + y dy$$

и, следовательно [см. (LXXVI), стр. 358],

$$\frac{1}{k} \cos \Pi(r) \sin^2 \Pi(r) dr = x dx + y dy.$$

А так как $dr = \frac{1}{2} dR$, то

$$dR = \frac{2k(x dx + y dy)}{\sin^2 \Pi(r) \cos \Pi(r)}, \quad dR^2 = \frac{4k^2(x dx + y dy)^2}{[\sin^4 \Pi(r) \cos^2 \Pi(r)]} = \frac{4k^2(x dx + y dy)^2}{(x^2 + y^2)^2 (1 - x^2 - y^2)^2}.$$

Вместе с тем [см. (LXXX), стр. 362]

$$ds^2 = dR^2 + k^2 \operatorname{ctg}^2 \Pi(R) d\theta^2 = \frac{4k^2(dx^2 + dy^2)}{(1 - x^2 - y^2)^2};$$

это и есть формула Римана (LXXXVI), если заменить x и y через $\frac{1}{k}x$, $\frac{1}{2k}y$ и $-\frac{1}{k^2}$ через K .

§ 46. ВЫЧИСЛЕНИЕ ПЛОЩАДЕЙ В ГИПЕРБОЛИЧЕСКОЙ ПЛОСКОСТИ

1. Выражение элемента площади в гиперболической плоскости. Как было показано в § 44, рубр. 2 (стр. 347), площадь прямоугольного треугольника с бесконечно малыми катетами равна

$$\Delta = \frac{1}{2} ab. \quad (1)$$

Мы имеем, таким образом, для площади бесконечно малого прямоугольного треугольника обычное выражение евклидовой геометрии.

значению ξ . Вместо этого можно применить следующие элементарные соображения. Это первое интегрирование есть вычисление площади четырехугольника Саккери $MM'N'\tilde{N}$ с бесконечно малым нижним основанием $d\tilde{\xi}$. Если, однако, обозначим через α угол при верхнем его основании, то эта площадь, по общей формуле (XLIII₂) (стр. 324), равна $k^2(\pi - 2\alpha)$. Между тем по формуле (XXXIII₆) (стр. 308)

$$\cos \alpha = \sin \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) = \operatorname{ctg} \Pi \left(\frac{d\tilde{\xi}}{2} \right) \operatorname{ctg} \tilde{m}.$$

Но так как $\frac{\pi}{2} - \alpha$ бесконечно мало отличается от нуля, $\operatorname{ctg} \Pi \left(\frac{d\tilde{\xi}}{2} \right) - \operatorname{ctg} \tilde{m}$, а m — от η (от ординаты точки M), то это равенство с точностью до бесконечно малых первого порядка можно написать в виде:

$$\pi - 2\alpha = \frac{d\tilde{\xi}}{k} \operatorname{ctg} \tilde{\eta},$$

и, следовательно, площадь этого четырехугольника с бесконечно малым основанием $d\tilde{\xi}$ имеет значение

$$d\sigma = k^2(\pi - 2\alpha) = k d\tilde{\xi} \operatorname{ctg} \tilde{\eta}, \quad (\text{LXXXVIII})$$

где η — ордината точки M . Вместе с тем, площадь «криволинейной трапеции»

$$\sigma = k \int_{\xi_0}^{\xi_1} \operatorname{ctg} \tilde{\eta} d\tilde{\xi}, \quad (\text{LXXXIX})$$

где η — ордината точки кривой, соответствующая значению абсциссы ξ .

Этот результат можно подтвердить прямым интегрированием выражения (LXXXVII) по η , суммируя элементы $abcd$. В самом деле, площадь четырехугольника $M'MNN'$ (строго говоря, $M'M\tilde{N}N'$)

$$d\sigma = d\tilde{\xi} \int_0^{\eta} \frac{d\eta}{\sin \tilde{\eta}}.$$

Чтобы выполнить это интегрирование, заменяем $d\eta$ по формуле (LXXVI) (стр. 358) через $\frac{-k d\tilde{\eta}}{\sin \tilde{\eta}}$; получаем

$$d\sigma = -k d\tilde{\xi} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\tilde{\eta}} \frac{d\tilde{\eta}}{\sin^2 \tilde{\eta}} = k d\tilde{\xi} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\tilde{\eta}} d \operatorname{ctg} \tilde{\eta} = k \operatorname{ctg} \tilde{\eta} d\tilde{\xi}.$$

3. Вычисление площади трипрямоугольника. Чтобы вычислить площадь трипрямоугольника, воспользуемся формулой (LXXXVIII), т. е. применим ее к тому случаю, когда кривая заменяется прямой, перпендикулярной к начальной ординате (черт. 257). В этом случае выражение (LXXXVIII) нужно проинтегрировать по ξ от 0 до ξ_1 , выразив предварительно $\operatorname{ctg} \eta$ через ξ (OM'). По формуле (XXXII₁) (стр. 304)

$$\cos \tilde{\eta} = \frac{\cos \tilde{f}}{\sin \tilde{\xi}}, \quad \operatorname{ctg} \tilde{\eta} = \frac{\cos \tilde{f}}{\sqrt{\sin^2 \tilde{\xi} - \cos^2 \tilde{f}}}.$$

Таким образом, площадь трипрямоугольника

$$\sigma = k \cos \tilde{f} \int_0^{\xi_1} \frac{d\tilde{\xi}}{\sqrt{\sin^2 \tilde{\xi} - \cos^2 \tilde{f}}} . \quad (3)$$

Знаменатель преобразуем следующим образом:

$$\begin{aligned} \sqrt{\sin^2 \tilde{\xi} - \cos^2 \tilde{f}} &= \sin \tilde{\xi} \sqrt{1 - \cos^2 \tilde{f} \csc^2 \tilde{\xi}} = \\ &= \sin \tilde{\xi} \sqrt{\sin^2 \tilde{f} - \cos^2 \tilde{f} \operatorname{ctg}^2 \tilde{\xi}} = \sin \tilde{\xi} \sin \tilde{f} \sqrt{1 - \operatorname{ctg}^2 \tilde{f} \operatorname{ctg}^2 \tilde{\xi}} . \end{aligned}$$

Подставляя это выражение в формулу (3) и заменяя $d\tilde{\xi}$ через $-\frac{k d\tilde{\xi}}{\sin \tilde{\xi}}$, получим:

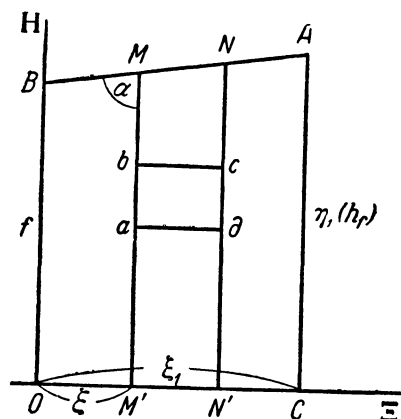
$$\sigma = -k^2 \operatorname{ctg} \tilde{f} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\tilde{\xi}_1} \frac{d\tilde{\xi}}{\sin^2 \tilde{\xi} \sqrt{1 - \operatorname{ctg}^2 \tilde{f} \operatorname{ctg}^2 \tilde{\xi}}} .$$

Если теперь положим

$$\operatorname{ctg} \tilde{f} \operatorname{ctg} \tilde{\xi} = \tau ,$$

то получим:

$$\sigma = k^2 \int_{\tau_0}^{\tau_1} \frac{d\tau}{\sqrt{1 - \tau^2}} = -k^2 \left| \arccos \tau \right|_{\tau_0}^{\tau_1} . \quad (4)$$



Черт. 257.

Согласно формуле (XXXII₄) (стр. 305), для каждого значения $\xi = OM'$ величина τ есть косинус острого угла α при вершине M в трипрямоугольнике $MBOM'$. Когда ξ стремится к нулю, этот угол стремится к $\frac{\pi}{2}$; мы должны поэтому при $\xi = 0$ считать $\arccos \tau = \frac{\pi}{2}$; результат приводит, таким образом, к тому, что

$$\sigma = k^2 \left(\frac{\pi}{2} - A \right) , \quad (\text{XC})$$

где A — острый угол трипрямоугольника.

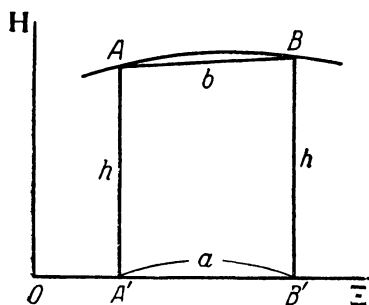
Это находится в полном соответствии с общей формулой (XLIII₂) (стр. 324) для площади всякого многоугольника. Лобачевский очень много занимается такого рода двойными вычислениями, усматривая в каждом совпадении результатов подтверждение правильности построенной им геометрии.

4. Вычисление площади, содержащейся между дугой эквидистанты и ее базисом. Чтобы вычислить площадь, содержащуюся между дугой эквидистанты AB (черт. 258) и ее базисом $A'B'$, нужно интегрировать выражение (LXXXIX) при постоянном $\eta = h$ от $\xi = \xi_0$ до $\xi = \xi_1$; получим:

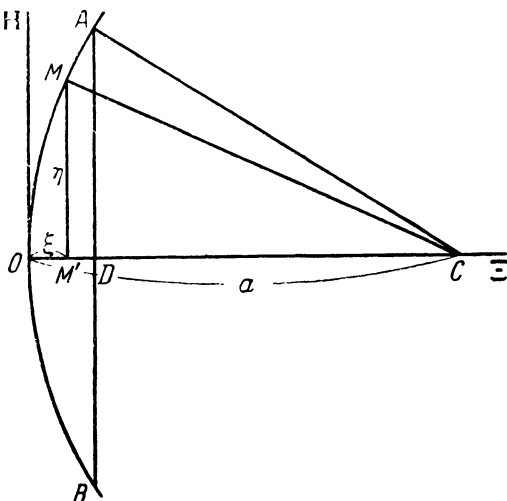
$$\sigma = k \operatorname{ctg} \tilde{h} (\xi_1 - \xi_0) = ka \operatorname{ctg} \tilde{h} . \quad (\text{XCI})$$

где a — базис $A'B'$. Базис a нетрудно вычислить по хорде $b = AB$ дуги и параметру h . Так как по тем же данным (b, h) нетрудно вычислить и площадь четырехугольника Саккери $AA'B'B$ [формулы (XXXIII₂) на стр. 308 и (XLIII₂) на стр. 324], то можно также вычислить и площадь сегмента, содержащегося между дугой эквидистанты и ее хордой, по длине хорды и параметру эквидистанты. Мы не будем проводить этого вычисления, но выполним аналогичное вычисление для предельной линии.

5. Вычисление площади сегмента предельной линии. Воспользуемся формулой (LXXXIX)



Черт. 258.



Черт. 259.

для вычисления площади сегмента, содержащегося между дугой AOB предельной линии и ее хордой AB (черт. 259). Для этого отнесем предельную линию к декартовым координатам, началом которых служит середина O дуги AB , а осью абсцисс — ось кривой, проходящая через точку O . Мы уже вывели уравнение предельной линии в бельтрамиевых и в полярных координатах; ее уравнение в этих декартовых координатах можно было бы получить преобразованием координат, для чего мы располагаем необходимыми формулами. Но будет проще вывести это уравнение непосредственно следующим образом. Возьмем окружность радиуса a , центр которой C лежит на оси абсцисс. Из треугольника $МСМ'$ находим, что уравнение окружности можно написать в виде:

$$\sin \Pi(a - \xi) \sin \Pi(\eta) = \sin \Pi(a).$$

Выражая $\sin \Pi(a - \xi)$ по формуле (XXIX₆) (стр. 302) и сокращая уравнение на $\sin \Pi(a)$, представим уравнение окружности в виде:

$$\sin \tilde{\xi} \sin \tilde{\eta} = 1 - \cos \tilde{a} \cos \tilde{\xi}.$$

Это уравнение перейдет в уравнение нашей предельной линии, если мы положим $a = \infty$, $\cos \tilde{a} = 1$; получим

$$\sin \tilde{\eta} \sin \tilde{\xi} = 1 - \cos \tilde{\xi} \quad (5)$$

или

$$\sin \tilde{\eta} = \operatorname{tg} \frac{\tilde{\xi}}{2},$$

а по основной формуле (XXIII) (стр. 294)

$$\sin \tilde{\eta} = e^{-\frac{\xi}{k}}. \quad (6)$$

Теперь обращаемся к вычислению площади рассматриваемого сегмента. Для вычисления площади половины сегмента нужно выполнить интегрирование (LXXXIX) по ξ от 0 до $h = OD$ или по η от 0 до $l = AD$. Предпочитая последнее, из уравнения кривой (6) получаем

$$\cos \tilde{\eta} d\tilde{\eta} = -\frac{d\xi}{k} e^{-\frac{\xi}{k}} = -\frac{d\xi}{k} \sin \tilde{\eta},$$

так что

$$d\xi = -k \operatorname{ctg} \tilde{\eta} d\tilde{\eta}.$$

Поэтому

$$d\sigma = -k^2 \operatorname{ctg}^2 \tilde{\eta} d\tilde{\eta} = -k^2 \left(\frac{d\tilde{\eta}}{\sin^2 \tilde{\eta}} - d\tilde{\eta} \right),$$

откуда площадь фигуры ODA :

$$\sigma = k^2 \int_{\eta=0}^{\eta=l} d \operatorname{ctg} \tilde{\eta} + k^2 \int_{\eta=0}^{\eta=l} d\tilde{\eta} = k^2 \left(\operatorname{ctg} \tilde{l} + \tilde{l} - \frac{\pi}{2} \right).$$

Площадь всего сегмента AOB :

$$\sigma' = 2k^2 \left(\operatorname{ctg} \tilde{l} + \tilde{l} - \frac{\pi}{2} \right).$$

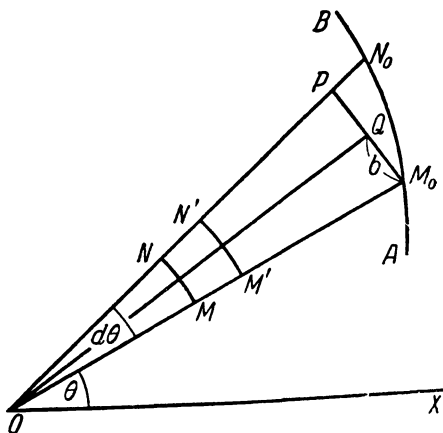
Эта формула вполне совпадает с той, которая была выведена автором настоящего сочинения элементарным путем в 1900 г. [122].

6. Вычисление площади в полярных координатах. Элемент площади в полярных координатах выражается очень просто. Если (r, θ) и $(r+dr, \theta+d\theta)$ суть координаты точек M и N' (черт. 260), причем из центра O проведены дуги окружностей радиусов r и $r+dr$ через точки M и N' , то бесконечно малый четырехугольник $(MNN'M')$ можно рассматривать как прямоугольник в евклидовой плоскости; его площадь равна $MN \cdot MM'$; так как $MN = k \operatorname{ctg} \tilde{r} d\theta$, $MM' = dr$, то

$$d^2\sigma = k \operatorname{ctg} \tilde{r} d\theta dr.$$

Для получения площади бесконечно малого сектора M_0ON_0 с углом $d\theta$, ограничиваемого кривой AB (отбросив от него M_0PN_0 как бесконечно малую более высокого порядка), нужно это выражение проинтегрировать в пределах от $r=0$ до значения r на кривой ($r = OM_0$):

$$d\sigma = k d\theta \int_0^r \operatorname{ctg} \tilde{r} dr = -k d\theta \int_{r=0}^r \frac{\cos \tilde{r}}{\sin^2 \tilde{r}} d\tilde{r} = k d\theta \left| \frac{1}{\sin \tilde{r}} \right|_{r=0}^{r=r}.$$



Черт. 260.

А так как при $r=0$, $\tilde{r} = \frac{\pi}{2}$, то

$$d\sigma = k \frac{1 - \sin \tilde{r}}{\sin \tilde{r}} d\theta,$$

с учетом же формулы (XXX₀) (стр. 302)

$$d\sigma = 2k \operatorname{ctg}^2 \Pi \left(\frac{r}{2} \right) d\theta.$$

Полезно и этот результат проверить элементарными средствами. Здесь $d\sigma$ есть площадь равнобедренного треугольника M_0OP с бесконечно малым углом $d\theta$ при вершине и боковой стороной r ; его площадь рассчитаем по формуле (XI IV) (стр. 322), полагая в прямоугольном треугольнике M_0OQ (Q — середина M_0P) $M_0Q = b$, $OM_0 = r$ и принимая во внимание, что $\sin \frac{\delta}{2}$ мы в этом случае можем заменить через $\frac{\delta}{2}$, $\operatorname{ctg} \Pi \left(\frac{b}{2} \right)$ — через $\frac{b}{2k}$, a и c — через r , получим:

$$\delta = \frac{1}{k} \cos \Pi \left(\frac{r}{2} \right) b.$$

Но из того же прямоугольного треугольника

$$\operatorname{ctg} \tilde{b} = \operatorname{ctg} \tilde{r} \sin \left(\frac{d\theta}{2} \right) \quad \text{или} \quad b = \frac{k}{2} \operatorname{ctg} \tilde{r} d\theta.$$

Подставляя это выражение в предыдущую формулу и выражая $\operatorname{ctg} \tilde{r}$ через $\frac{r}{2}$, по формуле (XXX₁) (стр. 302) получим:

$$\Delta = 2k^2 \delta = 2k^2 \operatorname{ctg}^2 \Pi \left(\frac{r}{2} \right) d\theta.$$

Выразив r через θ и интегрируя между двумя значениями θ , получим площадь сектора, содержащегося между соответствующими радиусами-векторами.

В случае круга r имеет постоянное значение; если θ есть угол сектора при центре, то площадь сектора

$$\sigma = 2k^2 \operatorname{ctg}^2 \Pi \left(\frac{r}{2} \right) \theta, \quad (\text{XCI}_1)$$

а площадь всего круга

$$\sigma = 4\pi k^2 \operatorname{ctg}^2 \Pi \left(\frac{r}{2} \right). \quad (\text{XCI}_2)$$

При весьма малых по сравнению с k значениях r получаем известное выражение площади круга в евклидовой геометрии.

ГЛАВА ДЕВЯТАЯ

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ПОСТРОЕНИЯ В ГИПЕРБОЛИЧЕСКОЙ ПЛОСКОСТИ

§ 47. НАЧАЛА ОБЩЕЙ ТЕОРИИ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ПОСТРОЕНИЙ В ГИПЕРБОЛИЧЕСКОЙ ПЛОСКОСТИ

1. Связанные отрезки. В § 25 (стр. 213) мы установили понятие о дополнительных отрезках, разумев под этим два отрезка x и x' , для которых $\Pi(x') + \Pi(x) = \frac{\pi}{2}$, или, короче, $\tilde{x}' + \tilde{x} = \frac{\pi}{2}$. Таким образом, дополнительные отрезки связаны соотношениями:

$$\sin \tilde{x}' = \cos \tilde{x}, \quad \cos \tilde{x}' = \sin \tilde{x}, \quad \operatorname{tg} \tilde{x}' = \operatorname{ctg} \tilde{x}, \quad \operatorname{ctg} \tilde{x}' = \operatorname{tg} \tilde{x}. \quad (1_{1-4})$$

Поскольку $\tilde{x}$ и $\tilde{x}'$ — углы первой четверти, каждое из соотношений (1) влечет за собой остальные и определяет дополнительные отрезки.

В обобщение этого мы будем называть два отрезка x и x' связанными, если значение какой-либо тригонометрической функции аргумента $\tilde{x}'$ ($\sin \tilde{x}'$, $\cos \tilde{x}'$, $\operatorname{tg} \tilde{x}'$, $\operatorname{ctg} \tilde{x}'$) совпадает со значением какой-либо другой из тех же тригонометрических функций аргумента $\tilde{x}$. Таким образом, отрезок x' связан с отрезком x , если имеет место либо одно из равенств (1) (а следовательно, и три остальные), либо одно из равенств

$$\operatorname{ctg} \tilde{x}' = \cos \tilde{x}, \quad \operatorname{ctg} \tilde{x}' = \sin \tilde{x}, \quad \operatorname{tg} \tilde{x}' = \cos \tilde{x}, \quad \operatorname{tg} \tilde{x}' = \sin \tilde{x}, \quad (2_{1-4})$$

$$\cos \tilde{x}' = \operatorname{ctg} \tilde{x}, \quad \cos \tilde{x}' = \operatorname{tg} \tilde{x}, \quad \sin \tilde{x}' = \operatorname{tg} \tilde{x}, \quad \sin \tilde{x}' = \operatorname{ctg} \tilde{x}. \quad (3_{1-4})$$

В конце § 26 (стр. 226) было показано построение отрезка x' , дополнительного к данному отрезку x . Однако мы рассматриваем теперь еще 8 типов зависимости двух отрезков [уравнения (2) и (3)], и возникает вопрос, всегда ли данному отрезку x отвечает отрезок x' , связанный с ним зависимостью заданного типа, а если такой отрезок существует, то может ли он быть построен циркулем и линейкой? Решение этого элементарного вопроса лучше всего основать на уравнениях (XXXII') равнобедренного трипрямоугольника (стр. 307).

Начнем с зависимости (2₁). Как мы знаем, в равнобедренном трипрямоугольнике между основанием e и высотой h существует соотношение $\operatorname{ctg} \tilde{e} = \cos \tilde{h}$ (XXXII'). Следовательно, если мы построим равнобедренный трипрямоугольник с высотой $h = x$, что всегда возможно (стр. 307), то его основание $e = x'$ удовлетворит требованию. При этом указанное построение может быть выполнено циркулем и линейкой, поскольку оно сводится к построению прямоугольного треугольника по катету h и противолежащему углу $\frac{\pi}{4}$.

Чтобы удовлетворить требованию (2_2) , построим отрезок x_0 , дополнительный к x ; тогда $\sin \tilde{x} = \cos \tilde{x}_0$, и уравнение (2_2) принимает вид $\operatorname{ctg} \tilde{x}' = \cos \tilde{x}_0$, которому, как сейчас показано, можно однозначно удовлетворить.

Чтобы удовлетворить требованию (2_3) , строим отрезок x_0 , для которого $\operatorname{ctg} \tilde{x}_0 = \cos \tilde{x}$; дополнительный к отрезку x_0 отрезок x'_0 удовлетворяет требованию. Наконец, чтобы удовлетворить уравнению (2_4) , строим отрезок x_0 , для которого $\operatorname{ctg} \tilde{x}_0 = \sin \tilde{x}$; дополнительный отрезок x'_0 удовлетворяет требованию.

Таким образом, каждому уравнению (2) удовлетворяет один и только один отрезок. Это можно было предвидеть: правая часть каждого из этих уравнений представляет собой положительное число, меньшее единицы, и в первой четверти всегда найдется угол, тангенс или котангенс которого имеет значение данного числа. Предыдущие соображения обнаруживают, что требуемый отрезок всегда можно построить циркулем и линейкой в плоскости H_2 .

Что касается уравнений (3), то совершенно ясно, что они не могут быть удовлетворены при любом значении x . Левая часть при всяком x' меньше единицы; уравнение не может быть удовлетворено, если правая часть больше единицы. Так, уравнения (3_1) и (3_4) явно не могут быть удовлетворены при $\tilde{x} < \frac{\pi}{4}$ (т. е. при $x > J$), а уравнения (3_2) и (3_3) не могут быть удовлетворены при $\tilde{x} > \frac{\pi}{4}$ (т. е. при $x < J$) (§ 20, рубр. 6,

стр. 179). Но при $\tilde{x} > \frac{\pi}{4}$ (т. е. при $x < J$) уравнения (3_1) и (3_4) удовлетворяются и притом, конечно, однозначно. В самом деле, при $x < J$ может быть построен равнобедренный трипрямоугольник, в котором основание $e = x$ (см. стр. 307). Вследствие соотношения (XXXI₁'), его высота $h = x'$ удовлетворит уравнению (3_1) . Точно так же, при $x < J$ ($\tilde{x} > \frac{\pi}{4}$), если

отрезок x_0 удовлетворяет уравнению $\cos \tilde{x}_0 = \operatorname{ctg} \tilde{x}$ [случай (3_1)], то дополнительный отрезок x'_0 удовлетворяет уравнению (3_4) . Аналогично при $x > J$ дополнительный отрезок, который здесь обозначим через x_0 , будет меньше J ; поэтому [случай (3_1)] найдется отрезок x' , для которого $\cos \tilde{x}' = \operatorname{ctg} \tilde{x}_0$, т. е. $\cos \tilde{x}' = \operatorname{tg} \tilde{x}$; будет удовлетворено уравнение (3_4) . Аналогично исследуется случай (3_3) . Каждое уравнение (3) имеет решение, если только оно не содержит в себе арифметического противоречия, т. е. когда правая часть его меньше единицы. В этом случае соответствующий отрезок может быть построен циркулем и линейкой в плоскости H_2 .

2. Теорема Д. Д. Мордухай-Болтовского о геометрических построениях в гиперболической плоскости (H_2), осуществляемых циркулем и линейкой. В евклидовой геометрии, как известно, решение циркулем и линейкой допускают так называемые конструктивные задачи второй степени; под этим разумеют задачи, которые приводятся к построению отрезка, длина которого выражается через длины заданных отрезков квадрато-радикальной формулой первого измерения, — т. е. однородной формулой первого измерения относительно заданных отрезков, содержащей рациональные операции над ними и последовательное извлечение квадратных корней¹⁾.

¹⁾ См. книгу А. Адлера [123].

Для дальнейшего сопоставления приведем несколько более точную формулировку, аналогичную той, которой пользуется Д. Д. Мордухай-Болтовской в применении к гиперболической плоскости [21]. Применительно к евклидовой плоскости его предложение допускает следующее выражение.

Однородные многочлены от длин заданных отрезков с рациональными коэффициентами мы будем называть (относительно этих отрезков) выражениями нулевого класса; это могут быть выражения любого (целого) измерения. Отрезки, которые могут быть заданы выражениями нулевого класса первого измерения, мы будем называть отрезками нулевого класса.

Алгебраическое выражение z , которое определяется квадратным уравнением

$$p_0 z^2 + p_1 z + p_2 = 0, \quad (4)$$

где p_0 , p_1 и p_2 суть выражения нулевого класса и соответственно нулевого, первого и второго измерения, будем называть выражением первого класса (относительно заданных отрезков). Такой отрезок, длина которого может быть задана по данным отрезкам выражением первого класса, будем называть отрезком второго порядка (поскольку он определяется квадратным уравнением) и первого класса, если он не принадлежит нулевому классу.

Положим теперь, что алгебраическое выражение z определяется квадратным уравнением

$$q_0 z^2 + q_1 z + q_2 = 0, \quad (4')$$

в котором q_0 , q_1 , q_2 суть выражения первого класса и соответственно измерения нулевого, первого и второго; такое выражение будем называть выражением второго класса. Отрезок, длина которого может быть задана по данным отрезкам выражением второго класса первого измерения, будем называть отрезком второго порядка и второго класса.

Дальнейшее развитие этой терминологии совершенно ясно. Алгебраические выражения различных классов суть квадрато-радикальные выражения, о которых речь шла выше. Основная же теорема о разрешимости в евклидовой плоскости конструктивной задачи заключается в том, что построение циркулем и линейкой допускают те и только те отрезки, которые могут быть выражены через данные отрезки выражениями второго порядка первого измерения, но любого класса.

Доказательство этой теоремы в евклидовой геометрии основывается на том, что ортогональные декартовы координаты x , y точки связаны с длиной ее радиуса-вектора r уравнением

$$x^2 + y^2 = r^2, \quad (5)$$

которое при постоянном r и переменных x , y может быть также рассматриваемо как уравнение окружности с центром в начале координат. Прямая же выражается уравнением

$$x \cos \omega + y \sin \omega = p, \quad (6)$$

где ω , p — так называемые нормальные координаты прямой.

В гиперболической плоскости в бельтрамиевых координатах уравнениям (5) и (6) соответствуют уравнения (XLVII₁) (стр. 329) и

(LV) (стр. 333):

$$X^2 + Y^2 = R^2 \quad (5')$$

$$X \cos \omega + Y \sin \omega = P, \quad (6')$$

где

$$X = \cos \tilde{x}, \quad Y = \cos \tilde{y}, \quad R = \cos \tilde{r}, \quad P = \cos \tilde{p};$$

они отличаются от формул (5) и (6) тем, что отрезки x, y, r, p заменены гиперболическими функциями от них¹⁾. Соответственно этому, Д. Д. Мордухай-Болтовской аналогичными рассуждениями приходит к теореме: в гиперболической плоскости могут быть построены (циркулем и линейкой) отрезки второго порядка и любого класса, если в предыдущих определениях под многочленами будем разумеать многочлены от гиперболических функций соответствующих отрезков, а в уравнениях (4) и (4') заменить p, q, z соответствующими гиперболическими функциями $p = \cos \tilde{p}, q = \cos \tilde{q}, z = \cos \tilde{z}$. Впрочем, точное содержание теоремы выяснится лишь при ее доказательстве, приводимом в следующих рубриках. Здесь же заметим только, что Д. Д. Мордухай-Болтовской имеет, собственно, в виду построения, выполняемые не только циркулем и линейкой, но и более сложным комплексом инструментов; мы на этом остановимся ниже, в рубр. 8 § 48 (стр. 399).

3. Замена тригонометрических функций угла гиперболическими функциями отрезка. В ближайшей связи с рассуждениями, к которым мы обращаемся, стоит замена тригонометрических функций заданного угла A гиперболическими функциями отрезка, т. е. разысканием отрезка x , определяемого одним из уравнений

$$\sin A = \sin \tilde{x}, \quad \sin A = \cos \tilde{x}, \quad \sin A = \operatorname{tg} \tilde{x}, \quad \sin A = \operatorname{ctg} \tilde{x}. \quad (7)$$

Первому из уравнений (7) удовлетворяет отрезок параллельности a , соответствующий углу A ($A = \tilde{a}, x = a$); второму удовлетворяет отрезок $x = a'$, дополнительный к a . Далее, заменяя $\sin A$ через $\sin \tilde{y}$, найдем отрезки x и x_1 , удовлетворяющие равенствам $\sin \tilde{y} = \operatorname{tg} \tilde{x}$ и $\sin \tilde{y} = \operatorname{ctg} \tilde{x}_1$, [равенства (2), стр. 375], как это указано в предыдущей рубрике, и, таким образом, придем к решению последних уравнений.

И обратно, если дан отрезок a , то найдем угол A , для которого $\sin A = \sin \tilde{a}$; вместе с тем $\sin\left(\frac{\pi}{2} - A\right) = \cos \tilde{a}$. Двум другим уравнениям (7) по данным x легко удовлетворить (т. е. построить соответствующий угол A), если $\operatorname{tg} \tilde{x} < 1$ ($x > J$) и соответственно $\operatorname{ctg} \tilde{x} < 1$ ($x < J$). Аналогично решаются и другие уравнения типа (7). Не останавливаясь на них подробно, заметим во всяком случае, что непосредственно производится замена тригонометрических функций $\sin A, \cos A, \operatorname{tg} A, \operatorname{ctg} A$ через те же гиперболические функции $\sin \tilde{a}, \cos \tilde{a}, \operatorname{tg} \tilde{a}, \operatorname{ctg} \tilde{a}$ и обратно. Для этого нужно положить $\tilde{a} = A$ или обратно $A = \tilde{a}$. Осуществление этого замещения эквивалентно основным построениям угла параллельности, соответствующего данному отрезку, и обратно — отрезка параллельности, соответствующего данному углу.

¹⁾ См. сноску на стр. 299; мы продолжаем называть тригонометрические функции от $\Pi(x)$ гиперболическими, хотя это не вполне точно.

Переходя к тем построениям, которые приводят к теореме Мордухай-Болтовского, мы вновь напомним основные построения, которые в гиперболической плоскости H_2 , как уже показано выше, выполняются циркулем и линейкой. Сюда в первую очередь относятся элементарные построения, изложенные в § 27, затем — построение параллели к данной прямой через данную точку (§ 24, рубр. 6, стр. 208) и отрезка параллельности, соответствующего данному углу (там же), а в связи с этим — построение отрезка, дополнительного к данному; наконец, отметим еще построение равнобедренного трипрямоугольника (§ 38, рубр. 6, стр. 307).

4. Построение целых гиперболических выражений. Положим теперь, что даны отрезки a и b ; если мы построим прямоугольный треугольник с катетами a и b , то его гипотенуза c определяется уравнением $\sin \tilde{c} = \sin \tilde{a} \sin \tilde{b}$. Заменяя $\sin \tilde{c}$ через $\operatorname{tg} \tilde{u}$, как указано в рубр. 1, мы найдем отрезок u , для которого

$$\operatorname{tg} \tilde{u} = \sin \tilde{a} \sin \tilde{b}.$$

Повторным применением этого приема мы можем построить отрезок u , удовлетворяющий уравнению

$$\operatorname{tg} \tilde{u} = \sin \tilde{a} \sin \tilde{b} \sin \tilde{c} \dots \sin \tilde{l}. \quad (8)$$

Между множителями $\sin \tilde{a}$, $\sin \tilde{b}$, $\sin \tilde{c}$, ..., $\sin \tilde{l}$ могут быть и равные.

Этот результат можно условно выразить так: в гиперболической плоскости можно циркулем и линейкой построить целый гиперболический одночлен [т. е. выражение вида (8)].

Если даны два отрезка a , b , то легко построить также отрезок v , для которого

$$\sin \tilde{v} = \frac{\sin \tilde{a}}{\sin \tilde{b}}.$$

Для этого, если $a > b$, достаточно построить прямоугольный треугольник по гипотенузе a и катету b ; второй катет v удовлетворит требованию. Теперь можно заменить $\sin \tilde{v}$ через $\operatorname{tg} \tilde{u}$; тогда

$$\operatorname{tg} \tilde{u} = \frac{\sin \tilde{a}}{\sin \tilde{b}}. \quad (8')$$

Если же $b > a$, то мы можем построить отрезок v , для которого $\sin \tilde{v} = \frac{\sin \tilde{b}}{\sin \tilde{a}}$, а тогда вновь можно выбрать отрезок u , чтобы удовлетворялось прежнее соотношение (8').

Вместе с тем, по данным отрезкам

$$a, b, c, \dots, l, p, q, r, \dots, t$$

можно построить отрезок w , определяемый выражением

$$\operatorname{tg} \tilde{w} = \frac{\sin \tilde{a} \sin \tilde{b} \sin \tilde{c} \dots \sin \tilde{l}}{\sin \tilde{p} \sin \tilde{q} \sin \tilde{r} \dots \sin \tilde{t}} = \frac{\operatorname{tg} \tilde{u}}{\operatorname{tg} \tilde{v}}. \quad (9)$$

К этому виду можно привести и дробь, в числителе и знаменателе которой фигурируют другие множители вида $\cos \tilde{m}$, $\operatorname{tg} \tilde{n}$, $\operatorname{ctg} \tilde{p}$ и т. п. Не исключен и тот случай, когда числитель правой части сводится к единице, т. е. $u = J$.

Выражение вида (9) Д. Д. Мордухай-Болтовской рассматривает как «рациональную одночленную дробь от гиперболических функций»

(с коэффициентом 1) и обозначает его буквой ω . Результат нужно понимать в таком смысле, что циркулем и линейкой можно построить отрезок ω , удовлетворяющий уравнению $\operatorname{tg} \omega = \omega$.

Теперь, как легко видеть, можно в том же смысле «построить» сумму вида $\omega_1 + \omega_2$. В самом деле, разыскав отрезки v_1 и v_2 , для которых $\operatorname{tg} \tilde{v}_1 = \omega_1$, $\operatorname{tg} \tilde{v}_2 = \omega_2$, будем иметь:

$$\omega_1 + \omega_2 = \operatorname{tg} \tilde{v}_1 + \operatorname{tg} \tilde{v}_2 = \frac{\sin(\tilde{v}_1 + \tilde{v}_2)}{\cos \tilde{v}_1 \cos \tilde{v}_2}. \quad (10)$$

Если $\tilde{v}_1 + \tilde{v}_2 < \frac{\pi}{2}$, то мы всегда найдем отрезок v , при котором $\tilde{v}_1 + \tilde{v}_2 = \tilde{v}$; выражение (10) можно представить в виде:

$$\omega_1 + \omega_2 = \frac{\sin \tilde{v}}{\cos \tilde{v}_1 \cos \tilde{v}_2},$$

и оно может быть построено, т. е. может быть построен отрезок ω , удовлетворяющий уравнению

$$\operatorname{tg} \tilde{\omega} = \omega_1 + \omega_2.$$

Если же $\tilde{v}_1 + \tilde{v}_2 > \frac{\pi}{2}$, то мы построим отрезок v , для которого $\tilde{v} = \pi - (\tilde{v}_1 + \tilde{v}_2)$, и придем к тому же результату. Читателя не затруднит рассмотреть также случай, когда $\tilde{v}_1 + \tilde{v}_2 = \frac{\pi}{2}$ (v_1 и v_2 — дополнительные отрезки).

Так же может быть построена разность $\omega_1 - \omega_2$, если $\omega_1 > \omega_2$, т. е. может быть найден отрезок ω , для которого $\operatorname{tg} \tilde{\omega} = \omega_1 - \omega_2$. Но если $\omega_1 < \omega_2$, то мы построим отрезок ω_1 , для которого $\operatorname{tg} \tilde{\omega}_1 = \omega_2 - \omega_1$; и тогда отрезок $\omega = -\omega_1$ удовлетворяет уравнению

$$\operatorname{tg} \tilde{\omega} = \omega_1 - \omega_2$$

в силу (VI₂) (стр. 210). Вместе с тем ясно, что повторным применением того же приема можно построить многочленное выражение

$$\pm \omega_1 \pm \omega_2 \pm \dots \pm \omega_n.$$

Между слагаемыми могут быть равные, т. е. может быть построено выражение

$$\pm m_1 \omega_1 \pm m_2 \omega_2 \pm \dots \pm m_n \omega_n \quad (11)$$

с целыми коэффициентами $m_1, m_2, \dots, m_n$; иначе говоря, может быть построен отрезок ω , для которого $\operatorname{tg} \tilde{\omega}$ будет иметь значение (11). В этом смысле можно сказать, что в плоскости H_2 циркулем и линейкой может быть построен рациональный многочлен вида (11) с целыми коэффициентами.

5. Пропорциональность в гиперболической плоскости. Из двух точек B_1, B_2 на стороне AB угла BAC (черт. 261) опустим перпендикуляры B_1C_1, B_2C_2 на вторую его сторону и обозначим через a_1, b_1, c_1 и a_2, b_2, c_2 отрезки B_1C_1, AC_1, AB_1 и, соответственно, B_2C_2, AC_2, AB_2 . В евклидовой плоскости треугольники AB_1C_1 и AB_2C_2 подобны, и имеют место пропорции:

$$a_1 : a_2 = b_1 : b_2 = c_1 : c_2. \quad (12)$$

В гиперболической плоскости углы AB_1C_1 и AB_2C_2 не равны, треугольники не подобны и пропорции (12) не имеют места. Но так как прямо-

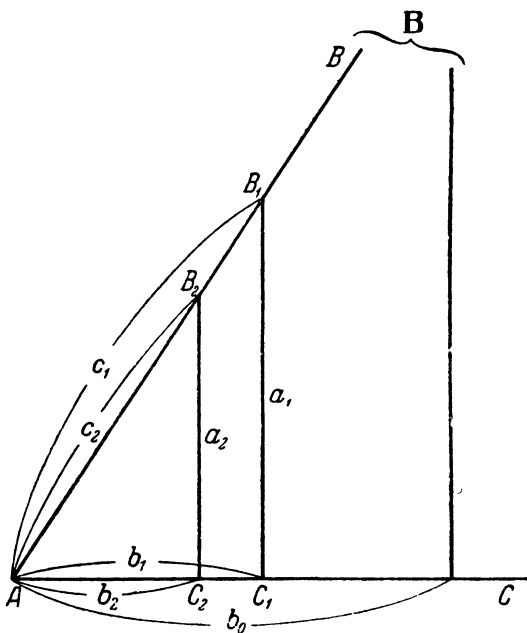
угольные треугольники B_1AC_1 и B_2AC_2 имеют общий угол A , то имеют место пропорции, аналогичные (12), — конечно, модифицированные. Среди уравнений прямоугольного треугольника (XXVII) (стр. 297) три (XXVII₁, XXVII₃, XXVII₇) содержат две стороны треугольника и общий угол A . Исключение общего угла приводит к трем пропорциям:

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{ctg} \tilde{a}_1 : \operatorname{ctg} \tilde{a}_2 &= \operatorname{ctg} \tilde{c}_1 : \operatorname{ctg} \tilde{c}_2, \\ \cos \tilde{a}_1 : \cos \tilde{a}_2 &= \operatorname{ctg} \tilde{b}_1 : \operatorname{ctg} \tilde{b}_2, \\ \cos \tilde{b}_1 : \cos \tilde{b}_2 &= \cos \tilde{c}_1 : \cos \tilde{c}_2. \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

Первое и третье из этих соотношений были уже установлены нами ранее (§ 40, рубр. 1, стр. 312—313). Такой вид принимает пропорциональность соответствующих элементов в гиперболической плоскости. Эти пропорции приводят к построению четвертой пропорциональной в гиперболическом понимании этого слова. Если, например, требуется построить отрезок x , удовлетворяющий пропорции

$$\frac{\cos \Pi(x)}{\cos \Pi(a_2)} = \frac{\operatorname{ctg} \Pi(b_1)}{\operatorname{ctg} \Pi(b_2)}, \quad (14)$$

то нужно построить прямоугольный треугольник B_2AC_2 (тот же чертеж 261) по катетам a_2 и b_2 . На стороне AC откладываем отрезок $AC_1 = b_1$ и из точки C_1 восставляем к AC перпендикуляр. Если он встретит сторону AB угла в точке B_1 , то отрезок $a_1 = C_1B_1$ удовлетворит требованию. Пересечение прямой AB с перпендикуляром всегда имеет место, если $b_1 < b_2$. Но если $b_1 > b_2$,



Черт. 261.

то дело обстоит иначе. Именно, чтобы это пересечение произошло, необходимо и достаточно, чтобы было $b_1 < b_0$, где b_0 есть отрезок параллельности, соответствующий углу A (т. е. $\tilde{b}_0 = A$). Это условие можно выразить так: $\operatorname{ctg} \tilde{b}_1 < \operatorname{ctg} A$. А так как [(XXVI₃), стр. 297] $\operatorname{ctg} A = \frac{\operatorname{ctg} \tilde{b}_2}{\cos \tilde{a}_2}$, то условие, необходимое и достаточное для того, чтобы можно было построить отрезок x , удовлетворяющий пропорции (14), заключается в том, чтобы имело место неравенство

$$\operatorname{ctg} \tilde{b}_1 < \frac{\operatorname{ctg} \tilde{b}_2}{\cos \tilde{a}_2}. \quad (14')$$

Впрочем, необходимость этого условия вытекает непосредственно из пропорции (14), так как она требует, чтобы

$$\frac{\cos \Pi(a_2) \operatorname{ctg} \Pi(b_1)}{\operatorname{ctg} \Pi(b_2)} = \cos \Pi(x) \quad (14'')$$

было меньше единицы.

Предыдущее рассуждение наглядно выясняет, что при соблюдении этого условия отрезок x можно построить. Однако формально это вытекает из того, что по схеме (9) всегда можно построить отрезок w , для которого $\operatorname{tg} \tilde{w}$ выражается левой частью равенства (14"); а поскольку в этом случае $\operatorname{tg} \tilde{w} < 1$, можно тангенс заменить синусом или косинусом надлежащего угла.

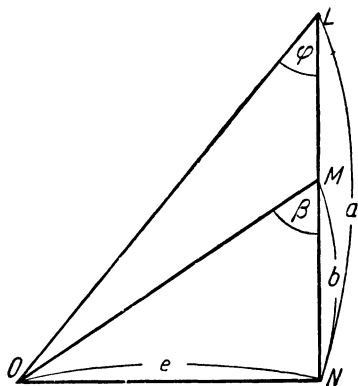
Равенства (13) приводят к решению различных пропорций аналогичного типа; они могут быть приведены к рассмотренным пропорциям заменой отрезков другими, так или иначе с ними связанными. Нужно сказать, что мы, вообще, имеем здесь дело с частными случаями построения выражений вида (9).

Этими же средствами находится неизвестный член пропорции, элементами которой служат тригонометрические функции заданных углов; такова, например, пропорция

$$\frac{\operatorname{tg} A_1}{\operatorname{tg} A_2} = \frac{\operatorname{tg} B_1}{\operatorname{tg} B_2}, \quad (15)$$

где при заданных углах A_2, B_1, B_2 требуется построить угол A_1 . Для этого достаточно построить отрезки a_2, b_1, b_2 , для которых

$$\operatorname{tg} B_1 = \operatorname{tg} \tilde{b}_1, \operatorname{tg} B_2 = \operatorname{tg} \tilde{b}_2, \operatorname{tg} A_2 = \operatorname{tg} \tilde{a}_2. \quad (16)$$



Черт. 262.

Задача приведет к решению пропорций вида (13). Можно это построение выполнить проще, не переходя к гиперболическим функциям; здесь важно, однако, установить возможность такого построения.

Наконец, нетрудно указать построение, дающее решение пропорции:

$$\frac{\operatorname{tg} \varphi}{\operatorname{tg} \beta} = \frac{\operatorname{tg} \tilde{a}}{\operatorname{tg} \tilde{b}}, \quad (17)$$

где a и b — заданные отрезки, β — заданный угол; требуется разыскать (построить) угол φ . При решении пропорции (14) мы пользовались прямоугольными треугольниками, имеющими общий острый угол; для решения пропорции (17) проще всего воспользоваться прямоугольными треугольниками, имеющими общий катет. С этой целью строим прямоугольный треугольник ONM (черт. 262) по катету $NM = b$ и прилежащему острому углу $OMN = \Pi(\beta)$. Отложив на прямой NM отрезок $NL = a$, получим требуемый угол $\varphi = \angle OLN$. В самом деле, из прямоугольных треугольников ONM и ONL с общим катетом $ON = e$ имеем [(XXVI)₃, стр. 297]:

$$\cos \tilde{e} = \operatorname{ctg} \tilde{b} \operatorname{tg} \beta = \operatorname{ctg} \tilde{a} \operatorname{tg} \varphi,$$

откуда вытекает пропорция (17). Правда, треугольник MNO можно построить только, если $\beta < \tilde{b}$. Но если $\beta > \tilde{b}$, то полагаем $\beta' = \frac{\pi}{2} - \beta < \frac{\pi}{2} - \tilde{b}$, т. е. $\beta' < \tilde{b}'$; мы можем поэтому построить угол φ' , для которого

$$\frac{\operatorname{tg} \varphi'}{\operatorname{tg} \beta'} = \frac{\operatorname{tg} \tilde{a}'}{\operatorname{tg} \tilde{b}'}.$$

Если обозначим через φ угол $\frac{\pi}{2} - \varphi'$, то эта пропорция легко приведет к виду (17).

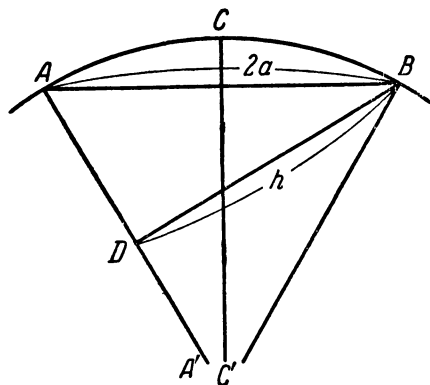
Наконец, при $\beta = \tilde{b}$ всегда $\varphi = \tilde{a}$.

6. Построение рациональных многочленов с дробными коэффициентами. Начнем с решения уравнения $\operatorname{tg} \tilde{x} = \frac{1}{n} \operatorname{tg} \tilde{a}$; это значит, по данному отрезку a требуется построить отрезок x , для которого

$$\operatorname{tg} \tilde{x} = \frac{1}{n} \operatorname{tg} \tilde{a}. \quad (18)$$

При $n=2$ это уравнение решается на основании соотношения (XXX₇) (стр. 303), связывающего хорду и высоту дуги предельной линии. Обозначая хорду через $2a$, мы можем это соотношение написать в виде:

$$\operatorname{tg} \tilde{h} = \frac{1}{2} \operatorname{tg} \tilde{a}. \quad (19)$$



Черт. 263.

Взяв поэтому отрезок $AB = 2a$ (чертеж 263), из его середины составляем к нему перпендикуляр CC' и проводим $AA' \parallel CC'$; перпендикуляр $BD = h$, опущенный из точки B на прямую AA' , удовлетворяет требованию.

Следующий прием, принадлежащий Н. М. Несторовичу ^[124] дает возможность последовательным построением получить отрезок x , удовлетворяющий уравнению (18) при любом целом n .

По данному отрезку a , как показано, всегда можно построить отрезок x , удовлетворяющий уравнению

$$\operatorname{tg} \tilde{x} = \frac{1}{2} \operatorname{tg} \tilde{a}. \quad (20)$$

Легко видеть, что от этого построения можно непосредственно перейти к такому же построению, в котором гиперболические функции отрезков a и x ($\operatorname{tg} \tilde{a}$ и $\operatorname{tg} \tilde{x}$) заменены тригонометрическими функциями углов α и ξ ; это значит, по данному острому углу α можно построить угол ξ , для которого

$$\operatorname{tg} \xi = \frac{1}{2} \operatorname{tg} \alpha. \quad (21)$$

В самом деле, взяв отрезок параллельности a , соответствующий данному углу α , строим отрезок x , удовлетворяющий уравнению (20), а по x строим соответствующий ему угол параллельности ξ ($\xi = \tilde{x}$). Угол ξ удовлетворяет уравнению (21). В частности, при $\alpha = \frac{\pi}{4}$ $\operatorname{tg} \xi = \frac{1}{2}$.

Н. М. Несторович дает следующий изящный прием для построения угла ξ , удовлетворяющего уравнению

$$\operatorname{tg} \xi = \frac{1}{n} \operatorname{tg} \alpha \quad (n \text{ — натуральное число}). \quad (22)$$

Положим, что мы умеем строить угол, удовлетворяющий уравнению (22) для всех значений n , не превышающих $2p$. Построим углы λ и μ , для которых

$$\operatorname{tg} \lambda = \frac{1}{2p-1}, \quad \operatorname{tg} \mu = \frac{1}{2p}. \quad (23)$$

В пропорции (17) положим $\beta = \lambda$, $\tilde{\delta} = J$, $\tilde{a} = \frac{\pi}{4} - \mu$ (μ явно меньше $\frac{\pi}{4}$ при $2p > 1$), после чего она примет вид:

$$\frac{\operatorname{tg} \varphi}{\operatorname{tg} \lambda} = \frac{\operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} - \mu \right)}{\operatorname{tg} \frac{\pi}{4}}, \quad \text{т. е. } (2p-1) \operatorname{tg} \varphi = \frac{2p-1}{2p+1}, \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{1}{2p+1}.$$

Мы будем, таким образом, иметь возможность построить угол φ , для которого $\operatorname{tg} \varphi = \frac{1}{2p+1}$. С другой стороны, мы можем построить угол ψ , для которого $\operatorname{tg} \psi = \frac{1}{p+1}$, а значит, согласно (21), и угол χ , для которого $\operatorname{tg} \chi = \frac{1}{2(p+1)}$. Таким образом, мы построим угол, удовлетворяющий требованию (22) при $n = 2p+1$ и $n = 2(p+1)$. Этим доказано, что может быть построен угол ξ , удовлетворяющий уравнению (22) при любом натуральном n .

Пусть теперь $\operatorname{tg} \tilde{\omega}$ выражает многочлен (11) с целыми коэффициентами, и пусть соответствующий отрезок $\tilde{\omega}$ построен. Мы можем в таком случае по схеме (9) построить ω_1 , для которого

$$\operatorname{tg} \tilde{\omega}_1 = \operatorname{tg} \tilde{\omega} \operatorname{tg} \xi, \quad \text{где} \quad \operatorname{tg} \xi = \frac{1}{n}.$$

Вместе с тем будет построен отрезок ω_1 , для которого

$$\operatorname{tg} \tilde{\omega}_1 = \frac{1}{n} \operatorname{tg} \tilde{\omega}, \quad (24)$$

т. е. мы можем построить целый многочлен вида (11) с любыми рациональными коэффициентами.

Таким образом, доказано, что в гиперболической плоскости H_2 может быть построено любое рациональное выражение вида (11) с рациональными коэффициентами. Такого рода рациональное выражение Д. Д. Мордухай-Болтовской обозначает буквой Ω :

$$\Omega = \lambda_1 \omega_1 + \lambda_2 \omega_2 + \dots + \lambda_n \omega_n,$$

где λ_i — рациональные числа, а ω_i — выражения вида (9) на стр. 379.

Попутно используем последние результаты еще для следующих соображений. Во-первых, многочлен, выражаемый через $\operatorname{tg} \tilde{\omega}$, можно свести просто к целому числу m и тогда это значит: каково бы ни было рациональное число $\frac{m}{n}$, всегда можно найти отрезок ω_1 , для которого

$$\operatorname{tg} \tilde{\omega}_1 = \frac{m}{n}.$$

Во-вторых, в пропорции (14) выберем отрезки b_1 и b_2 так, чтобы

$$\operatorname{ctg} \tilde{b}_1 = \frac{1}{n}, \quad \operatorname{ctg} \tilde{b}_2 = \frac{1}{2m},$$

где m и n — произвольные натуральные числа. Она примет вид:

$$\cos \tilde{x} : \cos \tilde{a}_2 = \frac{2m}{n}.$$

Если, далее, возьмем угол $\tilde{a}_2 = \frac{\pi}{3}$, т. е. $\cos \tilde{a}_2 = \frac{1}{2}$, то условие (14) выполнимости построения отрезка x сведется к тому, что $\frac{m}{n} < 1$. Предыдущая же пропорция даст $\cos \tilde{x} = \frac{m}{n}$. Мы приходим, таким образом, к выводу: каковы бы ни были целые положительные числа m и n при $\frac{m}{n} < 1$, можно построить циркулем и линейкой отрезок x и угол ξ , для которого

$$\cos \xi = \cos \tilde{x} = \frac{m}{n}. \quad (24')$$

7. Построение в гиперболической плоскости иррациональных выражений. В евклидовой геометрии простейшими иррациональными выражениями, допускающими построение циркулем и линейкой, является среднее геометрическое двух отрезков $\sqrt{ab}$ и квадратный корень из суммы квадратов двух отрезков $\sqrt{a^2 + b^2}$. Аналогичную роль в гиперболической плоскости играют следующие два построения.

Первое построение основано на том, что в равнобедренном прямоугольном треугольнике гипотенуза a и катет x связаны уравнением:

$$\sin \tilde{a} = \sin^2 \tilde{x}, \quad \text{т. е.} \quad \sin \tilde{x} = \sqrt{\sin \tilde{a}}. \quad (25)$$

Построим равнобедренный прямоугольный треугольник с гипотенузой a , что сводится к построению прямоугольного треугольника по катету $\frac{a}{2}$ и противолежащему острому углу $\frac{\pi}{4}$, а потому всегда возможно (стр. 231). Катет этого треугольника x удовлетворяет уравнению (25) при положительном значении радикала.

Заменим теперь $\sin \tilde{x}$ через $\operatorname{tg} \tilde{y}$; мы найдем отрезок y , удовлетворяющий условию

$$\operatorname{tg}^2 \tilde{y} = \sin \tilde{a}.$$

Если таким же образом найдем z , для которого $\operatorname{tg}^2 \tilde{z} = \sin \tilde{a}'$, то

$$\frac{\operatorname{tg}^2 \tilde{y}}{\operatorname{tg}^2 \tilde{z}} = \operatorname{tg} \tilde{a}.$$

Наконец, построив отрезок u , для которого $\operatorname{tg} \tilde{u} = \frac{\operatorname{tg} \tilde{y}}{\operatorname{tg} \tilde{z}}$, будем иметь

$$\operatorname{tg}^2 \tilde{u} = \operatorname{tg} \tilde{a}.$$

Нужно, однако, иметь в виду, что отрезок a' , которым мы пользовались, существует только при $a > 0$; поэтому последнее равенство имеет место только при $\operatorname{tg} \tilde{a} > 0$. Вместе с тем, в этом предположении

$$\operatorname{tg} \tilde{u} = \sqrt{\operatorname{tg} \tilde{a}}$$

при положительном значении радикала и отрезка u . В тесной связи с этим стоит разыскание средней геометрической в следующем значении слова: если даны отрезки b и c , то требуется найти (построить) отрезок u , для которого

$$\operatorname{tg}^2 \tilde{u} = \operatorname{tg} \tilde{b} \operatorname{tg} \tilde{c}.$$

Ясно, что это возможно только в том случае, если $\operatorname{tg} \tilde{b} \operatorname{tg} \tilde{c} > 0$; построив тогда по схеме (9) отрезок a , для которого

$$\operatorname{tg} \tilde{a} = \operatorname{tg} \tilde{b} \operatorname{tg} \tilde{c},$$

мы приведем задачу к предыдущей.

Второе построение, также выполняемое циркулем и линейкой, основано на соотношении (XXXI₂) (стр. 304):

$$\operatorname{ctg}^2 \tilde{h}_e + \operatorname{ctg}^2 \tilde{h}_j = \operatorname{ctg}^2 \tilde{\delta},$$

связывающем высоты трипрямоугольника с его главной диагональю.

Поэтому если даны два отрезка a и b , то мы всегда сможем построить отрезок x , удовлетворяющий условию

$$\operatorname{ctg} \tilde{x} = \sqrt{\operatorname{ctg}^2 \tilde{a} + \operatorname{ctg}^2 \tilde{b}}; \quad (26)$$

для этого достаточно построить трипрямоугольник, в котором $h_e = a$, $h_j = b$, что всегда возможно (§ 26, рубр. 1, стр. 219); его диагональ $\tilde{\delta}$ удовлетворит требованию. Ясно также, что при $a > b$ можно построить отрезок x , для которого

$$\operatorname{ctg}^2 \tilde{x} = \operatorname{ctg}^2 \tilde{a} - \operatorname{ctg}^2 \tilde{b};$$

для этого достаточно построить трипрямоугольник, в котором главная диагональ равна a , а одна из высот равна b ; другая высота составит требуемый отрезок x .

Рассмотрим теперь уравнение вида:

$$\Omega_0 \operatorname{ctg}^2 \tilde{z} - 2\Omega_1 \operatorname{ctg} \tilde{z} + \Omega_2 = 0, \quad (27)$$

где Ω_0 , Ω_1 , Ω_2 — выражения, рациональные относительно гиперболических функций $\sin \tilde{a}$, $\cos \tilde{a}$, $\sin \tilde{b}$, $\cos \tilde{b}$, ... от заданных отрезков a , b , c , ...

Мы можем построить отрезки p , q , r , определяемые положениями

$$\operatorname{ctg} \tilde{p} = \Omega_0, \quad \operatorname{ctg} \tilde{q} = \Omega_1, \quad \operatorname{ctg} \tilde{r} = \Omega_2;$$

они могут иметь положительные или отрицательные значения.

Уравнение (27) дает

$$\operatorname{ctg} \tilde{z} = \frac{\operatorname{ctg} \tilde{q} \pm \sqrt{\operatorname{ctg}^2 \tilde{q} - \operatorname{ctg} \tilde{p} \operatorname{ctg} \tilde{r}}}{\operatorname{ctg} \tilde{p}}. \quad (28)$$

Если $\operatorname{ctg} \tilde{p} \operatorname{ctg} \tilde{r} > 0$, то мы построим отрезок s , для которого $\operatorname{ctg}^2 \tilde{s} = \operatorname{ctg} \tilde{p} \operatorname{ctg} \tilde{r}$. Подкоренное выражение примет вид $\operatorname{ctg}^2 \tilde{q} - \operatorname{ctg}^2 \tilde{s}$; радикал будет иметь действительное значение, если $q \geq s$; в этом случае можно найти t , для которого

$$\operatorname{ctg}^2 \tilde{q} - \operatorname{ctg}^2 \tilde{s} = \operatorname{ctg}^2 \tilde{t}.$$

Вместе с тем,

$$\operatorname{ctg} \tilde{z} = \frac{\operatorname{ctg} \tilde{q} \pm \operatorname{ctg} \tilde{t}}{\operatorname{ctg} \tilde{p}}. \quad (29)$$

Если же $\operatorname{ctg} \tilde{p} \operatorname{ctg} \tilde{r} < 0$, то s определится уравнением

$$\operatorname{ctg}^2 \tilde{s} = -\operatorname{ctg} \tilde{p} \operatorname{ctg} \tilde{r},$$

и если положим

$$\operatorname{ctg}^2 \tilde{q} + \operatorname{ctg}^2 \tilde{s} = \operatorname{ctg}^2 \tilde{t},$$

то $\text{ctg } \tilde{z}$ получит то же выражение (28). Это выражение, определяющее $\text{ctg } \Pi(z)$ из квадратного уравнения (27), Д. Д. Мордухай-Болтовской называет иррациональным выражением второго порядка и первого класса (если оно не оказывается рациональным). Выражение первого класса (действительное) может быть построено циркулем и линейкой по значениям отрезков $a, b, c, \dots$ (положительных или отрицательных), от которых зависят коэффициенты $\Omega_0, \Omega_1, \Omega_2$. Совершенно аналогично можно составить квадратное уравнение вида (27), в котором коэффициентами служат выражения первого класса. Тогда $\text{ctg } \tilde{z}$ также выразится формулой (28), которую в этом случае называют иррациональным выражением второго порядка, но второго класса; оно также может быть построено циркулем и линейкой.

Дальнейшее развитие этой терминологии и этих выводов совершенно ясно. Теорема Д. Д. Мордухай-Болтовской получает такое выражение: в гиперболической плоскости H_2 циркулем и линейкой может быть построено всякое выражение второго порядка любого класса.

8. Обратная теорема. На основе тех же соображений доказывается и обратная теорема. Чтобы себе это уяснить, возвратимся вновь к евклидовой геометрии. Здесь обратная теорема получает следующее выражение: если отрезок может быть построен циркулем и линейкой, то длина его может быть представлена квадратом-радикальным выражением от заданных отрезков¹⁾. Доказательство, по существу, проводится в следующем порядке. Выбрав произвольную систему координат, напишем уравнения всех прямых и окружностей, которыми мы воспользовались при осуществлении построения. Прямые выразятся уравнениями первой степени, окружности — квадратными уравнениями специального типа:

$$x^2 + y^2 = P(x, y), \quad (30)$$

где $P(x, y)$ есть линейная функция от x, y . Коэффициентами этих уравнений служат рациональные выражения от заданных отрезков, или же от величин, которые получены предварительным решением систем таких уравнений. Однако специальный характер уравнений (30) приводит к тому, что совместное решение двух таких уравнений:

$$x^2 + y^2 = P_1(x, y) \text{ и } x^2 + y^2 = P_2(x, y) \quad (30a)$$

(разыскание точек пересечения двух окружностей) может быть заменено решением двух уравнений, одно из которых совпадает с тем или другим из них, а другое заменяется линейным уравнением

$$P_1(x, y) - P_2(x, y) = 0.$$

Таким образом, решение нашей системы в каждой своей стадии будет приводиться к решению линейных уравнений или к совместному решению квадратного и линейного уравнений. Поэтому координаты всех точек, к которым приводит построение циркулем и линейкой в евклидовой геометрии, а также расстояния между ними получают квадрато-

¹⁾ К числу заданных отрезков должны быть отнесены и те, которые могут быть выбраны произвольно, так сказать, заданные лицом, производящим построение; к ним нужно отнести также координатные отрезки в принятой системе координат. Читателю будет полезно прочесть предисловие С. О. Шатуновского к переводу книги Адлера [192].

радикальные выражения. Таким образом, в евклидовой геометрии циркулем и линейкой решаются те и только те задачи, которые приводятся к построению квадрато-радикальных выражений. Алгебраическим источником этого предложения является особый вид (30) уравнения окружности; он приводит к тому, что точки пересечения двух окружностей, — действительные ли они или мнимые, — всегда расположены на действительной прямой $P_1(x, y) = P_2(x, y)$, определяемой этими двумя окружностями, — их радикальной оси, которая может быть построена циркулем и линейкой, если заданы окружности.

Но особый вид имеют и уравнения окружностей в гиперболической плоскости. Именно, окружность в бельтрамиевых координатах всегда выражается уравнением (LXXII) (стр. 341):

$$U \equiv 1 - x^2 - y^2 - [Q(x, y)]^2 = 0, \quad (31)$$

где $Q(x, y)$ есть линейный трехчлен

$$Q(x, y) = ax + by + c \quad (0 < c^2 - a^2 - b^2 < 1); \quad (31a)$$

поэтому общие точки двух окружностей

$$\left. \begin{aligned} U_1 &\equiv 1 - x^2 - y^2 - [Q_1(x, y)]^2 = 0, \\ U_2 &\equiv 1 - x^2 - y^2 - [Q_2(x, y)]^2 = 0 \end{aligned} \right\} \quad (31b)$$

принадлежат геометрическому месту

$$[Q_1(x, y)]^2 = [Q_2(x, y)]^2,$$

которое распадается на две прямые:

$$\left. \begin{aligned} Q_1(x, y) - Q_2(x, y) &= 0, \\ Q_1(x, y) + Q_2(x, y) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

Разыскание точек пересечения двух окружностей $U_1 = 0$, $U_2 = 0$, таким образом, приводится к решению двух систем уравнений:

$$\left. \begin{aligned} U_1(x, y) &= 0, & Q_1(x, y) - Q_2(x, y) &= 0, \\ U_1(x, y) &= 0, & Q_1(x, y) + Q_2(x, y) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (33)$$

[Уравнение $U_1(x, y) = 0$ может быть заменено уравнением второй окружности $U_2(x, y) = 0$.] Отсюда следует, что бельтрамиевы координаты точек пересечения окружностей и прямых, при посредстве которых решается задача на построение циркулем и линейкой, и расстояния между ними, вернее — надлежащие гиперболические функции от этих расстояний, имеют квадрато-радикальные выражения, т. е., по терминологии Д. Д. Мордухай-Болтовского, это — выражения второго порядка и любого класса.

Общий результат этих соображений может быть выражен так: в гиперболической плоскости (как и в евклидовой) могут быть построены те и только те выражения, которые принадлежат ко второму порядку и какому угодно классу.

Так как, однако, в евклидовой плоскости декартовы координаты точки выражают длины соответствующих отрезков, а в гиперболической геометрии бельтрамиевы координаты представляют собой гиперболические функции от них, и связи между соответствующими величинами в одной и другой геометрии выражаются различно, то некоторые задачи, допускающие решение циркулем и линейкой в евклидовой

плоскости, не допускают такого решения в гиперболической плоскости; и обратно, — задачи, неразрешимые в евклидовой плоскости циркулем и линейкой, иногда допускают такое решение в гиперболической плоскости. Это будет выяснено в следующем параграфе.

В предыдущих главах уже изложены геометрические построения в гиперболической плоскости, которыми мы пользовались и в настоящем параграфе. Мы обратимся теперь к более сложным задачам, получившим в евклидовой геометрии значение классических.

§ 48. КЛАССИЧЕСКИЕ ПОСТРОЕНИЯ В ГИПЕРБОЛИЧЕСКОЙ ПЛОСКОСТИ

1. Трисекция угла. Тригонометрические формулы, устанавливающие соотношения между тригонометрическими величинами углов, конечно, остаются в силе и в гиперболической плоскости (строго говоря — лежат вне геометрии). Каков бы ни был угол α ,

$$\cos 3\alpha = 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha,$$

и если положим $3\alpha = \theta$, то

$$\cos \theta = 4 \cos^3 \frac{\theta}{3} - 3 \cos \frac{\theta}{3}.$$

Из этого уравнения определяется $\cos \frac{\theta}{3}$ по данному θ (по данному $\cos \theta$); в общем случае, это — неприводимое уравнение третьей степени, которое не решается в квадратных радикалах, и потому трисекция угла в общем случае (т. е. при любом θ) невозможна. Эти соображения в незначительной модификации относятся к гиперболической плоскости, как и к евклидовой. В гиперболической плоскости угол θ может быть задан линейным отрезком τ , для которого $\tilde{\tau} = \Pi(\tau) = \theta$. Уравнение принимает вид:

$$4 \cos \Pi(\tau) = 4 \cos^3 \Pi\left(\frac{\tau}{3}\right) - 3 \cos \Pi\left(\frac{\tau}{3}\right), \quad (1)$$

и, по существу, не отличается от предыдущего.

2. Трисекция отрезка. В евклидовой геометрии деление отрезка на любое число (n) равных частей просто выполняется циркулем и линейкой при любом значении n . В гиперболической плоскости дело обстоит совершенно иначе: уже при $n = 3$ деление в общем случае невыполнимо. В самом деле, из формулы сложения (XXIX₃) (стр. 302) вытекает формула удвоения (XXX₂); из этих двух формул непосредственно получаем:

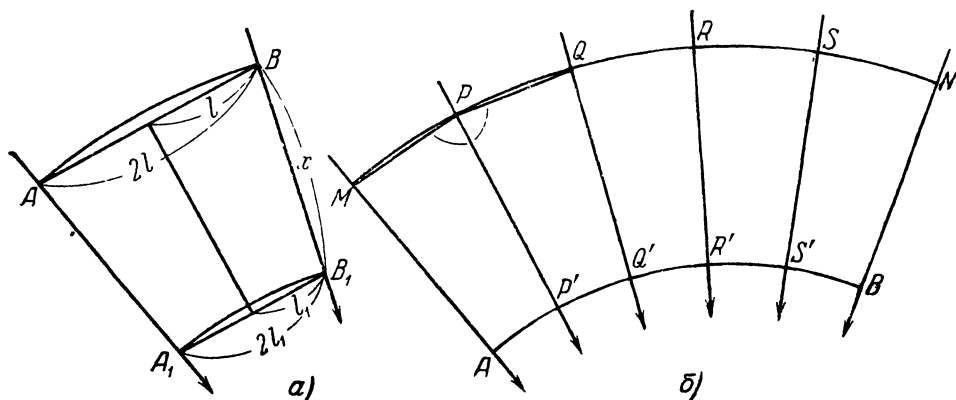
$$\cos \Pi(3a) = \frac{\cos^3 \Pi(a) + 3 \cos \Pi(a)}{1 + 3 \cos^2 \Pi(a)}. \quad (2)$$

Если обозначим $3a$ через c , то $\cos \Pi\left(\frac{c}{3}\right)$ определяется по $\cos \Pi(c)$ из уравнения третьей степени:

$$\cos^3 \Pi\left(\frac{c}{3}\right) + 3 \cos \Pi\left(\frac{c}{3}\right) = \cos \Pi(c) + 3 \cos^2 \Pi\left(\frac{c}{3}\right) \cos \Pi(c).$$

И так как это уравнение в общем случае неприводимо, то построение не может быть выполнено циркулем и линейкой. Гиперболические функции искомого отрезка $\frac{c}{3}$ не могут быть представлены квадрато-радикальными выражениями через гиперболические функции данного отрезка. Трисекция отрезка в общем случае не может быть выполнена циркулем и линейкой.

3. Деление предельной дуги на равные части. В связи с этим покажем, что дугу предельной линии можно циркулем и линейкой разделить на любое число равных частей. С этой целью покажем прежде всего, что мы всегда можем определить и построить нормальное расстояние между двумя соответственными параллельными предельными дугами, заданными длинами своих хорд.



Черт. 264.

В самом деле, пусть AB и A_1B_1 — две такие предельные дуги, $2l$ и $2l_1$ — их хорды (черт. 264, а), а x — нормальное расстояние между ними; их длины имеют значения (XXVIII₂) (стр. 299):

$$\widetilde{AB} = 2k \operatorname{ctg} \Pi(l)$$

и

$$\widetilde{A_1B_1} = 2k \operatorname{ctg} \Pi(l_1).$$

Следовательно, [(XXIII) (стр. 294)]:

$$\frac{\operatorname{ctg} \Pi(l_1)}{\operatorname{ctg} \Pi(l)} = e^{-\frac{x}{k}} = \operatorname{tg} \frac{1}{2} \Pi(x).$$

Дробь $\frac{\operatorname{ctg} \Pi(l_1)}{\operatorname{ctg} \Pi(l)}$ мы можем построить по схеме (9) § 47 (стр. 379) и, таким образом, получим отрезок u , для которого $\operatorname{tg} \Pi(u) = \operatorname{tg} \frac{1}{2} \Pi(x)$, т. е. $\Pi(x) = 2\Pi(u)$, откуда найдем отрезок x . Данные две предельные дуги мы, таким образом, всегда можем поместить между двумя общими осями.

Положим теперь, что дана предельная дуга AB , которую нужно разделить на n равных частей. На произвольной предельной линии MN (черт. 264, б), заданной точкой M и осью MM' , засечками отложим n равных дуг $MP = PQ = QR = \dots = SN$. Это можно выполнить следующим образом. Точку P выберем на предельной линии MN произвольно и проведем произвольную ось PP' и на ней построим точку P' , соответствующую точке M . Затем построим угол $P'PQ = P'PM$, на его стороне PQ отложим отрезок $PQ = PM$. Тогда $\widehat{PQ} = \widehat{MP}$; выполнена первая засечка. Таким же образом построим и точки $R, S, \dots$ и дойдем до точки N так, что $\widehat{MN} = n \cdot \widehat{MP}$. Теперь между параллелями MM' и NN' поместим заданную дугу AB , как это указано выше. Оси PP', QQ', RR' пересекут дугу AB на n равных частей.

4. **Задача о делении окружности.** Знаменитая задача деления окружности заключается в том, чтобы построить угол $\frac{2\pi}{n}$, где n — заданное целое число. Если положим $\frac{2\pi}{n} = \theta$, то угол θ , как известно, определяется из уравнения:

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^n = 1, \quad (3)$$

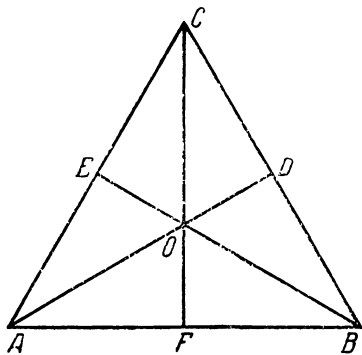
которое и называется уравнением деления окружности. Это уравнение, как и уравнение (1), есть аналитическое соотношение, не зависящее от геометрической системы, в которой мы оперируем. В тех случаях, когда оно разрешается в квадратных радикалах, угол может быть построен циркулем и линейкой как в евклидовой, так и в гиперболической плоскости. Следовательно, деление окружности на n равных частей в гиперболической плоскости может быть выполнено циркулем и линейкой в том и только в том случае, когда оно выполняется этими средствами в евклидовой плоскости.

Как известно, Гауссом в «Disquisitiones arithmeticae» был установлен критерий, при выполнении которого это построение возможно; именно, его можно осуществить в том и только в том случае, если n есть число вида

$$2^m p_1 p_2 \dots p_k, \quad (4)$$

где каждое из чисел $p_1, p_2, \dots, p_k$ есть простое число вида $2^{2^s} + 1$ (m и s — целые числа).

Задача о делении окружности на равные части явно эквивалентна задаче о построении правильного многоугольника с заданным числом сторон (n). Построив при центре окружности n радиусов, образующих один с другим последовательно угол $\frac{2\pi}{n}$, мы получим вершины вписанного многоугольника. Однако в евклидовой плоскости построение правильного вписанного многоугольника часто выполняется специфическими средствами, которые не находят себе применения в гиперболической плоскости. Так, классический способ деления окружности на 6 равных частей в евклидовой плоскости основан на том, что сторона правильного шестиугольника, вписанного в окружность, равна ее радиусу. Но в геометрии Лобачевского сторона правильного шестиугольника больше радиуса. В самом деле, если концы стороны вписанного шестиугольника соединим с центром, то получим равнобедренный треугольник, в котором углы при основании будут меньше 60° . Вот построение, которое предлагает Е. Григорьев [125].



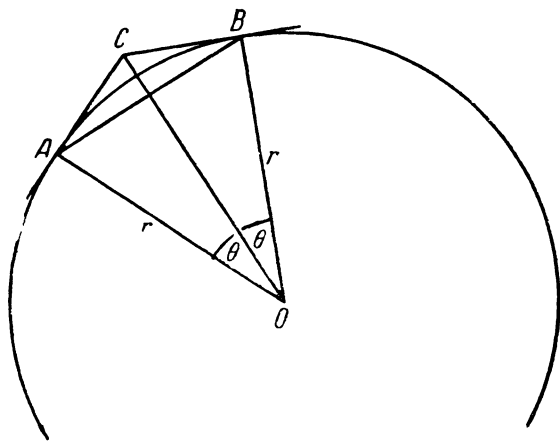
Черт. 265.

Пусть ABC есть равносторонний треугольник, AD, BE — его высоты, пересекающиеся в точке O (черт. 265). Соединяя C с O и продолжая эту прямую до пересечения со стороной AB в точке F , легко видеть, что CF будет третьей высотой треугольника ABC . В самом деле, высоты AD и BE по свойству равнобедренного треугольника делят пополам как углы при вершинах, так и противоположные стороны треугольника; стало быть, $CE = CD$, как половины равных сторон; отсюда вытекает, что прямоугольные треугольники OCD и OCE , име-

ющие общую гипотенузу и равные катеты, равны; таким образом, OC делит угол C пополам и будет высотой треугольника. После этого нетрудно убедиться в том, что шесть треугольников, на которые треугольник ABC разбивается тремя высотами, все равны между собой, и мы имеем при точке O шесть равных углов, сумма которых составляет 2π .

Теперь всякая окружность, описанная вокруг точки O , высотами или их продолжениями разделяется на шесть равных частей¹⁾.

5. Построение правильного многоугольника, описанного около данной окружности. Если в окружность радиуса r вписан правильный n -угольник и AB — его сторона (черт. 266), то в точках A и B



Черт. 266.

проводим касательные к окружности; если они пересекаются в точке S , то она служит вершиной правильного n -угольника, описанного около той же окружности; $AS = BS$ суть половины его стороны. Если O есть центр окружности, то прямая OC делит угол AOB , равный $\frac{2\pi}{n}$ (обозначим его через 2θ), пополам. Можно сказать, что вершина описанного многоугольника получится в пересечении касательной AS с биссектрисой OC угла AOB . Ясно, однако,

что это пересечение произойдет только в том случае, если $\theta < \Pi(r)$; если τ есть отрезок параллельности угла θ , то пересечение будет иметь место только в том случае, если $\Pi(\tau) < \Pi(r)$, т. е. если $r < \tau$. Таким образом, описанный около данной окружности правильный n -угольник существует только до тех пор, пока ее радиус меньше τ ; если радиус перерастает τ , то описанного около этой окружности n -угольника не существует. Напротив, если фиксируем радиус окружности, то описанный около нее n -угольник существует только в том случае, если $\frac{\pi}{n} < \Pi(r)$, т. е. если $n > \frac{\pi}{\Pi(r)}$. Впрочем, при $n = \frac{\pi}{\Pi(r)}$ описанный многоугольник существует, но все его вершины лежат в бесконечности.

В частности (при $n = 6$), около окружности радиуса r можно описать правильный шестиугольник только в том случае, если $\Pi(r) > \frac{\pi}{6}$. Если через I (в отличие от J) будем обозначать отрезок параллельности, соответствующий углу в $\frac{\pi}{6}$, т. е. положим $\frac{\pi}{6} = \Pi(I)$, то около окружности радиуса r можно описать правильный шестиугольник при $r < I$.

6. Квадратура круга в гиперболической плоскости. Полученная выше (на стр. 374) формула ($X\Pi_2$), выражающая площадь круга по данному его радиусу, служит точкой отправления для решения задачи

¹⁾ Конечно, это вытекает и непосредственно из теоремы 3а § 24 (стр. 202). Мы здесь сохранили текст Григорьева.

о квадратуре круга в гиперболической плоскости, т. е. о построении циркулем и линейкой квадрата, равновеликого данному кругу.

Под квадратом в гиперболической плоскости (со времени Больяи) разумеют четырехугольник, в котором все стороны и все углы равны (черт. 267). Средние линии EE' и FF' , соединяющие середины противоположных сторон такого четырехугольника, делят его на четыре равнобедренных трипрямоугольника (§ 38, рубр. 6, стр. 306). Такой трипрямоугольник определяется своим острым углом, даже может быть построен циркулем и линейкой по заданному углу α : прямоугольный треугольник

AOF имеет при центре O угол $\frac{\pi}{4}$ и другой угол $\frac{\alpha}{2}$; по этим данным он строится, а вместе с ним строится и квадрат. Так как угол α острый, то мы его обозначим через $\frac{\pi}{2} \mu$, где μ меньше единицы.

Площадь же квадрата равна $2\pi k^2(1-\mu)$; чтобы этот квадрат был равновелик кругу радиуса r , должно иметь место равенство:

$$4\pi k^2 \operatorname{ctg}^2 \Pi\left(\frac{r}{2}\right) = 2\pi k^2(1-\mu),$$

$$\operatorname{ctg} \Pi\left(\frac{r}{2}\right) = \sqrt{\frac{1-\mu}{2}}. \quad (5)$$

Положим $\mu = \cos \theta$, где θ — острый угол. Предыдущее равенство примет вид:

$$\operatorname{ctg} \Pi\left(\frac{r}{2}\right) = \sin \frac{\theta}{2} \quad (6)$$

или

$$\operatorname{ctg} \Pi\left(\frac{r}{2}\right) = \operatorname{ctg} \Pi(J) \sin \frac{\theta}{2}. \quad (7)$$

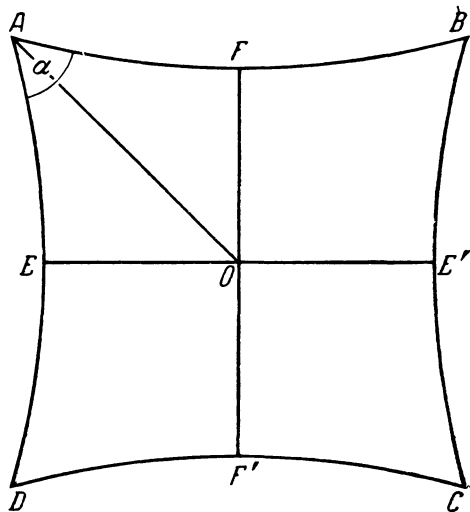
Так как, однако, $\frac{\theta}{2} \leq \frac{\pi}{4}$, то равенство (6) можно написать в виде:

$$\operatorname{ctg} \Pi\left(\frac{r}{2}\right) \leq \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

В силу же соотношения (XXX₆) (стр. 302) это сводится к тому, что $\sin \Pi(r) \geq \frac{1}{2}$ или $\sin \Pi(r) \geq \sin \left(\frac{\pi}{6}\right)$, т. е. $\sin \Pi(r) \geq \sin \Pi(I)$ или, наконец, $r \leq I$.

Иными словами, если радиус круга больше I , то, вообще, не существует равновеликого ему квадрата; это объясняется тем, что площадь квадрата не превышает $2k^2\pi$ и достигает этого наибольшего значения, когда квадрат обращается в четырехугольник Швейкарта. Если же $r < I$, то равновеликий ему квадрат существует; вопрос заключается только в том, может ли этот квадрат быть построен циркулем и линейкой. И наоборот, может ли быть построен по данному α радиусу круга, равновеликого этому квадрату.

Возможны, однако, случаи, когда угол θ , определяемый уравнением $\mu = \cos \theta$, может быть построен циркулем и линейкой. Так, уже Больяи



Черт. 267.

обратил внимание на то, что это имеет место при $\mu = \frac{1}{2}$. В этом случае $\alpha = \frac{\pi}{4}$; квадрат может быть, таким образом, построен, а угол $\theta = \frac{\pi}{3}$ и, следовательно, также может быть построен. По уравнению (7) может быть построен радиус r , половина которого есть катет прямоугольного треугольника, гипотенуза которого равна J , а противолежащий острый угол есть $\frac{\pi}{6}$. Мы имеем, таким образом, круг и равновеликий ему квадрат, который может быть построен по данному J . В гиперболической плоскости, следовательно, существуют круги, допускающие квадратуру циркулем и линейкой; Больше даже дает этому следующее выражение: квадратура круга циркулем и линейкой в плоскости либо никогда не возможна, и тогда в ней имеет место геометрия Евклида, либо она для некоторого класса кругов возможна, и тогда в ней имеет место новая геометрия.

Естественно, возникает вопрос—каковы случаи, когда по данному радиусу круга (r) можно построить равновеликий ему квадрат (квадратура круга), или по данному углу α гиперболического квадрата можно построить равновеликий ему круг (циркулятура квадрата); этому посвящена работа Н. М. Несторовича [126].

7. Осуществление квадратуры круга. Если задан круг радиуса r , то для его квадратуры нужно, прежде всего, построить прямоугольный треугольник с гипотенузой J и катетом $\frac{r}{2}$; угол, противолежащий катету $\frac{r}{2}$, будет $\frac{\theta}{2}$. Но для выполнения квадратуры нужно еще построить угол $\alpha = \frac{\pi}{2} \cos \theta$; в общем случае это неосуществимо. Если задан угол квадрата α и требуется построить радиус r круга, равновеликого этому квадрату, то трудность возникает непосредственно, потому что требуется из того же уравнения $2\alpha = \pi \cos \theta$ определить и построить угол θ . Н. М. Несторович указал широкий класс случаев, когда возможно циркулем и линейкой построить квадрат и равновеликий ему круг. Он с большим искусством показал связь между этой задачей и задачей о делении окружности на равные части.

Выберем угол α таким образом, чтобы он выражался числом $2\pi \frac{m}{n}$, где $\frac{m}{n}$ — рациональная дробь. Если n есть одно из чисел вида (4) (стр. 391), а $\frac{m}{n} < \frac{1}{4}$, то α будет острый угол, который, как указано выше, может быть построен циркулем и линейкой. Вместе с тем $\mu = \frac{4m}{n}$, и мы сможем построить угол θ , для которого $\cos \theta = \mu = \frac{4m}{n}$ (§ 47, рубр. 6, стр. 385). Теперь из прямоугольного треугольника, построенного по схеме (7), построим отрезок r — радиус круга, равновеликого данному квадрату. Таким образом, существует очень много случаев, когда в гиперболической плоскости возможно построить квадрат и равновеликий ему круг.

Но, конечно, возможны случаи, когда круг, радиус которого дан или по тем или иным данным допускает построение циркулем и линей-

кой, не поддается квадратуре. Так, если положим $\theta = \frac{\pi}{4}$ и построим r по схеме (7), то равновеликий ему квадрат построить невозможно. В самом деле, в этом случае соответствующий угол $\alpha = \frac{\pi\sqrt{2}}{4}$ и, следовательно, не может быть построен циркулем и линейкой¹⁾.

8. Построение треугольника по трем углам. Среди классических конструктивных задач, специфических для гиперболической плоскости, следующие три обычно считаются основными:

1) построение угла параллельности, соответствующего данному отрезку (или, что то же, проведение из данной точки двух прямых, параллельных данной прямой);

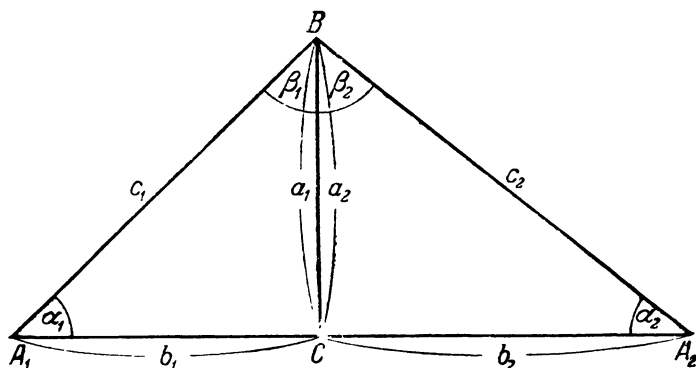
2) построение отрезка параллельности, соответствующего данному острому углу (или, что то же, построение заградительной прямой данного острого угла);

3) построение треугольника по данным его углам.

Решение первых двух задач было изложено в § 24, рубр. 6 (стр. 208) и дополнено в § 26, рубр. 7 (стр. 226). Мы обращаемся теперь к третьей задаче; ее решение приводит к следующей теореме, доказательство которой и состоит в выполнении требуемого построения.

Теорема. Каковы бы ни были три угла, сумма которых меньше π , в гиперболической плоскости всегда существует один и только один треугольник, имеющий эти внутренние углы.

Доказательство. Положим, что нам даны три угла, сумма которых меньше π . Покажем, как построить треугольник, имеющий



Черт. 268.

эти три угла. Наибольший из этих углов определим линейным заданием β , два другие — заданиями α_1 и α_2 . Требуемый треугольник (предполагая, что таковой существует) обозначим через A_1BA_2 (черт. 268).

Из вершины B опустим перпендикуляр BC на сторону A_1A_2 ; он разобьет треугольник на два: $\Delta^1 (A_1BC)$ и $\Delta^2 (A_2BC)$, стороны которых и линей-

¹⁾ Это следует из работ А. О. Гельфонда и Р. О. Кузьмина; в частности, см. работу Р. О. Кузьмина «Об одном новом классе трансцендентных чисел», Изв. АН СССР, серия физ.-матем., 1930 (стр. 585—597).

ные задания углов в обычном порядке обозначим соответственно через

$$a_1, b_1, c_1, \alpha_1, \beta_1 \text{ и } a_2, b_2, c_2, \alpha_2, \beta_2,$$

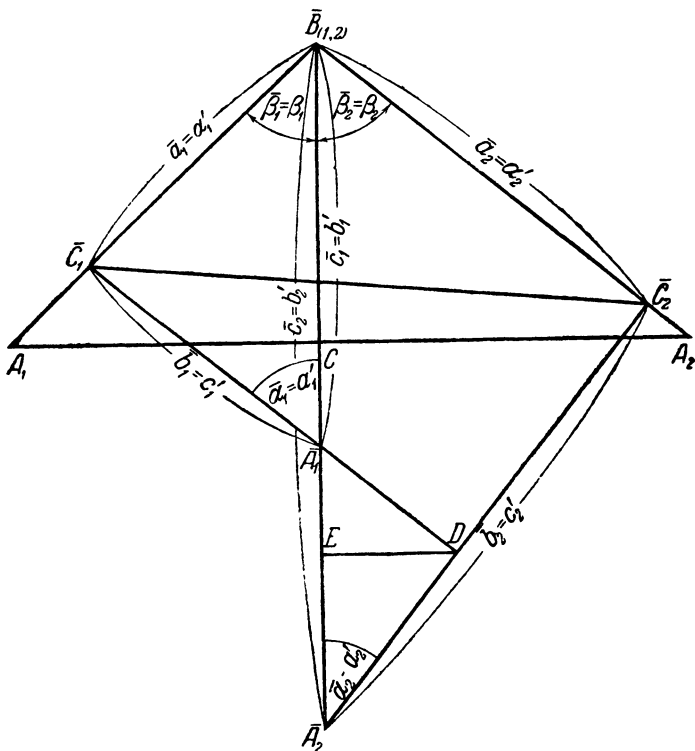
как указано на чертеже; при этом $a_1 \equiv a_2$.

Теперь по схеме (XIII₂) (стр. 222) построим к этим прямоугольным треугольникам дополнительные, именно, $\bar{\Delta}_7^1$ и $\bar{\Delta}_7^2$, которые получаются из Δ^1 и Δ^2 преобразованием T_7 :

$$(\bar{\Delta}_7^1) \quad \bar{a}_1 = \alpha'_1, \quad \bar{b}_1 = c'_1, \quad \bar{c}_1 = b'_1, \quad \bar{\alpha}_1 = \alpha'_1, \quad \bar{\beta}_1 = \beta_1;$$

$$(\bar{\Delta}_7^2) \quad \bar{a}_2 = \alpha'_2, \quad \bar{b}_2 = c'_2, \quad \bar{c}_2 = b'_2, \quad \bar{\alpha}_2 = \alpha'_2, \quad \bar{\beta}_2 = \beta_2.$$

Эти два треугольника ($\bar{A}_1 \bar{B}_1 \bar{C}_1$ и $\bar{A}_2 \bar{B}_2 \bar{C}_2$) приложим друг к другу при общей вершине $\bar{B}$, как показано на чертеже 269; так как при этом $\alpha_1 = \alpha_2$.



Черт. 269.

то углы $\bar{C}_1 \bar{A}_1 \bar{B}$ ($\bar{\alpha}_1 = \alpha'_1$) и $\bar{C}_2 \bar{A}_2 \bar{B}$ ($\bar{\alpha}_2 = \alpha'_2$) равны. Так как углы $\bar{C}_1 \bar{B} \bar{A}_1$ (β_1) и $\bar{C}_2 \bar{B} \bar{A}_2$ (β_2) соответственно равны углам $\angle CBA_1$ и $\angle CBA_2$ исходного треугольника A_1BA_2 , то $\angle \bar{C}_1 \bar{B} \bar{C}_2 = \angle A_1BA_2$ (β). И так как α_1 , α_2 и β нам даны, то стороны $\bar{C}_1 \bar{B}$ (α'_1) и $\bar{C}_2 \bar{B}$ (α'_2) треугольника $\bar{C}_1 \bar{B} \bar{C}_2$ и угол между ними нам известны; этот треугольник может быть построен. Прямые $\bar{C}_1 \bar{A}_1$ и $\bar{C}_2 \bar{A}_2$ перпендикулярны к сторонам угла $\bar{C}_1 \bar{B} \bar{C}_2$ и обращены внутрь его.

Дальнейший ход построения зависит от того, пересекаются ли эти перпендикуляры или нет.

Если сначала примем, что угол $\bar{C}_1 \bar{B} \bar{C}_2$ — острый, то мы находимся в условиях задачи, решением которой мы занимались в § 25, рубр. 7 (стр. 214). Возвращаясь к результатам этого исследования в применении к рассматриваемому построению, положим

$$\xi = \alpha'_1, \quad \zeta = \alpha'_2, \quad \omega = \angle \bar{C}_1 \bar{B} \bar{C}_2 = \angle A_1 B C_1.$$

Тогда

$$\Pi(\xi) + \Pi(\zeta) = \Pi(\alpha'_1) + \Pi(\alpha'_2) = \pi - \Pi(\alpha_1) - \Pi(\alpha_2) = \pi - A_1 - A_2 = \omega + \delta,$$

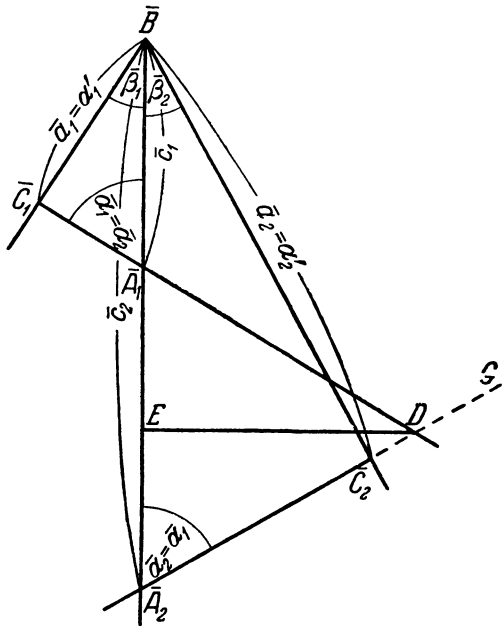
где δ — угловой дефект треугольника, который требуется построить.

Таким образом, здесь

$$\Pi(\xi) + \Pi(\zeta) > \omega,$$

т. е. из соотношений (5а), (6а), (7а) на стр. 215 — 217, к которым нас привело исследование в § 25, рубр. 7, имеет место только неравенство (6а). Это значит, что из различных возможностей, которые там пришлось рассматривать, здесь могут представиться только случаи 1а, 1б, 1с, 2б и 3б¹⁾. Нам необходимо рассмотреть их отдельно.

Случай 1а. Прямые $\bar{C}_1 \bar{A}_1$ и $\bar{C}_2 \bar{A}_2$ пересекаются в точке D внутри угла $\bar{C}_1 \bar{B} \bar{C}_2$ (тот же чертеж 269). Так как $a_1 = a_2$, то $\angle \bar{C}_1 \bar{A}_1 \bar{B} = \angle \bar{C}_2 \bar{A}_2 \bar{B}$; при точке D поэтому образуется равнобедренный треугольник $\bar{A}_1 D \bar{A}_2$, и биссектриса DE угла при вершине D перпендикулярна к прямой $\bar{A}_1 \bar{A}_2$. Построение поэтому выполняется так. Проведем биссектрису угла $\bar{A}_1 D \bar{A}_2$ и опускаем на нее из точки $\bar{B}$ перпендикуляр $\bar{B}E$; получим точки $\bar{A}_1$ и $\bar{A}_2$, т. е. воспроизведем треугольники $\bar{A}_1 \bar{B} \bar{C}_1$ и $\bar{A}_2 \bar{B} \bar{C}_2$. Подвергнув их вновь преобразованию T_7 (которое совпадает с обратным преобразованием T_7^{-1}), мы получим треугольники $A_1 B C_1$ и $A_2 B C_2$, а вместе с тем и требуемый треугольник $A_1 B A_2$.



Черт. 270.

Случай 1б. Перпендикуляр $\bar{C}_1 \bar{A}_1$ пересекает в точке D продолжение $\bar{C}_2 \bar{G}$ перпендикуляра $\bar{C}_2 \bar{A}_2$ (черт. 270). И в этом случае, проведя биссектрису DE угла $\bar{A}_1 D \bar{A}_2$ и опустив на нее из точки $\bar{B}$ перпендикуляр $\bar{B}E$, мы опять получаем треугольники $\bar{B} \bar{C}_1 \bar{A}_1$ и $\bar{B} \bar{C}_2 \bar{A}_2$ и по ним воспроизводим требуемый треугольник $A_1 B A_2$.

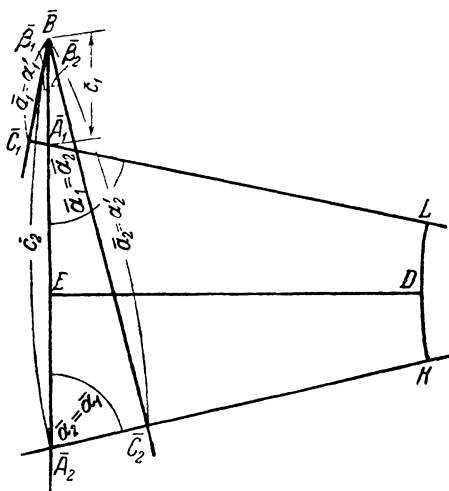
Случай 1с. Только что описанное построение можно, очевидно, выполнить и в случае 1с, когда перпендикуляр $\bar{C}_1 \bar{A}_2$ пройдет через основание $\bar{C}_2$ перпендикуляра $\bar{A}_2 \bar{C}_2$.

¹⁾ См. заключение рубрики 7 § 25 на стр. 217.

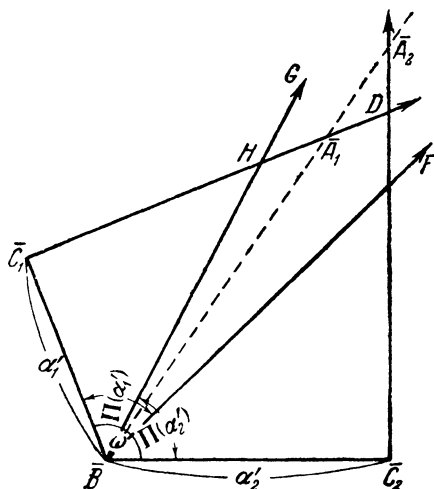
авторы безоговорочно ограничиваются случаем 1а, когда перпендикуляры $\bar{C}_1\bar{A}_1$ и $\bar{C}_2\bar{A}_2$ пересекаются, и притом внутри угла $\bar{B}$. Это построение, конечно, не исчерпывающее задачи, воспроизводят и другие авторы. (Обстоятельное и исчерпывающее доказательство, повидимому, появляется здесь в первый раз.

Существуют и другие доказательства теоремы — другие решения этой задачи. Одни из них основаны на предварительных тригонометрических вычислениях сторон или высот треугольника по его углам. Построения, основанные на другом принципе, будут указаны во второй части настоящего сочинения.

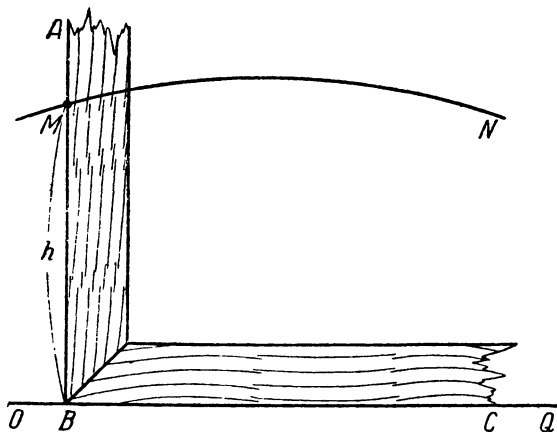
○



Черт. 272.



например, угольника (черт. 274)] с чертищим острием (M), которое может перемещаться по одному из катетов AB = «высоте» гиперциркуля и может быть закреплено в любой точке высоты на данном расстоянии $h = MB$ от вершины B угольника [h по нашей терминологии есть параметр эквидистанты MN с базисом OQ]. Такую установку можно было бы назвать «установкой гиперциркуля на h », но лучше будет, пожалуй, употребление термина: «взять в гиперцикуль отрезок h », по аналогии с выражением «взять на циркуль отрезок r », т. е. раздвинуть ножки циркуля на расстояние r ».



Черт. 274.

Прибор этот во время черчения эквидистанты должен скользить вторым катетом BC по линейке, приложенной к базису OQ эквидистанты.

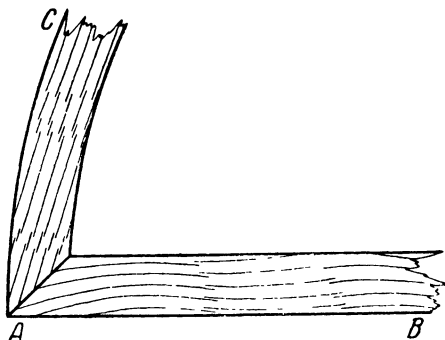
Орицикуль Н. М. Несторович описывает следующим образом: так как все

орициклы гиперболического пространства тождественны, то орицикуль следует мыслить себе в виде инструмента, обеспечивающего возможность вычерчивания этой линии по параметрам, определяющим положение ее на плоскости. Естественнее всего мыслить себе орицикуль как лекало (черт. 275) в форме материально осуществленной дуги AC орицикла, жестко связанной с двумя точками A и B оси последнего, причем одна из этих точек, например A , должна принадлежать дуге орицикла. Задание оси орицикла равносильно в данном случае указанию на положение начальной точки орицикла.

Если мыслить себе и ось орицикла материально осуществленной в виде линейки AB , то весь орицикуль можно представить в форме угольника, одна сторона AB которого, соответствующая оси AB , прямолинейна, а другая AC — криволинейна, представляя отрезок дуги орицикла, расположенной так, что касательная в вершине A перпендикулярна к оси AB .

Условимся точку A называть «вершиной» орициркуля, прямолинейную часть его AB — «осью», дугу AC — «кромкой». Оси орициркуля будем приписывать направление от вершины орициркуля внутрь предельной линии к несобственному центру последнего.

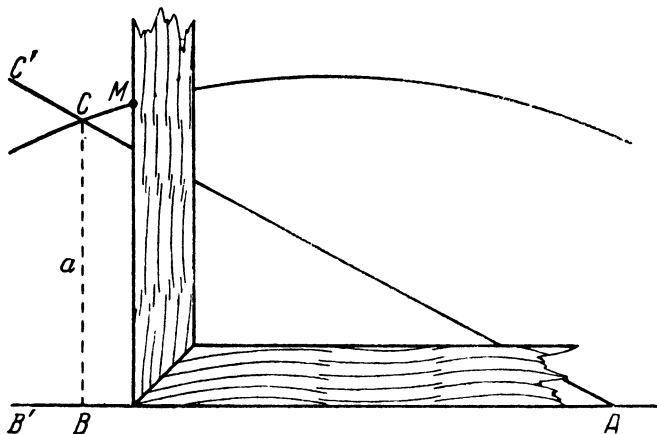
Не подлежит сомнению, что некоторые конструктивные задачи с большой простотой решаются этим более широким комплексом инструментов. Заимствуем у Н. М. Несторовича [124] следующие простейшие примеры. Начнем с применения гиперциркуля.



Черт. 275.

1) Построить прямоугольный треугольник по катету a и противолежащему углу A .

В § 27 (рубр. 3, стр. 231) мы показали построение прямоугольного треугольника по этим данным: мы строили для этого вспомогательный



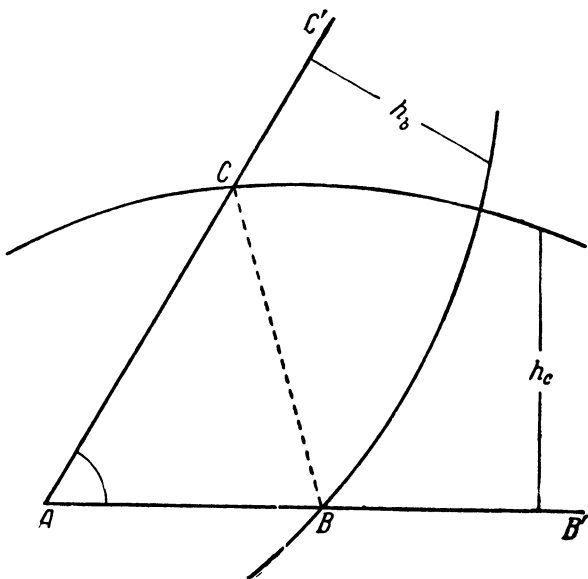
Черт. 276.

треугольник, от которого перешли к требуемому. При помощи гиперциркуля это построение выполняется гораздо проще. Построив угол $B'AC'$, равный данному углу BAC (черт. 276), к одной из его сторон, скажем, к AB' приложим базисный край линейки, острие же ставим на расстоянии a от базы. Прочертим эквидистанту путем скольжения базы гиперциркуля по прямой AB' ; в точке C ее пересечения со стороной AC' данного угла будет лежать вторая вершина требуемого прямоугольного треугольника.

2) Построить треугольник по углу A и высотам h_b и h_c , выходящим из двух его вершин B и C .

Строим угол A (черт. 277); вычертив эквидистанту с базой AC' и параметром h_b и другую эквидистанту с базой AB' и параметром h_c , в их пересечении с соответствующими сторонами угла получим две другие вершины B и C треугольника.

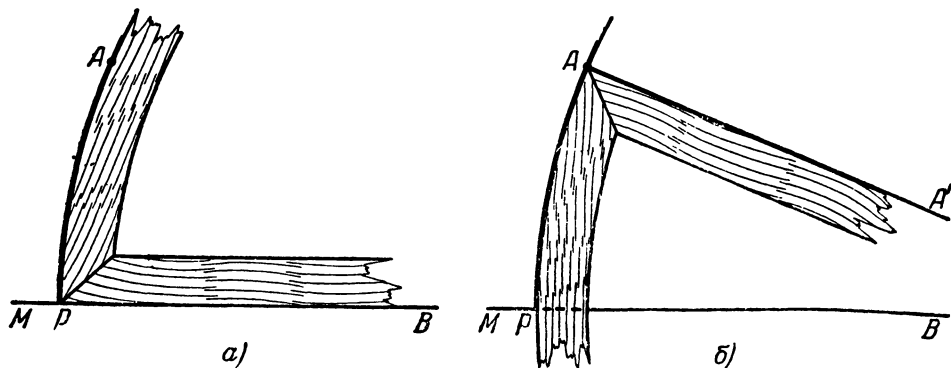
В качестве примера применения орициркуля приводим, также следуя Н. М. Несторовичу, решение двух основных конструктивных задач, решения которых циркулем и линейкой приведены выше.



Черт. 277.

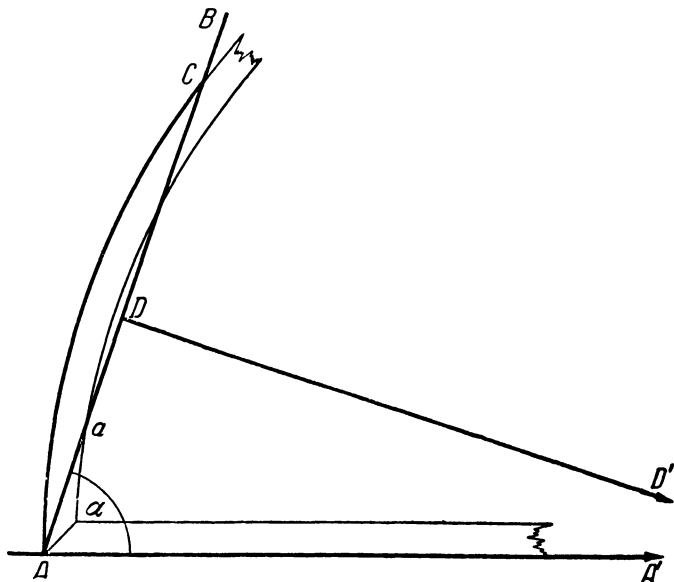
1) Из данной точки A , лежащей вне заданной прямой MB , провести прямую AA' , параллельную MB .

Прикладываем орициркуль осью к прямой MB так, чтобы его кромка прошла через точку A , и прочерчиваем дугу PA предельной линии (черт. 278, a). Перевернув орициркуль обратной стороной, прикла-



Черт. 278.

дываем кромку его к начерченной дуге AP так, чтобы вершина орициркуля попала в точку A , и по оси орициркуля прочерчиваем прямую AA' (черт. 278, $б$). $AA' \parallel PB'$ как оси вычерченной предельной линии.



Черт. 279.

2) По данному углу α построить отрезок $\check{a}$, отвечающий α как углу параллельности [$\angle = \Pi(\alpha)$].

К одной из сторон AA' данного угла $\alpha = A'AB$ (черт. 279) прикладываем ось орициркуля так, чтобы вершина его совпала с точкой A , а кромка была направлена в сторону внутренней области данного угла, и прочерчиваем дугу предельной линии до вторичного ее пересечения

со второй стороной AB данного угла в некоторой точке C . Отрезок AC есть хорда дуги $\widehat{AC}$ предельной линии, и потому $\frac{1}{2} AC = AD = a$.

10. Решение циркулем и линейкой всех конструктивных задач, осуществляемых вычерчиванием кривых постоянной кривизны. Так как, однако, задачи, которые приведены выше в качестве простейших примеров применения гиперциркуля и орициркуля, решаются также циркулем и линейкой, и то же имеет место относительно ряда других задач, которые решаются всеми четырьмя инструментами, то Н. М. Несторович поставил вопрос: нужны ли, вообще, в гиперболической плоскости добавочные инструменты — гиперциркуль и орициркуль? В работе [128] он дал на этот вопрос отрицательный ответ: он показал, что все конструктивные задачи, решаемые в гиперболической плоскости совокупностью инструментов — линейкой, обыкновенным циркулем, гиперциркулем и орициркулем, могут быть решены циркулем и линейкой. Аналитические соображения, которые приводят к решению этого вопроса, не отличаются от тех, которые приведены в § 47, рубр. 8 (стр. 387—388).

В самом деле, все кривые постоянной кривизны выражаются в бельтрамиевых координатах уравнениями вида (LXXII) (стр. 341). Поэтому разыскание точек пересечения двух кривых постоянной кривизны всегда приводится к решению системы вида (33) (стр. 388), которая дает для координат точек пересечения этих кривых квадрато-радикальные выражения. А так как квадрато-радикальные выражения, как мы видели, всегда могут быть построены циркулем и линейкой, то и задачи, которые решаются вычерчиванием кривых постоянной кривизны, всегда могут быть решены циркулем и линейкой.

Однако, Н. М. Несторович подходит к этому результату иначе: он непосредственно показывает, как могут быть циркулем и линейкой построены точки пересечения двух кривых постоянной кривизны, какими бы элементами эти кривые ни были заданы. Эти построения весьма интересны и изящны [129]. К ним еще присоединяются очень удачные построения А. С. Смогоржевского [130], [131] и [132]. Читателя, который этими построениями заинтересуется, я вынужден отослать к подлинным мемуарам, а также — к интересной новой книге А. С. Смогоржевского [133].

ГЛАВА ДЕСЯТАЯ

ОСНОВЫ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ В ПРОСТРАНСТВЕ

§ 49. РАСПОЛОЖЕНИЕ ПРЯМЫХ И ПЛОСКОСТЕЙ В ГИПЕРБОЛИЧЕСКОМ ПРОСТРАНСТВЕ

1. Стереометрические предложения абсолютной геометрии. Обращаясь к стереометрии гиперболического пространства, необходимо еще раз отметить как те постулаты, которые для этого должны быть присоединены к планиметрическим, так и теоремы абсолютной геометрии, относящиеся к стереометрии. Мы здесь еще раз отметим [см. гл. I, § 10, рубр. 1 (стр. 87)], что изложение начал стереометрии в наших учебниках особенно мало отличается от их изложения в «Началах» Евклида, и мы ограничимся поэтому самым кратким обзором «абсолютной» стереометрии¹⁾.

О немногих стереометрических постулатах мы уже говорили выше (там же); здесь мы их повторим, выразим точнее и дополним.

1) Через каждые три точки пространства, не лежащие на одной прямой, проходит плоскость²⁾.

2) Какова бы ни была плоскость, в пространстве существует точка, вне ее лежащая.

3) Если две точки лежат в некоторой плоскости, то в ней лежит и проходящая через эти точки прямая.

4) Если две плоскости имеют общую точку, то они имеют еще одну общую точку (а следовательно, — и прямую, через эти две точки проходящую).

Все эти постулаты неявно содержатся у Евклида; многие из его комментаторов, начиная с Прокла и кончая Симсоном, это подчеркивают.

Евклид в стереометрии не пользуется движением; но, как мы уже указывали, последующие геометры, начиная с Архимеда, систематически пользуются методом наложения, т. е. геометрическим движением. Однако четкую формулировку законов движения мы находим только у Гельмгольца [¹³⁴] и у С. Ли [¹³⁵]. Основные законы движения в гиперболическом пространстве не отличаются от законов движения в евклидовом пространстве, т. е. относятся к абсолютной геометрии. Мы будем ими пользоваться и сообразно этому формулируем эти законы, которые в обычном изложении стереометрии всегда предполагаются.

¹⁾ Обстоятельное изложение аксиоматики, как уже не раз указывалось выше, будет дано во втором томе настоящего сочинения.

²⁾ Предложение «через эти точки, не лежащие на одной прямой, проходит только одна плоскость» допускает доказательство.

1. Каждое геометрическое тело может быть передвинуто в пространстве так, чтобы любая его точка O пришла в совпадение с любой точкой O' пространства.

2. Вращением вокруг точки O' можно любой луч $O'A$ передвинутого тела совместить с любым лучом $O'A'$ пространства, выходящим из точки O' .

3. Вращением вокруг прямой $O'A'$ можно любую полуплоскость $O'A'B$, имеющую ребром прямую $O'A'$, совместить с любой полуплоскостью пространства $O'A'B'$, имеющей ребром ту же прямую $O'A'$.

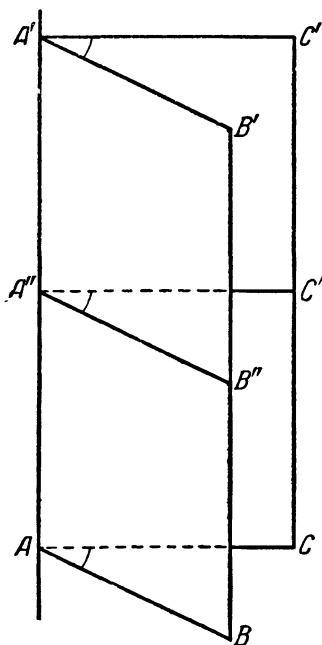
4. По выполнении этих совмещений новое положение передвигаемого тела будет вполне определено.

В первой стадии нашего изложения гиперболической стереометрии (до применения анализа бесконечно-малых, т. е. до § 56) мы не будем считать пространство (прямую в пространстве) непрерывным; при изложении гиперболической стереометрии мы будем считать, что в плоскости действует постулат о параллельных Гильберта (стр. 239) и, соответственно этому, будем называть пространство, в котором это имеет место, пространством H_3 в отличие от непрерывного пространства Лобачевского L_3 .

Обращаясь к содержанию стереометрии, отметим, прежде всего, что к абсолютной геометрии принадлежит основное предложение Евклида XI.4 — если прямая образует с двумя пересекающимися прямыми в точке их пересечения прямые углы, то она перпендикулярна ко всякой прямой, которая проходит в плоскости, содержащей эти две прямые, через ту же точку (точку их пересечения). На этом основывается определение прямой, перпендикулярной к плоскости, и затем доказывается, что через каждую точку, как принадлежащую этой плоскости, так и лежащую вне ее, проходит одна и только одна перпендикулярная к ней прямая. Эти хорошо известные построения выполняются средствами абсолютной геометрии; отметим только, что они не предполагают непрерывности прямой, поскольку отдельные шаги этого построения сводятся каждый к проведению в плоскости перпендикуляра к прямой из точки, лежащей в этой плоскости на этой прямой или вне ее.

К абсолютной геометрии принадлежит также учение о двугранных и многогранных углах, включая и основное предложение, что линейные углы двугранного угла, построенные при различных точках его ребра, равны между собой. Однако доказательство этого последнего предложения, обычно излагаемое в наших учебниках, основано на евклидовой теории параллельных линий. Именно, из двух точек A и A' на ребре двугранного угла проводят в гранях угла прямые AB и AC , соответственно $A'B'$ и $A'C'$, перпендикулярные к его ребру (черт. 280); согласно евклидовой теории параллельных линий, $AB \parallel A'B'$ и $AC \parallel A'C'$, а потому $\angle BAC = \angle B'A'C'$. Между тем, это предложение легко доказывается средствами абсолютной геометрии. В самом деле, отрезок AA' разделим пополам в точке A'' и в гранях угла проведем прямые $A''B''$ и $A''C''$, перпендикулярные к прямой AA' ; образуется линейный угол $B''A''C''$ нашего двугранного угла при точке A'' . Теперь совместим этот угол с самим собой так, однако, чтобы стороны его $A''B''$ и $A''C''$ совместились друг друга, т. е. чтобы угол $B''A''C''$ совместился с самим собой другой стороной.

Плоскость $B''A''C''$ совместится с самой собой, но части пространства, расположенные по обе ее стороны, заместят друг друга. Луч $A''A$ совместится с лучом $A''A'$ и, обратно, луч $A''A'$ совместится с лучом $A''A$,



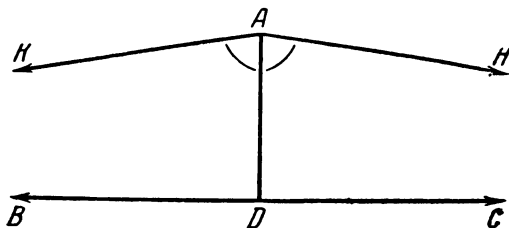
Черт. 280.

точка A совместится с точкой A' . Так как совместятся и соответствующие полуплоскости, то луч AB совместится с лучом $A'C'$, луч AC — с лучом $A'B'$, угол BAC — с углом $C'A'B'$ (и, обратно, угол $B'A'C'$ с углом CAB); углы эти, следовательно, равны. Предложение принадлежит к абсолютной геометрии. С этим связано определение прямого двугранного угла, взаимно перпендикулярных плоскостей и следующие предложения, также имеющие основное значение: а) плоскость, проходящая через прямую, перпендикулярную к другой плоскости, перпендикулярна к последней; б) перпендикуляр к одной из двух взаимно перпендикулярных плоскостей из точки, лежащей на прямой их пересечения, лежит во второй плоскости; в) если две плоскости, перпендикулярные к третьей плоскости, пересекаются, то прямая их пересечения встречает третью плоскость и перпендикулярна к ней. Мы не перечисляем всех предложений, которые непосредственно связаны с этими основными теоремами

и принадлежат абсолютной геометрии; но читателя не затруднит их распознать.

2. Параллельные прямые в гиперболическом пространстве. Переходя теперь к стереометрии гиперболического пространства, начнем с того, что две ориентированные прямые в гиперболическом пространстве называются **параллельными**, если они расположены в одной плоскости и в этой плоскости параллельны в планиметрическом значении этого слова. Отсюда следует: где бы в пространстве ни была расположена точка A вне ориентированной

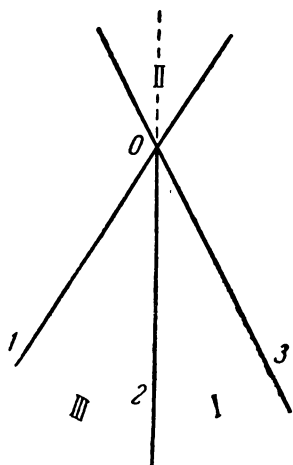
прямой $\vec{BC}$ (черт. 281), через нее всегда проходит одна и только одна ориентированная прямая $\vec{AH}$, параллельная $\vec{BC}$. Если прямая BC не ориентирована, то через точку A проходят две параллельные ей прямые — одна $\vec{AH}$, параллельная ей в сторону $\vec{BC}$, другая $\vec{AK}$, параллельная ей в сторону $\vec{CB}$, — под равными углами к перпендикуляру AD , опущенному из точки A на прямую BC . Из планиметрических свойств параллельных прямых следует также, что параллелизм двух ориентированных прямых в гиперболическом пространстве есть взаимное их свойство (§ 19, рубр. 3, стр. 168).



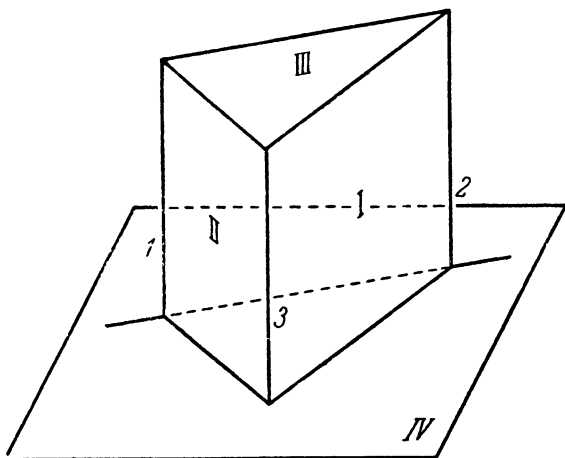
Черт. 281.

Но транзитивность параллелизма в пространстве требует специального доказательства. Ввиду взаимности параллелизма это свойство параллельных прямых может быть сформулировано следующим образом: две прямые, параллельные одной и той же ориентированной прямой, параллельны друг другу. В § 19, рубр. 6, (стр. 171) это было доказано в существенном предположении, что три прямые лежат в одной плоскости. Предложение это остается в силе и в том случае, если прямые расположены не в одной плоскости. Доказательство этого основано на следующем предложении также основного значения.

3. Прямые в пространстве, связанные между собой. Три прямые в пространстве называются *связанными*, если каждые две из них



Черт. 282а.



Черт. 282б.

расположены в одной плоскости; о трех связанных прямых говорят также, что они образуют связку.

Теорема 1. а) Если две из трех связанных прямых пересекаются, то и третья прямая проходит через точку их пересечения.

б) Если две из трех связанных прямых в пространстве расходятся, то и третья прямая расходится с каждой из них и все три прямые перпендикулярны к одной плоскости.

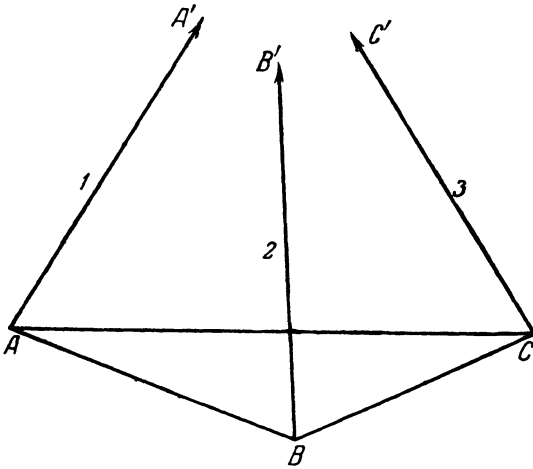
в) Если две из трех связанных прямых в пространстве параллельны, то и третья прямая, ориентированная в надлежащую сторону, параллельна каждой из них.

Доказательство. Мы будем обозначать через 1, 2, 3—данные прямые, через I (2, 3), II (3, 1), III (1, 2)—плоскости, в которых они попарно лежат.

а) Если прямые 1 и 2 пересекаются (черт. 282а) в точке O, то эта точка лежит во всех трех плоскостях, в частности, в плоскостях I и II, т. е. на прямой 3.

б) Если прямые 1 и 2 расходятся (черт. 282б), то в их плоскости существует прямая, перпендикулярная к ним обоим. Через эту прямую

проведем плоскость IV , перпендикулярную к плоскости III (1, 2). Эта плоскость будет перпендикулярна к прямым 1 и 2; поэтому прямая 3, по которой пересекаются плоскости I и II , проходящие соответственно через прямые 2 и 1 и вследствие этого перпендикулярные к плоскости IV , пересекает плоскость IV и перпендикулярна к ней.



Черт. 282в.

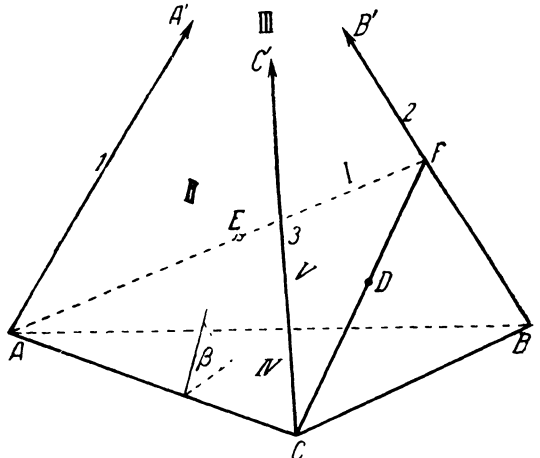
с) Если прямые 1 ($\vec{AA'}$) и 2 ($\vec{BB'}$) (черт. 282в) в этой ориентации параллельны, и через $\vec{CC'}$ обозначим прямую 3, ориентированную в ту же сторону, что и $\vec{AA'}$ и $\vec{BB'}$, то она должна быть параллельна каждой из них, так как каждое другое допущение привело бы к противоречию с теоремами а) и б).

Теорему с) можно формулировать также следующим образом.

Теорема 2. Если через точку C , лежащую вне плоскости двух параллельных прямых $\vec{AA'}$ и $\vec{BB'}$, провести плоскости, содержащие эти прямые, то прямая их пересечения, в надлежащую сторону обращенная, параллельна этим прямым.

Эта теорема имеет основное значение; мы приведем еще непосредственное ее доказательство.

Положим, что ориентированные прямые AA' (1) и BB' (2) параллельны (черт. 283); проходящую через них плоскость, как выше, будем обозначать через III . Через произвольную точку C , лежащую вне плоскости III , проведем плоскости CAA' (II) и CBB' (I). Прямая CC' , по которой эти плоскости пересекаются, не может пересечь ни одной из прямых AA' и BB' , так как через точку пересечения, если бы таковая существовала, должна была бы проходить и третья прямая (теорема 1, а). Взяв произвольно точки A, B, C на соответственных прямых, проведем плоскость ABC (IV). Пусть $\vec{CC'}$ будет прямая пересечения плоскостей I и II , ориентированная в ту же сторону, что и параллельные прямые $\vec{AA'}$ и $\vec{BB'}$. Покажем, что прямая $\vec{CC'}$ параллельна $\vec{BB'}$. Так как эти прямые не встречаются, то для



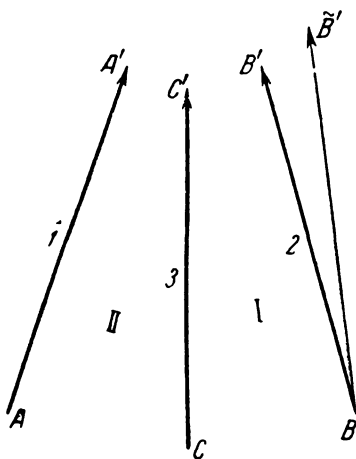
Черт. 283.

доказательства достаточно обнаружить, что всякий луч CD , проходящий внутри опорного угла BCC' , встречает луч BB' . Чтобы это показать, проведем плоскость V через AC и CD . Обозначим через β двугранный угол $A'ACB$, который плоскости II и IV образуют при ребре AC ; луч CD проходит внутри этого двугранного угла. Поэтому вся полуплоскость ACD (идущая от AC в сторону CD) проходит внутри этого двугранного угла и пересекает полуплоскость III по лучу AE , проходящему внутри прямолинейного угла BAA' . Так как при этом луч AA' параллелен лучу BB' , а угол $A'AB$ мы можем рассматривать как опорный угол параллели AA' при точке A , то проходящий внутри его луч AE пересекает луч BB' в некоторой точке F . Так как, с другой стороны, лучи AE , CD и BB' связаны плоскостями I , III и V , то через точку F в силу теоремы 1, а) проходит и луч CD . Прямая $\vec{CC'} \parallel \vec{BB'}$. Таким же образом обнаружим, что $\vec{CC'} \parallel \vec{AA'}$. Теорема доказана.

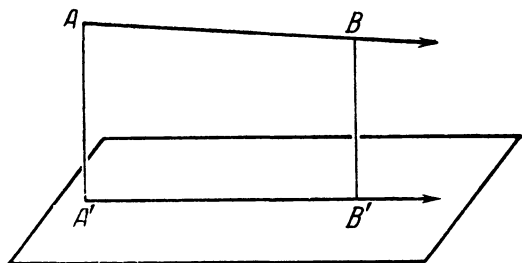
Теперь мы имеем возможность установить транзитивность параллелизма в пространстве. Формулируем это следующим образом.

Теорема 2а. Две прямые, параллельные третьей, параллельны между собой.

В самом деле, пусть прямые $\vec{AA'}$ и $\vec{BB'}$ параллельны $\vec{CC'}$ (черт. 284). Случай, когда эти прямые расположены в одной плоскости, исчерпан теоремой 5а § 19, (стр. 171). Мы рассмотрим поэтому случай, когда эти прямые расположены в различных плоскостях. Это значит, мы предположим, что плоскости II и I , содержащие первая—параллели AA' и CC' , вторая— BB' и CC' , не совпадают. Через точку B проведем плоскости, содержащие



Черт. 284.



Черт. 285.

прямые AA' и CC' . Прямая их пересечения $B\tilde{B}'$, согласно предыдущей теореме, в надлежащей ориентации будет параллельна как $\vec{AA'}$, так и $\vec{CC'}$. Будучи параллельна $\vec{CC'}$, она совпадает с $\vec{BB'}$, ибо через точку B проходит только одна ориентированная прямая, параллельная $\vec{CC'}$; так как она параллельна также прямой $\vec{AA'}$, то прямая $\vec{BB'}$ параллельна $\vec{AA'}$.

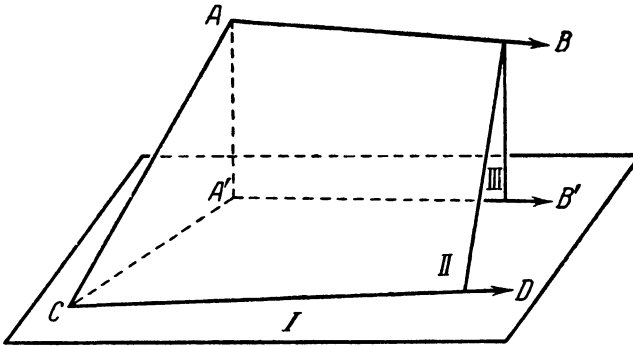
4. Прямая, параллельная плоскости. Ориентированная прямая $\vec{AB}$ называется параллельной данной плоскости, если она параллельна своей проекции $A'B'^1$ на эту плоскость (черт. 285), обра-

¹⁾ Понятие проекции прямой на плоскость явно принадлежит абсолютной геометрии.

щенной в ту же сторону. Прямая, параллельная плоскости, в сторону параллелизма неограниченно приближается к своей проекции на плоскость, а следовательно, и к самой плоскости; в противоположную сторону она от плоскости неограниченно удаляется.

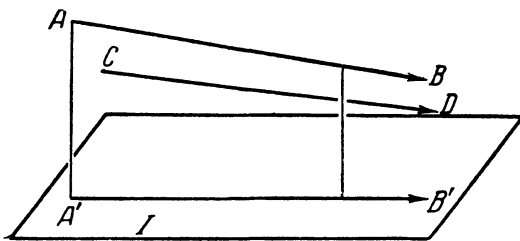
Теорема 3. Прямая, параллельная какой-либо прямой на плоскости, параллельна этой плоскости или лежит в ней.

В самом деле, положим, что ориентированная прямая $\vec{AB}$ параллельна прямой $\vec{CD}$, лежащей на плоскости I (черт. 286); эти две прямые распо-



Черт. 286.

ложены, следовательно, в одной плоскости II ; проекция $\vec{A'B'}$ прямой $\vec{AB}$ на плоскость I лежит с ней в одной плоскости III . Таким образом, прямые $\vec{AB}$, $\vec{A'B'}$, $\vec{CD}$ связаны плоскостями I , II , III и обращены в одну сторону от плоскости $AA'C$. Так как две из них $\vec{AB}$ и $\vec{CD}$ параллельны,



Черт. 287.

то $\vec{AB} \parallel \vec{A'B'}$, т. е. прямая $\vec{AB}$ параллельна плоскости I .

Теорема 4. Если прямая $\vec{AB}$ параллельна плоскости I , то и всякая прямая $\vec{CD}$, параллельная $\vec{AB}$, также параллельна той же плоскости I (черт. 287) или лежит в ней.

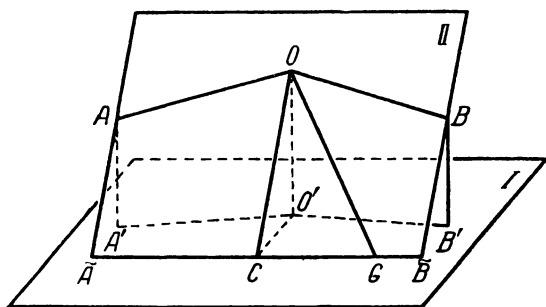
В самом деле, согласно условию, прямая $\vec{AB}$ параллельна своей проекции $\vec{A'B'}$ на плоскость I . Так как $\vec{CD} \parallel \vec{AB}$, то $\vec{CD} \parallel \vec{A'B'}$ (в силу теоремы 2); в силу же предыдущей теоремы отсюда следует, что прямая $\vec{CD}$ параллельна плоскости I или лежит в ней.

5. Конус параллелей. Пусть $\vec{OA}$ —какая-либо ориентированная прямая, параллельная плоскости I , т. е. параллельная своей проекции $\vec{O'A'}$ на эту плоскость (черт. 288). Будем вращать плоскость II , в которой лежит прямая OA и ее проекция $O'A'$, вокруг прямой OO' . Прямая OA будет при этом оставаться параллельной своей проекции на плоскость I , т. е.

пересекают плоскость; прямые, проходящие через точку O и лежащие в промежуточном пространстве, расходятся с нею: каждая прямая, расходящаяся с плоскостью, имеет с нею общий перпендикуляр, от которого она в обе стороны неограниченно удаляется от плоскости.

В евклидовом пространстве конус параллелей вырождается в плоскость.

6. Пересекающиеся плоскости в гиперболическом пространстве. Пусть I и II будут две плоскости в гиперболическом пространстве. Через



Черт. 290.

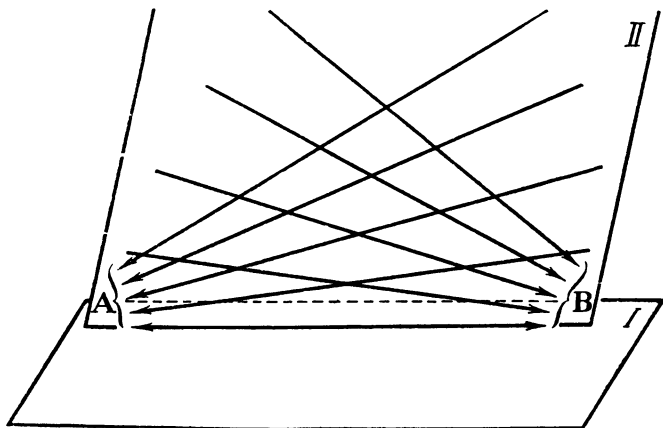
точку O плоскости II проведем конус параллелей к плоскости I (черт. 290)¹⁾. Если плоскость II содержит какую-либо прямую OG , проходящую внутри конуса параллелей, то эта прямая пересекает плоскость I ; вместе с тем плоскость II пересекает плоскость I по некоторой прямой $\tilde{A}\tilde{B}$. В плоскости II через точку O проходят прямые $\vec{OA}$ и $\vec{OB}$, параллель-

ные $\vec{BA}$ и $\vec{AB}$, а потому параллельные плоскости I ; это—образующие конуса параллелей. Плоскость II в этом случае пересекает конус параллелей по двум образующим OA и OB . Пусть $\vec{O'A'}$ и $\vec{O'B'}$ будут проекции прямых $\vec{OA}$ и $\vec{OB}$ на плоскость I ; тогда $\vec{OA} \parallel \vec{O'A'}$, $\vec{OB} \parallel \vec{O'B'}$. Вместе с тем $\vec{O'A'} \parallel \vec{BA}$, $\vec{O'B'} \parallel \vec{AB}$. Если из точки O опустим на $\tilde{A}\tilde{B}$ перпендикуляр OC , то его проекция $O'C$ на плоскость I будет перпендикулярна к $\tilde{A}\tilde{B}$. Прямая OC делит пополам угол AOB , прямая $O'C$ делит пополам угол $A'O'B'$. Прямая $\tilde{A}\tilde{B}$, по которой плоскость II пересекает плоскость I , в одну сторону параллельна одной из двух образующих конуса параллелей, лежащих на плоскости II , а в другую сторону параллельна другой из них. Через точку O в плоскости II в рассматриваемом случае проходят две ориентированные прямые $\vec{OA}$ и $\vec{OB}$, параллельные плоскости I . Но ясно, что в этом случае и через каждую другую точку плоскости II проходят две ориентированные прямые, параллельные плоскости I , именно—прямые, проходящие через эту точку параллельно $\vec{OA}$ и $\vec{OB}$. И обратно, в плоскости I через каждую точку проходят две прямые, параллельные плоскости II . Это положение можно еще охарактеризовать следующим образом.

В плоскости II имеются два пучка параллелей, которые вместе с тем параллельны плоскости I (черт. 291). Оба пучка имеют общую прямую AB в том смысле, что она при обращении в одну сторону принадлежит одному пучку, а при обращении в противоположную сторону—другому пучку. И в то же время на плоскости I имеются два пучка параллелей, которые параллельны плоскости II ; эти два пучка также имеют общую прямую.

¹⁾ Чтобы не усложнять чертежа 290, на нем этот конус не изображен.

Общая прямая пучков плоскости I совпадает в общей прямой пучков плоскости II ; это и есть прямая пересечения обеих плоскостей.

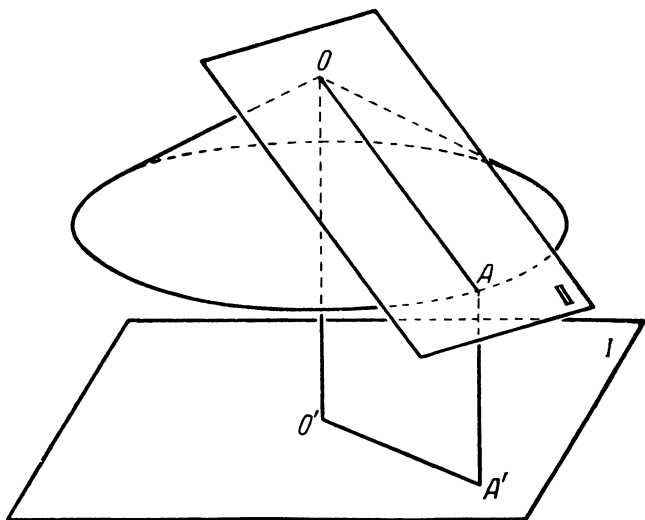


Черт. 291.

Теорема 6а. Если через какую-либо (а следовательно, и через каждую) точку одной плоскости проходят две ориентированные прямые, параллельные другой плоскости, то плоскости пересекаются и прямая их пересечения в одну сторону параллельна одной из таких двух прямых, а в другую сторону параллельна другой из них.

Это вытекает из предыдущего рассуждения.

7. Параллельные плоскости. Положим теперь, что плоскость II в точке O касается конуса параллелей (черт. 292). Через точку O , как и через каждую другую точку плоскости II , в этом случае проходит одна ориентированная прямая, параллельная плоскости I . В этом

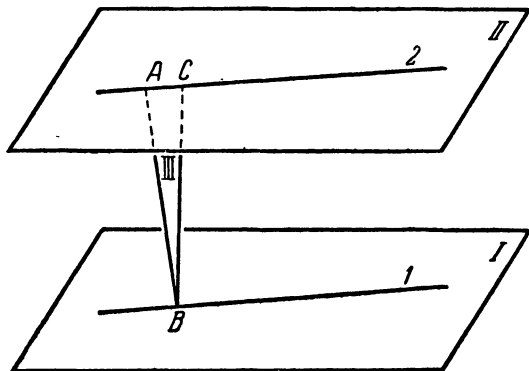


Черт. 292.

случае, плоскости I и II , очевидно, общих точек не имеют, ибо плоскость II лежит над конусом параллелей, а плоскость I лежит под ним; но в направлении этого пучка параллелей плоскость II асимптотически приближается к плоскости I . В этом случае говорят, что плоскость II параллельна плоскости I . Легко себе уяснить, что в этом случае и обратно — плоскость I параллельна плоскости II .

Теорема 6б. Если через каждую точку одной плоскости проходит одна и только одна ориентированная прямая, параллельная другой плоскости, то эти плоскости параллельны. В направлении параллелизма плоскости в этом случае асимптотически приближаются одна к другой, а в противоположном направлении—неограниченно одна от другой удаляются.

8. Расходящиеся плоскости. Положим теперь, что плоскость II в точке O проходит в промежуточном пространстве между двумя полями конуса. Плоскости в этом случае не только не имеют общих точек, но



Черт. 293.

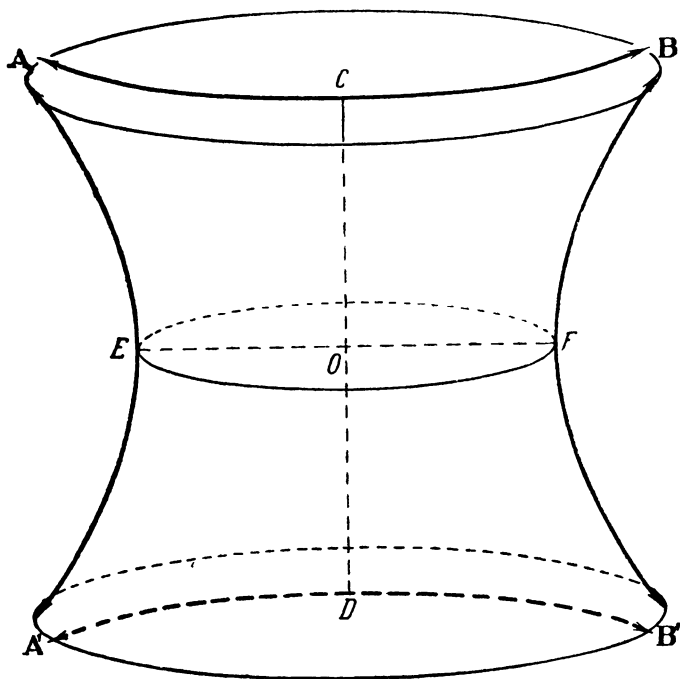
ни одна прямая одной плоскости не параллельна другой плоскости. Если поэтому мы пересечем эти две плоскости третьей, то прямые пересечения необходимо расходятся; тогда говорят, что плоскости расходятся. В этом случае (черт. 293) из произвольной точки A плоскости II опустим перпендикуляр AB на плоскость I . Если бы он случайно оказался перпендикулярным к плоскости II , то служил бы общим их перпендикуляром. Если же он не перпендикулярен

к плоскости II , то мы из точки B опустим перпендикуляр BC на плоскость II . Плоскость III , проходящая через прямые AB и BC , перпендикулярна к обеим плоскостям I и II и пересекает их по расходящимся прямым 1 и 2 . Эти прямые имеют поэтому общий перпендикуляр, который перпендикулярен к плоскостям I и II . Две расходящиеся плоскости, таким образом, всегда имеют общий перпендикуляр, от которого расходятся во все стороны. Другого общего перпендикуляра, очевидно, быть не может.

Теорема 6с. Если на одной из двух плоскостей нет прямых, параллельных другой плоскости, то плоскости расходятся. Это означает, что две прямые, по которым любая третья плоскость их пересекает, расходятся. В этом случае две плоскости имеют общий перпендикуляр, представляющий кратчайшее расстояние между ними; плоскости во все стороны от общего перпендикуляра неограниченно одна от другой удаляются.

Любопытно взглянуть еще ближе в расположение двух расходящихся плоскостей. Пусть AB и $A'B'$ будут две расходящиеся прямые в гиперболической плоскости, CD —их общий перпендикуляр, AA' и BB' —две заградительные прямые (черт. 294), так что образуется так называемый четырехугольник Швейкарта $AA'B'B$ с четырьмя бесконечно удаленными вершинами (см. стр. 179 и 187). Будем его вращать вокруг прямой CD . Прямые AB и $A'B'$ опишут две расходящиеся плоскости (на чертеже они не изображены). Прямые же AA' и BB' опишут своеобразный «цилиндр», образующие которого перпендикулярны к плоскости, описан-

ной общим перпендикуляром EF тех же прямых; радиусы сечений этого цилиндра плоскостями, перпендикулярными к оси CD , неограниченно возрастают в обе стороны. Две расходящиеся плоскости как бы закрывают этот цилиндр сверху и снизу—служат его «основаниями».



Черт. 294.

9. Заключительная теорема абсолютной геометрии. Поставим такую задачу. Через прямую $\vec{OA}$, параллельную плоскости I , требуется провести плоскость II , параллельную плоскости I (черт. 292 на стр. 413). Совершенно ясно, что существует одна и только одна плоскость, удовлетворяющая требованию,—это плоскость, касающаяся конуса параллелей, построенного в какой-либо точке O прямой OA относительно плоскости I , по образующей OA .

Теорема 7. Через прямую, параллельную данной плоскости, всегда проходит одна и только одна плоскость, параллельная данной.

Эта теорема справедлива и в евклидовой геометрии. Через ряд своеобразных предложений мы вновь пришли к теореме абсолютной геометрии, правда, при различном (более общем) понимании параллелизма. Мы увидим ниже, какое важное значение она имеет.

§ 50. СВЯЗКИ ПРЯМЫХ

1. Связки прямых и их классификация. Связкой прямых называется такая совокупность их, каждые две прямые которой лежат в одной плоскости (связаны между собой, см. стр. 407); связка называется *полной*, если через каждую точку пространства проходит прямая связки. В дальнейшем, если не будет оговорено противное, мы

всегда будем иметь в виду полную связку. Теорема 1 рубр. 3 предыдущего параграфа (стр. 407) дает основание для классификации связок. В силу теоремы 1а, если две прямые связки пересекаются, то и все прямые этой связки проходят через точку их пересечения; это — с в я з к а с х о д я щ и х с я п р я м ы х; точка их пересечения называется ц е н т р о м с в я з к и. В силу теоремы 1б, если две прямые связки расходятся, то любые две прямые связки расходятся и притом, как это непосредственно вытекает из доказательства названной теоремы, все прямые связки в этом случае перпендикулярны к одной плоскости — базисной плоскости связки; это — с в я з к а р а с х о д я щ и х с я п р я м ы х. В силу теоремы 1с, если две прямые связки в надлежащей ориентации параллельны, то и каждая прямая этой связки при обращении ее в надлежащую сторону им параллельна; это — с в я з к а п а р а л л е л ь н ы х (о р и е н т и р о в а н н ы х) п р я м ы х.

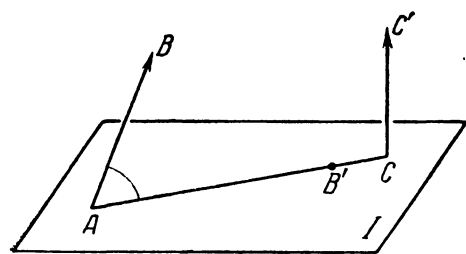
Теорема 1. Прямые связки, расположенные в одной плоскости, образуют в ней пучок; можно сказать: сечение связки прямых плоскостью, проходящей через одну из прямых этой связки, есть пучок прямых.

В самом деле, теорема явно справедлива в отношении связки каждого из трех типов. В случае связки расходящихся прямых базисной прямой пучка служит пересечение базисной плоскости связки с плоскостью, в которой пучок лежит.

В отношении связки параллелей отметим важное предложение:

Теорема 2. Если плоскость пересекает какую-либо прямую, принадлежащую связке параллелей, то в этой связке существует параллель, пересекающая эту плоскость под прямым углом.

В самом деле, положим, что плоскость I пересекает прямую $\vec{AB}$, принадлежащую связке, в точке A (черт. 295); если она при этом перпендикулярна к прямой AB , то утверждение выполняется. Положим по-



Черт. 295.

тому что прямая $\vec{AB}$ не перпендикулярна к плоскости I . В таком случае луч AB образует в точке A со своей проекцией AB' на плоскость острый угол BAB' . На луче AB' отложим соответствующий этому углу отрезок параллельности AC . Тогда перпендикуляр CC' , восставленный в плоскости BAC из точки C к пря-

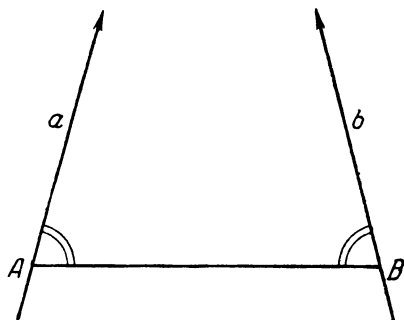
мой AC и обращенный в сторону $\vec{AB}$, будет параллелен лучу AB и будет перпендикулярен к плоскости I . Точку C будем называть центром связки на плоскости I или центральной точкой плоскости относительно связки.

2. Соответственные точки на прямых связки. Совершенно аналогично тому, как были определены соответственные точки на прямых пучка, они определяются в пространстве по отношению к прямым связки. Именно, если в связке прямых из точки A прямой a (черт. 296) проведем секущую равного наклона к прямой b этой связки, то конечная ее точка B называется соответствующей точке A на прямой b связки. Точки A и B явно соответствуют в этом смысле друг другу, и мы будем называть их соответственными.

Теорема 3. а) В связке сходящихся прямых две соответственные точки одинаково удалены от центра связки; б) В связке расходящихся прямых соответственные точки одинаково удалены от базисной плоскости связки.

Доказательство, по существу, не отличается от доказательства соответствующего предложения по отношению к пучку прямых (§ 30, рубр. 2, стр. 241—242). В связи с этим на связку прямых распространяется также теорема о трех секущих равного наклона; это выражается следующей теоремой.

Теорема 4. Если в связке прямых точке A на прямой a соответствует точка B на прямой b , а точке B соответствует точка C на прямой c , то эта последняя (точка C) соответствует на прямой c точке A прямой a .

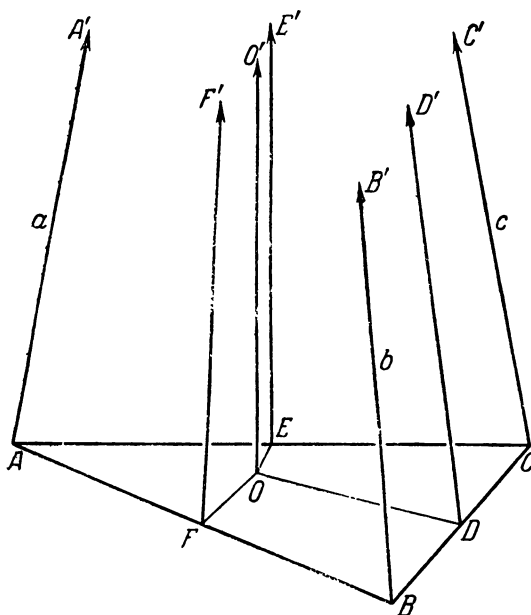


Черт. 296.

В случае связки сходящихся или расходящихся прямых доказательство не отличается от доказательства соответствующей теоремы в применении к пучку прямых (§ 30, рубр. 2, теорема 3, стр. 242). Для случая связки

параллелей Лобачевский дает следующее доказательство¹⁾. Если лучи a, b, c лежат в одной плоскости (черт. 297), то мы имеем дело с частным случаем указанной теоремы § 30; если это не имеет места, то точки A, B, C не лежат на одной прямой. Плоскость ABC пересекает прямые a ($\vec{AA'}$), b ($\vec{BB'}$) и c ($\vec{CC'}$).

Пусть O будет центр связки на плоскости ABC . Перпендикуляр OO' к этой плоскости принадлежит связке, т. е. при обращении в надлежащую сторону ($\vec{OO'}$) параллелен лучам $\vec{AA'}$, $\vec{BB'}$, $\vec{CC'}$. Из точки O опустим перпендикуляры OD, OE, OF , на стороны треугольника ABC . В пересечении плоскостей $O'DO, O'OE, O'OF$ с плоскостями $(bc), (ca), (ab)$ получим прямые $\vec{DD'}, \vec{EE'}, \vec{FF'}$, которые, в



Черт. 297.

силу теоремы 2 § 49 (стр. 408), при обращении в ту же сторону от плоскости ABC , что и $\vec{OO'}$, параллельны $\vec{DD'}, \vec{EE'}, \vec{FF'}$, а потому принадлежат нашей связке, т. е. параллельны прямым $\vec{AA'}, \vec{BB'}, \vec{CC'}$. Вместе с тем ясно, что

¹⁾ «Геометрические исследования», предложение 34.

лучи DO , EO , FO суть проекции на плоскость ABC лучей $\vec{DD'}$, $\vec{EE'}$, $\vec{FF'}$. Вследствие известной теоремы абсолютной геометрии отсюда следует, что эти прямые перпендикулярны сторонам треугольника ABC : именно, $DD' \perp BC$, $EE' \perp CA$, $FF' \perp AB$. Так как $AA' \parallel FF'$ и $FF' \perp AB$, то $\angle A'AF = \Pi(AB)$. По таким же соображениям $\angle B'BF = \Pi(BF)$; а так как эти углы по условию равны (AB есть секущая равного наклона параллелей AA' и BB'), то $AF = BF$, т. е. F есть середина стороны AB треугольника ABC . Таким же образом, основываясь на том, что BC есть секущая равного наклона параллелей BB' и CC' , обнаружим, что $BD = DC$, т. е. D есть середина стороны BC треугольника ABC . Итак, в этом случае перпендикуляры, восстановленные в плоскости треугольника ABC из середин двух его сторон AB и BC , пересекаются в точке O ; три точки A , B , C лежат на окружности, и перпендикуляр, восстановленный в плоскости треугольника из середины E третьей стороны AC , проходит через ту же точку O . Это означает, что точка E есть середина стороны AC того же треугольника. Так как $EE' \parallel AA'$ и $EE' \parallel BB'$ и в то же время $EE' \perp AC$, то $\angle A'AE = \Pi(AE)$, $\angle C'CE = \Pi(CE)$. А так как, с другой стороны, $AE = EC$, то отсюда следует, что $\angle A'AE = \angle C'CE$, т. е. AC есть секущая равного наклона прямых AA' и CC' , как этого требует доказываемая теорема.

Основным моментом доказательства является то, что точки A , B , C расположены на одной окружности. Это есть попутный очень важный результат, которому мы дадим следующее выражение.

Теорема 5. В связке параллелей три точки, которые соответствуют друг другу на трех прямых этой связки, не лежащих в одной плоскости, расположены на одной окружности, центром которой является центр связки на плоскости этих трех точек.

3. Связка прямых как инвариант движения. Если связку, как жестко связанное множество прямых, сместим в пространстве, то она сохранит основной признак, характеризующий это множество как связку. В самом деле, каждая прямая и каждая плоскость при движении переходят соответственно в прямую и в плоскость же; поэтому две прямые, расположенные в одной плоскости, перейдут в прямые, также расположенные в одной плоскости. Связка прямых есть образ, инвариантный относительно движения в пространстве. Совершенно ясно, что при движении сохраняется и тип связки: при движении связки сходящихся прямых центр связки переходит в центр смещенной связки; точно так же при движении связки расходящихся прямых базисная плоскость переходит в базисную плоскость смещенной связки.

Связка сходящихся лучей вполне определяется своим центром; связка расходящихся прямых определяется своей базисной плоскостью. Связка параллельных прямых определяется направлением ее параллелей, т. е. одной ориентированной прямой, которой другие прямые связки параллельны.

4. Поверхности уровня связки. В каждой связке совокупность всех точек, соответствующих друг другу в этой связке, называется *поверхностью уровня связки*. Чтобы получить поверхность уровня связки, достаточно взять какую-либо точку A на одной из прямых связки и из нее провести секущие равного наклона ко всем прямым связки; конечные точки этих секущих, т. е. все точки, соответствующие «началь-

ной точке A » в этой связке, образуют поверхность уровня связки. В силу теоремы 4, любые две точки этой поверхности соответствуют друг другу в этой связке. Мы видим вместе с тем, что любую точку на поверхности уровня связки можно принять за начальную ее точку. Это предложение, по существу представляющее перефразировку теоремы 4, имеет основное значение.

Прямые связки по отношению к поверхности уровня называются осями, причем под осью поверхности уровня всегда разумеют ориентированную прямую. Ось поверхности уровня в некоторой ее точке в связке сходящихся прямых считают обращенной к центру связки, в связке расходящихся лучей—к базисной плоскости связки, в связке параллелей—в сторону параллелизма.

5. Сечение поверхности уровня связки плоскостью, проходящей через ось.

Теорема 6. Сечение поверхности уровня связки плоскостью, проходящей через ось поверхности, есть кривая постоянной кривизны: окружность—в случае связки сходящихся лучей, эквидистанта—в случае расходящихся лучей и предельная линия—в случае связки параллелей.

В самом деле, такое сечение связки плоскостью есть пучок соответствующего типа, а точки на сечении поверхности уровня плоскостью суть соответственные точки этого пучка; они образуют кривую постоянной кривизны.

Отсюда вытекает следующее предложение.

Теорема 7. Ось поверхности есть нормаль к поверхности уровня.

В самом деле, это следует из того, что она служит нормалью каждого проходящего через эту ось плоского сечения.

6. Сферы и эквидистантные поверхности. Совершенно ясно, что поверхность уровня пучка сходящихся прямых есть сфера; основные свойства этой поверхности в гиперболическом пространстве не отличаются от ее свойств в евклидовом пространстве; мы на этом ниже еще остановимся подробнее.

Поверхность уровня связки расходящихся лучей есть эквидистантная поверхность (одна ее полость), т. е. геометрическое место точек, отстоящих на данное расстояние от плоскости по одну ее сторону. В самом деле, если A и B —две точки поверхности уровня пучка расходящихся прямых, A' и B' —их проекции на базисную плоскость, то сечение AB поверхности плоскостью $AA'B'B$ есть эквидистантная линия (одна ее ветвь); $BB'=AA'$, т. е. все точки поверхности отстоят от базисной плоскости на одно и то же расстояние $AA'=h$ (параметр эквидистантной поверхности).

Теорема 8. Эквидистантная поверхность может быть рассматриваема как поверхность вращения вокруг любой оси, причем меридианом служит эквидистантная линия.

В самом деле, вращая эквидистанту AB (черт. 298) вокруг ее оси AA' , мы явно получим поверхность, все точки которой отстоят от базисной плоскости на одно и то же расстояние $AA'=h$, т. е. получим эквидистантную поверхность. При этом эквидистантную поверхность можно рассма-

тривать как поверхность, образованную вращением произвольной эквидистанты, полученной сечением поверхности плоскостью, проходящей через некоторую ось поверхности (см. теорему 6), вокруг этой оси. Отсюда следует, что плоскость, перпендикулярная к оси во внутренней ее точке (т. е. лежащей между поверхностью и базисной плоскостью), пересекает поверхность по окружности.

Этому результату можно дать следующее более общее выражение.

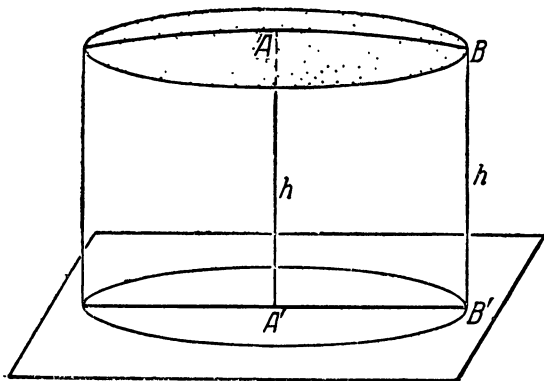
Теорема 8а. Плоскость, которая расходитя с базисной плоскостью эквидистантной поверхности, не пересекает этой поверхности, если кратчайшее расстояние между ней и базисной плоскостью превышает

параметр поверхности h , касается ее, если это расстояние равно h , пересекает ее по окружности, если это расстояние меньше h . (Предполагается, конечно, что плоскость расположена по ту же сторону от базисной плоскости, что и поверхность.)

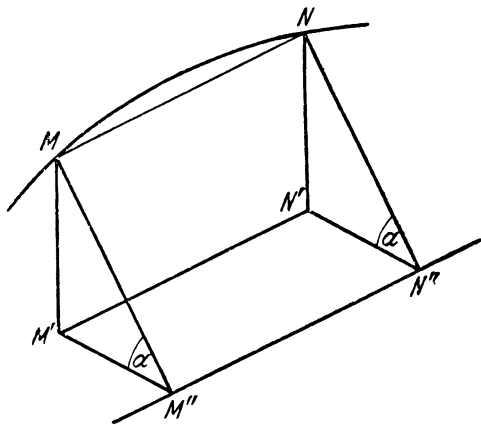
Развитием этого служат следующие два предложения.

Теорема 8б. Сечение эквидистантной поверхности плоскостью, пересекающей ее базисную плоскость, есть эквидистанта, имеющая своей базой линию пересечения этих плоскостей; параметр этой эквидистанты совпадает с параметром поверхности, если секущая плоскость проходит через ось поверхности; если же секущая плоскость не проходит через ось поверхности, то параметр сечения тем больше, чем больше угол, который она составляет с осью поверхности.

Случай, когда секущая плоскость проходит через ось поверхности, уже рассмотрен в начале рубрики; она в этом случае перпендикулярна к базисной плоскости (черт. 298). Положим поэтому, что секущая плоскость, не проходящая через ось поверхности, пересекает базисную плоскость по прямой $M''N''$, образуя с нею угол α (черт. 299). Проектируя точку M сечения как на базисную плоскость, так и на прямую $M''N''$, получаем прямоугольный треугольник $MM'M''$, в котором длина катета MM' совпадает с параметром поверхности, а противолежащий острый угол равен α ; длина гипотенузы



Черт. 298.



Черт. 299.

и BQQ' в грани IV_q , как мы видели, равны; обозначим их цифрой 4. Так как $PP'Q'Q$ есть четырехугольник Саккери, то углы $P'PQ$ и $Q'QP$ в плоскости III также равны, мы обозначим их цифрой 3. Наконец, относительно углов APQ и BQP в плоскости II мы еще не знаем, равны ли они; доказать, что они равны—составляет нашу задачу; мы обозначим эти углы через 2_p и 2_q . Итак, трехгранные углы имеют плоские углы при вершине P —3, 4, 2_p , при вершине Q —3, 4, 2_q . Двугранные углы при ребрах PA и QB прямые, при ребрах же PQ и QP —это один и тот же угол, образуемый плоскостями II и III ; обозначим его через W . Если теперь рассмотрим сферические треугольники, которые гранями этих трехгранных углов вырезаются на единичных сферах, описанных из их вершин, то они имеют равные гипотенузы (3), равные катеты (4) и одинаковые углы против катета (4). Так как дуги 3 и 4 каждая меньше четверти окружности, то дуги 2_p и 2_q равны. Это значит, PQ есть секущая равного наклона прямых $\vec{PA}$ и $\vec{QB}$; иначе говоря, P и Q суть соответственные точки на прямых PA и QB . Точки сечения PQ попарно соответствуют друг другу в пучке L , т. е. это сечение есть предельная линия, осями которой служат параллели пучка L .

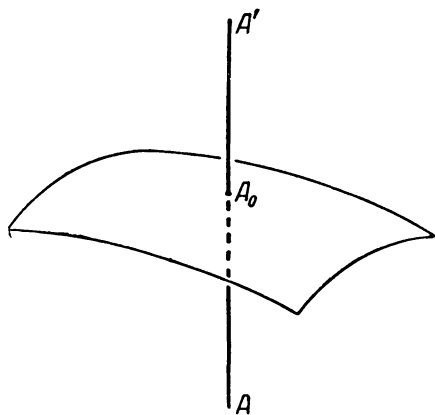
Иногда эквидистантную поверхность считают состоящей из двух пол, которые расположены по обе стороны базисной плоскости. Связанные с этим модификации в выражениях предыдущих теорем не затруднят читателя.

7. Предельная поверхность. Поверхность уровня связки параллелей называется предельной поверхностью. Соответственно тому для построения предельной поверхности нужно на одной из параллелей связки взять произвольную точку A («начальная точка» построения) и из нее провести секущие равного наклона ко всем другим прямым связки; геометрическое место концов этих секущих (включая и точку A) составит предельную поверхность. Сообразно этому (рубр. 4), предельная

поверхность вполне определяется одной из своих осей и точкой на ней (как иногда говорят, началом и начальной осью); можно ее, очевидно, задать также началом и какой-либо осью, так как через начало достаточно будет провести параллель к данной оси, чтобы получить начальную ось. Это все является лишь применением к связке параллелей и ее поверхностям уровня общих соображений, изложенных в рубрике 4 (стр. 418—419). Выделим одно относящееся сюда предложение ввиду основного его значения.

Теорема 9. Предельная поверхность определяется одной своей точкой и осью (направлением оси).

Каждая ось пересекает предельную поверхность в одной точке и в этой точке служит нормалью к поверхности (теорема 7). Через точку A пространства проведем ось предельной поверхности, которая встретит ее в точке A_0 (черт. 301). Если точка A расположена на этой оси относительно A_0 в сторону ее ориентации, т. е. луч A_0A обращен в ту же сторону,



Черт. 301.

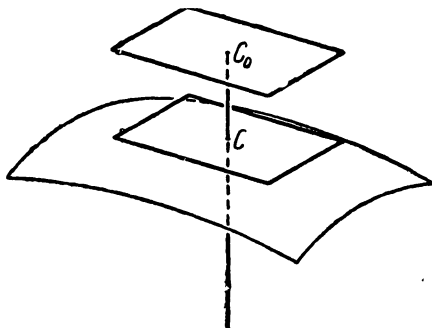
что и ось (как на чертеже), то говорят, что точка A лежит с внутренней стороны предельной поверхности; если же точка A' расположена относительно A_0 с противоположной стороны, т. е. луч A_0A' обращен в сторону, противоположную направлению оси, то говорят, что она расположена с внешней стороны предельной поверхности.

Теорема 10. Плоскость, проходящая через ось предельной поверхности, пересекает ее по предельной линии.

В самом деле, оси предельной линии, лежащие в секущей плоскости, образуют в ней пучок параллелей; точки сечения попарно соответствуют друг другу на лучах этого пучка.

На каждой плоскости, не проходящей через ось предельной поверхности, всегда существует центральная точка, в которой проходящая через эту точку ось перпендикулярна к этой плоскости.

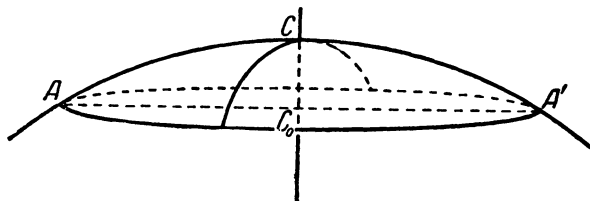
Теорема 11. Если плоскость не проходит через ось предельной поверхности, а центральная ее точка относительно связки осей лежит вне поверхности, то она не встречается поверхности; если центральная точка лежит на поверхности, то плоскость касается поверхности в этой точке; если центральная точка лежит внутри поверхности, то плоскость пересекает предельную поверхность по окружности, центр которой совпадает с центральной точкой плоскости относительно связки.



Черт. 302.

В случае, когда центральная точка плоскости лежит на поверхности, плоскость служит касательной к поверхности, так как ось есть нормаль к поверхности (теорема 7), все остальные точки плоскости лежат вне поверхности. Сама плоскость может быть рассматриваема как геометрическое место касательных к предельным линиям, проходящим через эту точку. Если центральная точка плоскости C_0 лежит вне поверхности (черт. 302), мы проведем через нее ось, которая встретит поверхность в некоторой точке C . Плоскость, перпендикулярная к оси в точке C , служит касательной плоскостью к поверхности; данная же плоскость лежит «выше» нее, а потому не встретит поверхности.

Если центральная точка плоскости лежит внутри поверхности, то плоскость будет пересекать поверхность; в самом деле, каждая плоскость



Черт. 303.

кость ACC_0 , проходящая через центральную ось поверхности CC_0 (черт. 303), пересечет поверхность по предельной линии ACA' , а данную плоскость — по прямой, перпендикулярной к оси, во внутренней ее точке; эта прямая пересечет предельную линию (§ 32, теорема 5с, стр. 250) в двух

точках A и A' , а вместе с тем и плоскость, в которой она лежит, пересекает предельную поверхность. Точки сечения, согласно теореме 5 (стр. 418), лежат на одной окружности, центром которой служит центральная точка секущей плоскости.

Отсюда следует, что каждая плоскость, перпендикулярная к оси поверхности во внутренней точке, пересекает поверхность по окружности. Следовательно, предельную поверхность можно рассматривать как поверхность вращения предельной линии вокруг любой ее оси. Таким образом, поверхности уровня любой связки суть поверхности вращения, причем за ось вращения можно принять любую ось поверхности.

Наконец, отметим, что предельная поверхность может быть рассматриваема как предельная форма сферы при неограниченном возрастании ее радиуса совершенно так же, как предельную линию можно рассматривать как предельную форму окружности. В этом понимании говорят также, что на предельную поверхность можно смотреть как на сферу с бесконечно удаленным центром или как на сферу с бесконечно большим радиусом. Лобачевский иногда называет предельную поверхность предельной сферой, или орисферой. Не нужно, однако, этой точке зрения придавать большего значения, чем она имеет; при исследовании предельной поверхности нужно всегда исходить из точного ее определения.

§ 51. ПОВЕРХНОСТИ, ДОПУСКАЮЩИЕ СВОБОДНОЕ ДВИЖЕНИЕ В СЕБЕ, И ИХ ГЕОМЕТРИИ

1. Поверхности, допускающие свободное движение в себе. Под движением поверхности в себе мы разумеем такое ее перемещение, при котором все точки поверхности приходят в совпадение с точками этой же поверхности: поверхность остается «совмещенной с самой собой». Такое движение может совершать плоскость; такое движение поверхности в самой себе происходит при вращении сферы вокруг центра, при повороте любой поверхности вращения вокруг оси. Плоскость может совершать движение в себе таким образом, что любая точка может быть приведена в любую другую точку, и любой, выходящий из этой точки в этой плоскости луч, может быть вращением вокруг этой точки совмещен с любым другим лучом, выходящим из той же точки. Совершенно так же сфера допускает такое движение в себе, при котором любая ее точка может быть совмещена с любой другой заданной на ней точкой, а вращением вокруг этой точки, как полюса, любой меридиан может быть совмещен с любым другим меридианом, проходящим через эту же точку. Можно сказать, что плоскость и сфера допускают такое движение в себе, при котором любая точка и выходящее из нее направление могут быть совмещены с любой другой точкой и любым, выходящим из этой точки направлением; по выполнению же этих совмещений ни одна точка не допускает смещения¹⁾. Если на поверхности возможны движения в себе, удовлетворяющие этим требованиям, то говорят, что эта поверхность допускает свободное движение в себе. Такое свободное движение в себе, как уже указано, допускают плоскость и сфера; но поверхность вращения, на которой движение в себе возможно, все-

¹⁾ Гельмгольц [184] это формулирует так: любая точка может быть совмещена с любой другой точкой, и вращением вокруг точки любой линейный элемент, выходящий из этой точки, может быть совмещен с любым другим линейным элементом, выходящим из той же точки; по выполнении этих совмещений дальнейшее движение невозможно.

таки свободного движения в указанном значении этого термина вообще не допускает.

В евклидовом пространстве свободное движение в себе допускают только плоскость и сфера; эти поверхности допускают свободное движение и в гиперболическом пространстве. Легко видеть, однако, что в гиперболическом пространстве такие движения допускают также эквидистантные поверхности и предельная поверхность.

В самом деле, пусть M и N будут две точки на эквидистантной поверхности, M' и N' — их проекции на базисную плоскость. Передвинем базисную плоскость в самой себе так, чтобы точка M' совпала с N' . Если эквидистантную поверхность представим себе жестко связанной со своей базисной плоскостью, то при этом смещении поверхность передвигается в себе, а точка M совпадает с точкой N . Это смещение может сопровождаться вращением эквидистантной поверхности в себе вокруг точки N , так как ее можно рассматривать как поверхность вращения вокруг оси NN' .

Аналогично обстоит дело и с предельной поверхностью. Пусть M и N — две точки на предельной поверхности, $\vec{MM'}$ и $\vec{NN'}$ — выходящие из них оси. Сместим поверхность вместе со связанными с нею осями так, чтобы точка M совпала с точкой N и луч $\vec{MM'}$ совпал с лучом $\vec{NN'}$. Так как предельная поверхность при этом перейдет в предельную же поверхность, а последняя вполне определяется любой своей точкой и проходящей через нее осью, то наша предельная поверхность совместится с самой собой. Это смещение может сопровождаться вращением поверхности в себе вокруг точки N , так как это — поверхность вращения вокруг оси NN' . Предельная поверхность допускает свободное движение в себе.

Однако проведенное по отношению к предельной поверхности рассуждение допускает существенное обобщение. Мы рассматривали две точки M и N и оси $\vec{MM'}$ и $\vec{NN'}$ одной и той же предельной поверхности. Рассмотрим теперь две различные предельные поверхности, из которых одна определяется точкой M и осью $\vec{MM'}$, другая — точкой N и осью $\vec{NN'}$. Совершенно так же, как мы это делали выше, переместим первую поверхность так, чтобы точка M совпала с точкой N , а луч $\vec{MM'}$ — с лучом $\vec{NN'}$. По тем же соображениям, первая предельная поверхность при этом совместится со второй; мы приходим, таким образом, к следующему важному предложению.

Теорема 1. Все предельные поверхности конгруэнтны между собой.

2. Установление всех поверхностей гиперболического пространства, допускающих свободное движение в себе. Из предыдущего видно, что поверхности уровня связок всех трех типов допускают свободное движение в себе. Установлено таким образом, что в гиперболическом пространстве существуют три типа поверхностей, допускающих свободное движение: сферы, предельные поверхности (орисферы) и эквидистантные поверхности; к числу последних естественно отнести и плоскости, как эквидистантные поверхности с нулевым параметром. Исчерпаны ли этим все поверхности, допускающие свободное движение в себе? Утвердительный ответ на этот вопрос дают следующие соображения.

По самому определению свободного движения в себе, всякая поверхность, которая такие движения допускает, может быть рассматриваема как поверхность, образуемая вращением вокруг любой ее точки O .

любой кривой, проходящей на поверхности через эту точку. Если выберем такую «образующую» кривую, то при ее вращении касательная к ней в точке O совершает вращение в касательной плоскости к поверхности в той же точке O . Это значит, поверхность этого типа может быть рассматриваема как поверхность вращения вокруг любой своей нормали. Мы можем поэтому говорить о меридиане этой поверхности вращения в точке O ; постараемся выяснить, какая кривая может служить таким меридианом.

Пусть A будет произвольная точка такой поверхности, α —проходящий через нее полный меридиан (то-есть два меридиана, составляющие продолжение один другого), a —плоскость этого меридиана. Пусть A' будет произвольная другая точка того же меридиана. Выполним движение поверхности в себе, которое приводит точку A в A' . Положим, что плоскость меридиана a при этом перейдет в плоскость a' . Теперь произведем вращение поверхности вокруг нормали в точке A' , которое совместит плоскость a' с плоскостью a . Меридиан α после этих движений совместится с линией пересечения той же поверхности с плоскостью a , т. е. с тем же меридианом α . В результате обоих движений плоскость a совместится с самой собой, кривая α также совместится с самой собой, но точка A перейдет в A' . Может еще понадобиться поворот на 180° вокруг точки A' , чтобы меридиан при совмещении сохранил сторону, в которую он обращен. Так как A' есть произвольная точка кривой α , то α есть плоская кривая, которая может скользить по самой себе,—кривая постоянной кривизны.

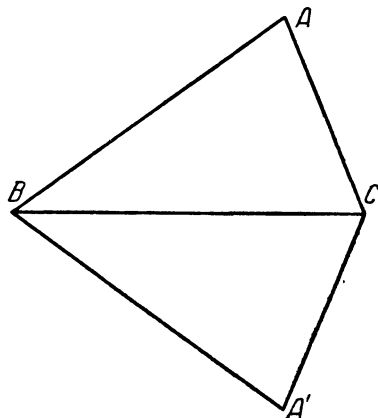
Итак, всякая поверхность, допускающая свободное движение в себе, может быть рассматриваема как поверхность вращения вокруг любой своей нормали; меридианом такой поверхности служит кривая постоянной кривизны. Так как такая поверхность может быть смещена в себе так, чтобы любая ее точка A совместилась с любой другой точкой A' , и меридиан α при этом совместился с меридианом α' , то меридианы, соответствующие различным точкам, конгруэнтны. Трем типам плоских кривых постоянной кривизны в гиперболическом пространстве соответствуют три типа поверхностей, допускающих свободное движение: если меридианом служит окружность, то соответствующая поверхность есть сфера; если меридианом служит эквидистанта, то соответствующая поверхность есть эквидистантная поверхность (в частном случае—плоскость); если меридианом служит предельная линия, то соответствующая поверхность есть предельная поверхность—орисфера.

Теорема 2. В гиперболическом пространстве свободное движение в себе допускает только поверхность уровня связки того или другого типа: сфера, эквидистантная поверхность и предельная поверхность (орисфера).

3. Внутренняя геометрия поверхности. Под внутренней геометрией поверхности разумеют совокупность тех свойств ее образов, которые устанавливаются средствами самой поверхности,—для доказательства которых, следовательно, нет необходимости пользоваться соображениями, относящимися к образам, лежащим в пространстве—вне поверхности. К числу средств, которыми пользуются при построении внутренней геометрии поверхности, относится движение поверхности в себе. По существу, первые шесть книг «Начал» Евклида представляют внутреннюю геометрию плоскости; так называемая планиметрия, как ее теперь понимают, и есть внутренняя геометрия плоскости.

Здесь, впрочем, нужно сделать оговорку. Предложение 4-е I книги «Начал» (стр. 48—49) имеет основное значение; между тем оно доказывается средствами, которые нельзя назвать внутренними. Теорема эта, как мы знаем, заключается в следующем: если в треугольниках ABC и $A'B'C'$ стороны AB и $A'B'$, BC и $B'C'$ соответственно равны ($AB=A'B'$, $BC=B'C'$) и содержащиеся между ними углы также равны ($\angle ABC=\angle A'B'C'$), то и третьи стороны равны ($AC=A'C'$) и равным сторонам противолежат равные углы ($\angle BCA=\angle B'C'A'$, $\angle BAC=\angle B'A'C'$). Для доказательства этого предложения Евклид накладывает треугольник $A'B'C'$ на треугольник ABC так, чтобы равные стороны BA и $B'A'$, BC и $B'C'$ соответственно совместились. Однако это движение не всегда

возможно выполнить движением плоскости в себе. Так, если треугольники имеют расположение, указанное на чертеже 304, т. е. если они расположены симметрично относительно одной из равных сторон (на нашем чертеже—относительно BC), то такое совмещение, оставаясь внутри плоскости, выполнить невозможно. Для выполнения такого наложения нужно опрокинуть один из треугольников относительно BC или, соответственно, $B'C'$, т. е. нужно вывести треугольник из плоскости, в которой он лежит. Вообще, симметричные фигуры в плоскости не могут быть совмещены внутренним движением. Однако такое рассуждение, выводящее фигуру из плоскости, Евклид в своих планиметрических книгах проводит только



Черт. 304.

один раз. Его можно обойти, если принять содержание предложения I.4 за постулат (изъять его из числа предложений и включить в число постулатов), так это и делает Гильберт [99]. Мы будем называть такой постулат в применении к рассматриваемому случаю **п о с т у л а т о м с и м м е т р и и**. На тех особенностях, которые отличают симметрию от конгруэнтности, мы остановимся подробнее во втором томе настоящего сочинения. Не желая здесь отвлекать читателя от основной мысли, мы будем считать, что этот вопрос обойден, скажем, введением дополнительного постулата. Планиметрию Евклида при этих условиях можно считать внутренней геометрией плоскости.

В том же смысле и с теми же оговорками можно говорить о внутренней геометрии сферы—таковую, если не совсем выдержанную, строил еще Менелай в I столетии до н. э.

В построении внутренней геометрии плоскости и сферы движения поверхности в себе играют основную роль. Правда, как было указано в своем месте (§ 4, рубр. 3, стр. 49), Евклид прибегает к движению только два раза. Но, установив при помощи движения возможность отложить данный отрезок на любом луче и построить данный угол при данном луче, Евклид, как и последующие геометры, пользуется этим многократно: для сравнения двух отрезков нужно произвести такое отложение одного отрезка на другом; при нахождении отношения двух отрезков (точного или приближенного) нужно такое отложение произвести несколько раз; то же нужно выполнить при сравнении углов и во многих других случаях. Это делается так при построении как плоской геометрии, так и сферической. Исходя из этого, авторы первой четверти прошлого столетия

считали, что внутреннюю геометрию допускают только поверхности двух типов—плоскости и сферы (конечно, евклидова пространства,—другой геометрии не существовало). В настоящее время эта точка зрения оставлена¹⁾. Но здесь мы еще будем ее придерживаться. Соответственно этому мы будем говорить о внутренней геометрии тех поверхностей, которые допускают свободное внутреннее движение (движение в себе). В евклидовом пространстве к этой категории поверхностей принадлежат только сфера и плоскость; в гиперболическом пространстве к ним присоединяются еще отличные от них эквидистантные и предельные поверхности.

4. Внутренняя геометрия сферы. Внутренняя геометрия сферы в евклидовом пространстве существенно отличается от геометрии плоскости. Внутренняя геометрия всякой поверхности, допускающей свободное движение в себе, разворачивается, как геометрия плоскости, из определенных исходных понятий и положений. Исходными понятиями в геометрии плоскости служат точки и прямые. На сфере роль прямых линий играют окружности больших кругов, как обыкновенно говорят короче—большие круги (геодезические линии поверхности). Соответственно этому, аксиоматика геометрии на сфере («сферической геометрии») существенно отличается от аксиоматики планиметрии. Две различные прямые на плоскости либо вовсе не имеют общих точек, либо имеют одну и только одну общую точку; на сфере два больших круга всегда пересекаются в двух точках (противоположные точки сферы); параллельных линий в евклидовом значении слова, таким образом, на сфере вовсе не существует. Прямолинейный отрезок на плоскости допускает неограниченное продолжение в обе стороны без возвращения в точку исхода; продолжение отрезка большого круга всегда приводит в точку исхода. Большой круг имеет ограниченную длину и притом общую для всех больших кругов. Не входя здесь в разбор того, в какой мере эти положения необходимы и достаточны (в качестве исходных положений) для построения геометрии сферы, отметим только, что они создают уже глубокое отличие от геометрии плоскости. В частности, сумма углов в сферическом треугольнике всегда больше $2d$; это хорошо известно.

В гиперболическом пространстве плоскость несет на себе неевклидову геометрию Лобачевского. Но нетрудно себе уяснить, что в гиперболическом пространстве большие круги на сфере обладают теми же основными свойствами, что и в евклидовом пространстве. Геометрия сферы в гиперболическом пространстве развивается из тех же основных посылок, что и на плоскости,—это та же сферическая геометрия. Мы еще приведем соображение, углубляющее это утверждение (см. об этом § 54, рубр. 4, стр. 446—447, а также во втором томе настоящего сочинения).

5. Внутренняя геометрия эквидистантной поверхности в гиперболическом пространстве. Постулаты абсолютной геометрии. Обращаясь теперь к эквидистантной поверхности в гиперболическом пространстве, будем строить ее геометрию, заменяя на ней прямые линии геодезическими эквидистантами (стр. 421). Выясним, в какой мере геометрия эквидистантной поверхности отличается от геометрии гиперболической плоскости. Прежде всего покажем, что в этой геометрии выполняются основные положения геометрии гиперболической плоскости. Начнем с первых четырех постулатов Евклида (стр. 43).

¹⁾ Ее недостаточность будет выяснена во втором томе настоящего сочинения.

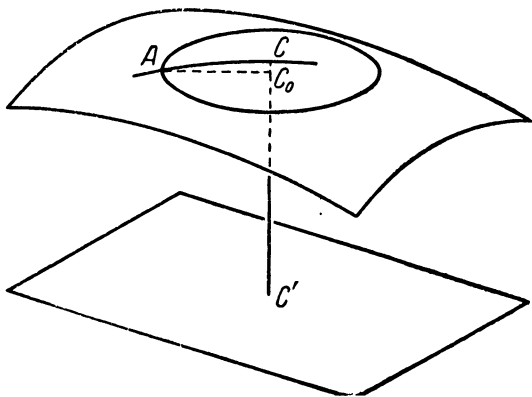
1. Через две точки эквидистантной поверхности проходит одна и только одна геодезическая эквидистантная линия (I постулат Евклида).

Это есть линия пересечения поверхности плоскостью, которая проходит через перпендикуляры, опущенные из данных двух точек на базисную плоскость. Это совпадает с первым постулатом Евклида, в котором прямые линии заменены геодезическими эквидистантами.

2. Дугу геодезической эквидистанты на эквидистантной поверхности можно неограниченно продолжать в обе стороны, не возвращаясь в точку исхода (II постулат Евклида).

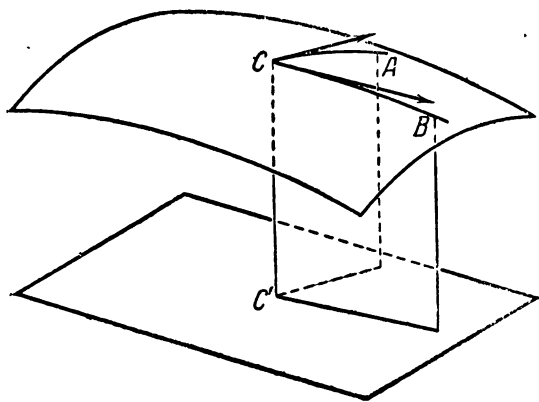
3. Вокруг каждой точки на эквидистантной поверхности можно провести окружность любым радиусом (III постулат Евклида).

В самом деле, проведя через точку C (черт. 305) ось CC' и любую геодезическую эквидистанту, откладываем на последней произвольную дугу CA . Так как поверхность может быть получена вращением эквидистанты CA вокруг оси CC' , то точка A при этом опишет на поверхности окружность с геодезическим радиусом CA . Можно было бы сказать проще: на каждом эквидистантном



Черт. 305.

луче, выходящем из точки C , отложим дугу, равную CA ; геометрическое место точек A и составит требуемую окружность. Но геодезическая окружность на эквидистантной поверхности есть в то же время плоская окружность в гиперболическом пространстве, которому поверхность принадлежит. CA есть геодезический радиус этой окружности, AC_0 —перпендикуляр, опущенный из точки A на ось CC' , есть ее прямолинейный радиус.



Черт. 306.

4. Все прямые углы на эквидистантной поверхности равны (IV постулат Евклида).

Заметим, что угол между двумя лучами CA и CB эквидистантной поверхности—между двумя направлениями—определяется двугранным углом, грани которого проходят через эти направления (через эти эквидистантные лучи), а ребром служит ось, проходящая через вершину угла C . В самом деле (черт. 306), угол между двумя кривыми на поверхности (в данном случае между двумя геодезическими эквидистантами) естественно определяется здесь как угол между касательными к ним в точке пересечения; так как эти касательные лежат в касательной плоскости,

то они образуют линейный угол двугранного угла, составляемого при ребре CC' плоскостями ACC' и BCC' ; этим линейным углом и измеряется двугранный угол, о котором идет речь. Таким образом, каждому прямому углу между двумя линиями на эквидистантной поверхности соответствует прямой двугранный угол в пространстве, а так как все двугранные прямые углы имеют прямые линейные углы, а поэтому равны между собой, то и прямые углы на поверхности равны между собой. Четвертый постулат Евклида, как мы указывали в своем месте, нельзя считать необходимым, но он во всяком случае на эквидистантной поверхности осуществляется.

Обращаясь к постулату Архимеда (стр. 96), мы явно видим, что он на эквидистантной поверхности также оправдывается: откладывая равные отрезки на базисной прямой, мы получим соответствующие им равные отрезки на эквидистантной линии; их проекции превзойдут любой прямолинейный отрезок, а вместе с тем дуги эквидистанты превзойдут всякий отрезок (всякую дугу) эквидистанты.

Более того, эквидистантная линия, построенная в непрерывном гиперболическом пространстве, также непрерывна. В самом деле, если мы три точки геодезической эквидистантной линии A, B, C спроектируем на базу, то точке B , лежащей между точками A и C , всегда соответствует точка B' , лежащая между точками A' и C' . В этом смысле можно сказать, что точки на эквидистантной линии расположены так же, как их проекции на базу. Точки эквидистанты образуют упорядоченное множество. Каждому дедекиндову сечению на эквидистанте соответствует дедекиндово сечение на базе; точке, производящей это сечение на базе, соответствует на эквидистанте точка, производящая на ней рассматриваемое дедекиндово сечение. Постулат о непрерывности действует на эквидистантной поверхности, если она принадлежит непрерывному гиперболическому пространству.

Постулаты, указанные позже Пашем, в частности постулат о секущей прямой, здесь также выполняются, в чем легко убеждаемся, проектируя эквидистантный треугольник и секущую эквидистанту на базисную плоскость.

Что касается движений, возможных на эквидистантной поверхности, то мы уже знаем, что эта поверхность допускает свободное движение, как и плоскость; говорят, что на эквидистантной поверхности имеют место те же движения, что и на плоскости—евклидовой или гиперболической.

Это можно усмотреть и непосредственно, сличая движения на поверхности с теми движениями на базисной плоскости, которые с ними связаны; мы это и делали выше, когда устанавливали, что эквидистантная поверхность допускает свободное движение в себе.

Если говорить о постулате о конгруэнтности треугольников (постулат симметрии), то и он оправдывается на эквидистантной поверхности. В самом деле, если имеем два эквидистантных треугольника (т. е. составленных на эквидистантной поверхности из дуг геодезических эквидистант) ABC и $A_1B_1C_1$, в которых равны две стороны и углы между ними заключенные, то их проекции на базисную плоскость $A'B'C'$ и $A_1B_1C_1$ также будут сохранять те же соотношения между сторонами и углами ($A'B' = A_1B_1$, $B'C' = B_1C_1$, $\angle B' = \angle B_1'$). Следовательно, в базисных треугольниках будут равны и третьи стороны $B'C' = B_1C_1$, и против равных сторон будут лежать равные углы ($\angle A' = \angle A_1'$, $\angle C' = \angle C_1'$). Те же соотношения будут, следовательно, иметь место и на эквидистантной поверхности в треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$.

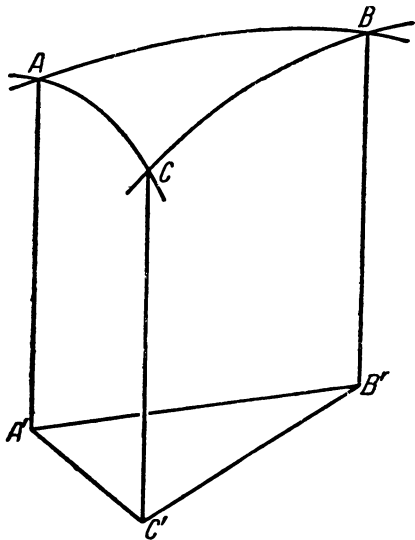
Из изложенного следует, что на эквидистантной поверхности выполняются все постулаты абсолютной геометрии плоскости (если прямые заменены геодезическими эквидистантами).

6. Внутренняя геометрия эквидистантной поверхности; постулат о параллельных линиях. Остается рассмотреть, как во внутренней геометрии эквидистантной поверхности обстоит дело с постулатом о параллельных линиях. Если точка C лежит на эквидистантной поверхности вне геодезической эквидистанты AB , а CD —проходящая через эту точку эквидистанта, то CD пересекает AB в том и только в том случае, если ее проекция $C'D'$ на базисную плоскость пересекает проекцию $A'B'$ эквидистанты AB . Так как в гиперболической плоскости через точку C' , лежащую вне прямой $A'B'$, проходит пучок прямых, не встречающихся $A'B'$, то то же имеет место на эквидистантной поверхности, т. е. через точку C проходит на ней пучок геодезических эквидистант, не встречающихся AB .

Таким образом, в гиперболическом пространстве на эквидистантной поверхности относительно пересечения эквидистант действует не постулат Евклида, а постулат Лобачевского. Отсюда прямой вывод: в гиперболическом пространстве внутренняя геометрия эквидистантной поверхности совпадает с неевклидовой геометрией Лобачевского.

7. Сумма углов в геодезическом треугольнике эквидистантной поверхности. Из того, что на эквидистантной поверхности действует гиперболическая геометрия, следует, что сумма внутренних углов в эквидистантном треугольнике, т. е. в треугольнике, составленном на эквидистантной поверхности из дуг геодезических эквидистант, меньше $2d$. Можно было бы идти обратным путем: установив, что на эквидистантной поверхности остаются в силе постулаты абсолютной геометрии, если прямые заменены геодезическими эквидистантами, можно непосредственно доказать, что в эквидистантном треугольнике сумма углов меньше $2d$; отсюда последует вывод, что на эквидистантной поверхности действует гиперболическая геометрия. Это непосредственное доказательство теоремы о сумме углов эквидистантного треугольника действительно выполняется очень просто.

В самом деле, углы A, B, C на эквидистантной поверхности (черт. 307) измеряются двугранными углами при ребрах AA', BB', CC' ; эти последние, в свою очередь, измеряются своими линейными углами, за которые можно принять углы A', B', C' на базисной плоскости; а так как $A' + B' + C' < 2d$, то и $A + B + C < 2d$.

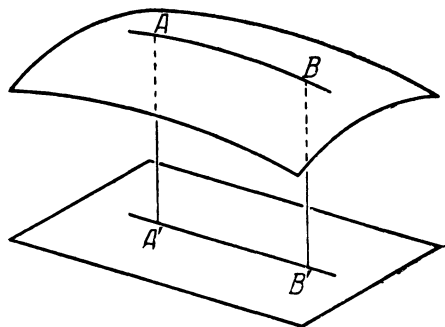


Черт. 307.

8. Геодезические линии эквидистантной поверхности. Эквидистанты на эквидистантной поверхности, которые получаются пересечением ее плоскостями, перпендикулярными к базе, мы назвали геодези-

ческими эквидистантами. Это находит себе оправдание в том, что эти эквидистанты действительно представляют собой геодезические линии поверхности. Мы здесь не будем останавливаться на общем, точном определении геодезической линии, а будем под геодезическими разумеать просто кратчайшие линии поверхности (каковыми геодезические линии эквидистантной поверхности действительно являются).

Отношение длины кривой эквидистантной поверхности к длине ее проекции на базисную плоскость есть для каждой эквидистантной поверхности постоянная, зависящая только от параметра поверхности $\varphi(h)$ (§ 31, рубр. 4, стр. 247). Проекция геодезической эквидистанты AB на базисную плоскость есть прямая линия $A'B'$ —кратчайшая линия между двумя точками на плоскости (черт. 308). Следовательно,



Черт. 308.

AB есть кратчайшая линия между двумя точками поверхности. Для отчетливого выяснения свойств этих линий проведем доказательство. Прежде всего заметим, что теорема I.20 «Начал» Евклида—сумма двух сторон треугольника больше третьей—здесь доказывается совершенно так же, как на плоскости с заменой прямолинейных сторон геодезическими эквидистантами. Вслед за этим доказывается совершенно так же, что эквидистанта

(геодезическая), проходящая между двумя точками поверхности, короче ломаной, проходящей между теми же точками, составленной из геодезических эквидистант. Если теперь между точками A и B поверхности проходит геодезическая эквидистанта AB и какая угодно другая кривая A_1B_1 , то мы в последнюю впишем ломаную с эквидистантными звеньями. Эта ломаная больше AB и возрастает, когда мы увеличиваем число ее сторон, деля каждую дугу, стягиваемую звеном ломаной, на части. Если число сторон ломаной неограниченно увеличивается, а стороны ее неограниченно уменьшаются, то длина ломаной в случае спрямляемой кривой стремится к определенному пределу, который и представляет собой длину AB . Во внутренней геометрии поверхности это можно рассматривать как определение длины кривой; если рассматривать поверхность и кривую на ней как погруженные в гиперболическое пространство, то одновременно с эквидистантной ломаной через те же вершины можно в данную кривую вписать ломаную с прямолинейными сторонами. С увеличением числа сторон, как указано выше, обе ломаные стремятся к общему пределу, который и служит длиной кривой и превышает длину дуги AB эквидистанты.

В результате мы можем формулировать прежний вывод следующим образом.

Теорема. Внутренняя геометрия эквидистантной поверхности в гиперболическом пространстве совпадает с геометрией гиперболической плоскости, если прямые заменить геодезическими линиями поверхности (геодезическими эквидистантами).

В полном соответствии с этим находится и то обстоятельство, что в гиперболическом пространстве мы включили плоскость в число эквидистантных поверхностей.

9. Гиперболическая постоянная эквидистантной поверхности. Поскольку на эквидистантной поверхности имеет место гиперболическая геометрия, на ней существуют свойственные ей предельные линии. Пусть AB и CD будут две параллельные предельные линии эквидистантной поверхности, заключенные между теми же (геодезическими) осями AC и BD (черт. 309). Предельные линии на эквидистантной поверхности пересекают ортогонально пучок параллельных геодезических эквидистант. Их проекции на базисную плоскость пересекают ортогонально пучок параллельных прямых — представляют собой предельные линии на плоскости. Если обозначим через x общую длину дуг AC и BD , через x' — длину их проекций $A'C'$ и $B'D'$, то

$$x = x' \varphi(h), \quad (1)$$

где h — параметр поверхности, а $\varphi(h)$ — функция, введенная в § 31, формула (1), стр. 247 и установленная в рубрике 2 § 39 [формулы (XXXVI₁) и (XXXVI₂) на стр. 312]; она выражает отношение длины любой кривой на эквидистантной поверхности к длине ее проекции на базисную плоскость; она равна

$$\frac{1}{\sin \Pi(h)} = \operatorname{ch} \frac{h}{k}, \text{ где } k \text{ — гиперболическая постоянная плоскости.}$$

С другой стороны, если дуга $C'D'$ расположена от $A'B'$ со стороны параллелизма, то [формула (XIV), стр. 280]

$$A'B' = C'D' \cdot e^{\frac{x'}{k}}.$$

Вместе с тем

$$AB = A'B' \cdot \varphi(h), \quad CD = C'D' \cdot \varphi(h).$$

Предыдущее равенство поэтому дает: $AB = CD \cdot e^{\frac{x'}{k}}$. Но вследствие соотношения (1) это равенство можно написать в виде:

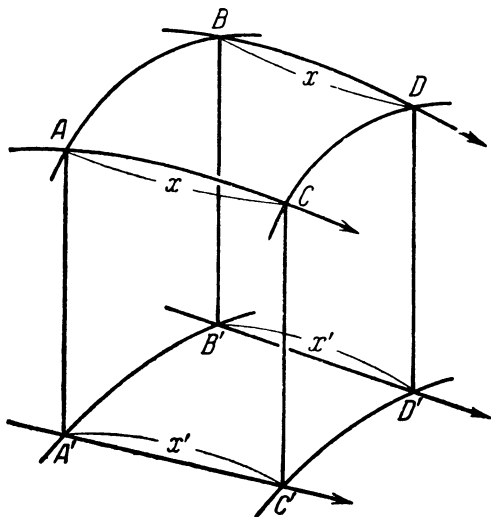
$$AB = CD \cdot e^{\frac{x}{k\varphi(h)}},$$

т. е.

$$AB : CD = e^{\frac{x}{k_h}}, \text{ где } k_h = k \varphi(h). \quad (2)$$

Постоянную k_h называют гиперболической постоянной эквидистантной поверхности. Существование такой постоянной естественно было предвидеть, поскольку эквидистантная поверхность несет на себе гиперболическую геометрию; это есть метрическое соотношение вида (XIV) (стр. 280) на поверхности. Соотношение (2) устанавливает зависимость между гиперболической постоянной эквидистантной поверхности параметра h и гиперболической постоянной плоскости.

Итак, из поверхностей, допускающих свободное движение, сферы несут на себе специфическую сферическую геометрию, притом одну



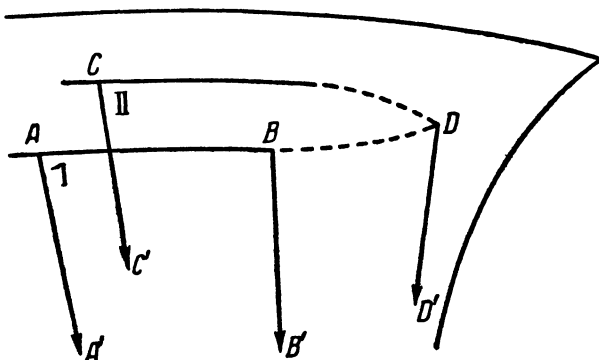
Черт. 309.

и ту же как в евклидовом, так и в гиперболическом пространстве. Эквидистантные поверхности в гиперболическом пространстве несут на себе геометрию гиперболической плоскости. Какова геометрия предельной поверхности? Этому важному вопросу мы посвятим отдельный параграф.

§ 52. ВНУТРЕННЯЯ ГЕОМЕТРИЯ ПРЕДЕЛЬНОЙ ПОВЕРХНОСТИ.

1. Евклидова геометрия на предельной поверхности. Имея в виду построить в гиперболическом пространстве внутреннюю геометрию предельной поверхности в сопоставлении с геометрией плоскости, заменим на ней прямые предельными линиями; это имеет то основание, что предельные линии, как мы в этом сейчас убедимся, являются геодезическими

линиями этой поверхности. Легко убедиться, что при этих условиях все постулаты абсолютной геометрии плоскости оправдываются. Так, через две точки поверхности проходит одна и только одна предельная линия; в самом деле, предельная линия, проходящая через две точки поверхности, есть пересечение поверхности с плоскостью, проходящей через оси этих точек. Ду-



Черт. 310.

га предельной линии может быть неограниченно продолжена в обе стороны без возвращения в ту же точку. Вообще, рассуждения, которыми устанавливается, что на предельной поверхности, где роль прямых играют предельные линии, осуществляются постулаты абсолютной геометрии, в такой мере мало отличаются от соответствующих рассуждений, относящихся к эквидистанте, что мы не будем их здесь приводить: они не могут затруднить читателя.

Заметим, что из этого вытекает справедливость высказанного выше утверждения: предельная линия есть геодезическая линия предельной поверхности. В самом деле, теорема, утверждающая, что прямая, проходящая на плоскости между двумя точками, короче всякой другой (спрямляемой) кривой, проходящей между теми же точками, принадлежит абсолютной геометрии; доказательство ее на предельной поверхности проводится совершенно аналогично тому, как это было сделано по отношению к прямой на плоскости и по отношению к эквидистанте на эквидистантной поверхности (§ 51, в рубр. 7, стр. 432). Заметим, что в гиперболическом пространстве, как и в евклидовом, геодезическая линия всякой поверхности характеризуется тем, что в каждой ее точке главная нормаль направлена по нормали к поверхности; этим свойством обладают как геодезические эквидистанты на эквидистантной поверхности, так и предельные линии на предельной поверхности.

Выясним теперь, как обстоит дело с постулатом о параллельных линиях на предельной поверхности. С этой целью поставим вопрос следующим образом. На предельной поверхности в гиперболическом пространстве проходит предельная линия AB ; точка C лежит на поверхности вне AB (черт. 310). Спрашивается, можно ли через точку C про-

вести на этой поверхности предельную линию, не встречающую AB , и если можно, то сколько возможно провести таких не встречающих AB предельных линий?

Чтобы на этот вопрос ответить, заметим, что всякая предельная линия, проходящая на нашей поверхности через точку C , получается пересечением поверхности плоскостью, проходящей через ось CC' точки C . Пусть I будет плоскость осей AA' и BB' , т. е. предельной линии AB , а II — плоскость другой предельной линии, проходящей через точку C ; ось CC' параллельна плоскости I . Расходятся плоскости I и II не могут, потому что в каждой из них есть прямые, параллельные другой плоскости — оси поверхности. Если эти плоскости пересекаются, то прямая их пересечения есть ось поверхности (§ 49, теорема 2, стр. 408), точка ее пересечения D с поверхностью служит точкой пересечения обеих предельных линий. Таким образом, предельная линия, проходящая через точку C , не встречает предельной AB в том и только в том случае, если ее плоскость II параллельна плоскости I . Вместе с тем, чтобы найти на поверхности предельную линию, проходящую через точку C и не встречающую AB , нужно через прямую CC' , параллельную плоскости I , провести плоскость II , параллельную плоскости I ; она и дает в пересечении с поверхностью предельную линию, не встречающую предельной линии AB .

Но в гиперболическом пространстве через прямую, параллельную плоскости II , проходит одна и только одна плоскость, параллельная плоскости II (§ 49, рубр. 9, стр. 415). Следовательно, в гиперболическом пространстве на предельной поверхности через точку C , лежащую вне предельной линии AB той же поверхности, проходит одна и только одна предельная линия, не встречающая AB .

Полученный результат, в связи с тем, что на предельной поверхности оправдываются все постулаты абсолютной геометрии плоскости, устанавливает следующее предложение основного значения.

Теорема 1. В гиперболическом пространстве на предельной поверхности имеет место геометрия евклидовой плоскости, если прямые заменить геодезическими линиями поверхности (ее предельными линиями).

Таким образом, при отказе от постулата Евклида, геометрия евклидовой плоскости сохраняет свое существование; она переносится на другую поверхность — на орисферу.

Открытие этой теоремы составило поворотный момент, приведший к построению полнокровной неевклидовой геометрии. Исходя из этого предложения, Лобачевский развернул метрику гиперболической плоскости и гиперболического пространства.

Конечно, это утверждение было бы вполне обоснованным только в том случае, если бы оно опиралось на строго установленную аксиоматику евклидовой плоскости. Не владея еще таковой, Лобачевский, конечно, отдал некоторую дань интуиции. Принимая здесь это утверждение до установления точной аксиоматики, мы, конечно, следуем тому же пути. Но два связанных с этим замечания будет уместно сделать.

Во-первых, возвращаясь к этому вопросу в отделе, посвященном аксиоматике, уже немного придется прибавить к тому, что изложено выше. Во-вторых, если читатель захочет непосредственно развешивать геометрию предельной поверхности, то он убедится, что для этого потре-

буется не больше наглядных представлений, чем при обычном построении геометрии евклидовой плоскости. Повидимому, так и делал Лобачевский; один из шагов в этом направлении изложен в следующей рубрике.

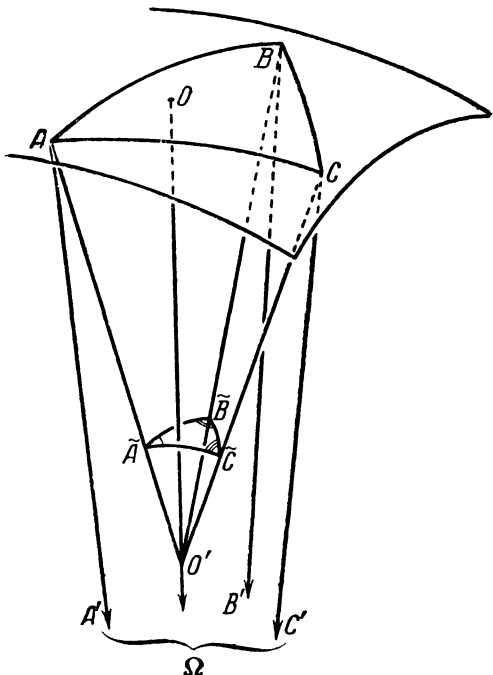
2. Сумма углов геодезического треугольника на предельной поверхности. Поскольку на предельной поверхности действует евклидова геометрия, сумма внутренних углов в треугольнике, составленном из двух геодезических (предельных) линий, равна $2d$. Обратно, установив, что все постулаты абсолютной геометрии остаются в силе на предельной поверхности, можно непосредственно доказать, что сумма углов предельного треугольника равна $2d$; этим будет также установлено, что

предельная поверхность несет на себе евклидову геометрию. Повидимому, именно этим последним путем Лобачевский пришел к этому важному предложению. Мы вкратце изложим рассуждения, которые Лобачевского к этому привели.

Угол между двумя предельными линиями на предельной поверхности можно измерять двугранным углом между их плоскостями, потому что касательные к этим предельным линиям в точке их пересечения образуют линейный угол этого двугранного угла. Сообразно этому Лобачевский дает теореме о сумме внутренних углов предельного треугольника следующее выражение ¹⁾.

Теорема 2. Если три плоскости пересекаются попарно по параллельным линиям, то сумма трех двугранных углов, которые при этом образуются, равна двум прямым.

Если ABC есть геодезический треугольник на предельной поверхности (черт. 311), то плоскости предельных линий AB , BC и CA именно и составляют триэдр, о котором говорит Лобачевский. Двугранные углы этого триэдра измеряют углы этого треугольника. Внутри треугольника ABC выберем произвольную точку O и из нее проведем луч OO' , параллельный осям AA' , BB' , CC' (этот луч представляет собой также ось поверхности). На этом луче возьмем произвольную точку O' , к ней проведем лучи из вершин A , B , C рассматриваемого на предельной поверхности геодезического треугольника. Получаем два триэдра: один — исходный с бесконечно удаленной вершиной Ω , внутренние двугранные углы которого численно совпадают с углами A , B , C треугольника, другой — с вершиной в точке O' и ребрами $O'A$, $O'B$, $O'C$. Внутренние углы этого последнего триэдра обозначим через $\tilde{A}$, $\tilde{B}$, $\tilde{C}$. Если из точки O' , как из центра, опишем сферу радиусом, равным единице, то грани этого



Черт. 311.

¹⁾ «Геометрические исследования», предложение 28.

триэдра вырежут на ней сферический треугольник $\tilde{A}\tilde{B}\tilde{C}$, углы которого имеют численные значения $\tilde{A}$, $\tilde{B}$, $\tilde{C}$. Площадь δ этого сферического треугольника, как известно, выражается угловым избытком

$$\delta = \tilde{A} + \tilde{B} + \tilde{C} - \pi. \quad (1)$$

Если теперь станем отодвигать точку O' по лучу OO' , неограниченно удаляя ее от точки O , то плоские углы триэдра O' , а вместе с ними и стороны сферического треугольника будут стремиться к нулю; вместе с тем к нулю будет стремиться и площадь этого треугольника δ . Лучи AO' , BO' , CO' будут стремиться стать параллельными лучами AA' , BB' , CC' , т. е. будут стремиться к ребрам исходного триэдра AA' , BB' , CC' , углы $\tilde{A}$, $\tilde{B}$, $\tilde{C}$ будут стремиться к A , B , C . Из равенства (1) поэтому следует, что в пределе

$$\tilde{A} + \tilde{B} + \tilde{C} = A + B + C = \pi. \quad (2)$$

Чтобы это доказательство было безукоризненным, необходимы еще уточнения. Нужно установить, что углы $\tilde{A}$, $\tilde{B}$, $\tilde{C}$ стремятся к A , B , C ; Лобачевский в «Геометрических исследованиях» это выполняет (предложение 28). Мы не будем в это входить, так как теорема уже строго доказана в предыдущей рубрике. Но мы изложили здесь эти соображения, так как именно они по свойственной им наглядности в той или иной модификации, повидимому, привели Лобачевского к основной теореме предыдущей рубрики.

3. Гиперболическая постоянная пространства. Итак, три типа поверхностей, допускающих свободное движение в себе, несут на себе три типа двумерной геометрии: сферы несут на себе своеобразную «сферическую» геометрию, одинаковую как в евклидовом, так и гиперболическом пространстве; эквидистантные поверхности в гиперболическом пространстве несут на себе геометрию гиперболической плоскости, а предельные поверхности несут на себе геометрию евклидовой плоскости. Последнее обстоятельство имеет то особенно важное значение, что евклидова планиметрия предельной поверхности получает применение в дальнейшем построении гиперболической геометрии, более того — может служить основным средством всего построения.

Следующие соображения вновь приводят к некоторой постоянной, свойственной гиперболическому пространству. На предельной поверхности возьмем произвольную точку A , через нее проведем предельную линию и на последней возьмем произвольную точку B (черт. 312). Через эту точку B проведем плоскость, перпендикулярную к оси AA' ; эта плоскость пересекает поверхность по окружности, центр которой лежит в точке C пересечения плоскости с осью AA' поверхности. Плоскость предельной линии AB будем обозначать цифрой I , секущую же перпендикулярную к ней плоскость — цифрой II . Эти плоскости пересекаются по прямой CB ; ось поверхности BB' , будучи параллельной оси AA' , лежит в плоскости I .

В плоскости II через точку B проведем касательную BD к окружности C ; ясно, что она будет перпендикулярна к плоскости I . Через точку C проведем луч CG , параллельный касательной BD ; он будет, конечно, расположен в плоскости II . Теперь возникают новые две плоскости: одна определяется прямыми CG и CA' , — мы обозначим ее цифрой III , другая определяется прямыми BD и BB' , — мы ее обозначим цифрой IV . Легко видеть, что эти плоскости пересекаются; в самом деле,

ческого пространства или гиперболической постоянной пространства. Численное значение этой постоянной дуги естественно зависит от выбора единицы меры; в большинстве своих сочинений Лобачевский принимает длину этой дуги за единицу меры; это упрощает некоторые формулы, но часто скрадывает роль этой постоянной. Мы не будем фиксировать единицы меры и будем обозначать численное значение гиперболической постоянной через x . Эту постоянную дугу или определенную ее часть можно принять за единицу меры; это дает возможность установить в гиперболическом пространстве так называемую «абсолютную единицу длины», т. е. единицу, определяемую геометрически, а не эталоном. В § 35, рубр. 1 (стр. 280) мы пришли к постоянной, которую называли гиперболической постоянной плоскости и обозначали через k . Затем (стр. 284) было обнаружено, что k есть длина предельной дуги, совпадающей с BM на чертеже 313:

$$k = x. \quad (\text{XCIII})$$

§ 53. ПРАВИЛЬНЫЕ МНОГОГРАННИКИ В ГИПЕРБОЛИЧЕСКОМ ПРОСТРАНСТВЕ

1. Теорема Эйлера. Уже в своем учебнике «Геометрия» (1823 г. ^[68]) Лобачевский в IV главе помещает известную теорему Эйлера, устанавливающую соотношение между числом граней (n) правильного многогранника, числом сторон (m) каждой грани и числом граней (t), сходящихся при каждой вершине. Это соотношение он пишет в форме

$$n = \frac{4t}{2m - (m - 2)t}. \quad (1)$$

То обстоятельство, что это предложение помещено в начале учебника, естественно объясняется тем, что его доказательство требует очень мало подготовительных средств и во всяком случае не зависит от постулата Евклида. К этому соотношению Лобачевский возвращается также в ст. 71 «Новых Начал» и излагает его раньше условий равенства треугольников. Оно, конечно, принадлежит абсолютной геометрии.

Вопрос о существовании и числе правильных многогранников Лобачевский решает, основываясь на теореме Эйлера. В самом деле, как m , так и t не могут быть меньше 3. Если поэтому положим $m = 3 + p$, то $p \geq 0$, и формула (1) примет вид: $n = \frac{4t}{6 - t - (t - 2)p}$. Отсюда видно, что t должно быть меньше 6. Но и m должно быть меньше 6; в самом деле, если $m = 6 - q$, то равенство (1) примет вид

$$n = \frac{4t}{12 - 4t + q(t - 2)}.$$

Так как в знаменателе при $t \geq 3$ разность $12 - 4t$ не может быть положительной, то q должно быть больше нуля. Возможны поэтому только пять комбинаций, при которых n получает положительное значение: $m = 3$, $t = 3$, $n = 4$ (тетраэдр); $m = 3$, $t = 4$, $n = 8$ (октаэдр); $m = 3$, $t = 5$, $n = 20$ (икосаэдр); $m = 4$, $t = 3$, $n = 6$ («куб» или гексаэдр); $m = 5$, $t = 3$, $n = 12$ (додекаэдр) ¹⁾. Другие комбинации, удовлетворяющие неравенствам $m < 6$ и $t < 6$ (например $m = 4$ и $t = 3$) дают по теореме Эйлера отрицательные значения n , а потому не могут иметь места. В гипербо-

¹⁾ Заметим, что гексаэдр — правильный шестигранник — в гиперболическом пространстве существенно отличается от евклидова куба.

лическом пространстве, таким образом, существуют те же пять типов правильных многогранников, что и в евклидовом. Но в то время, как в евклидовой геометрии все правильные многогранники одного типа подобны, в гиперболической геометрии это, конечно, не имеет места.

2. Оси правильного многогранника. Перпендикуляры, восставленные к граням правильного многогранника из их центров, пересекаются в одной точке — в центре описанной сферы. Каждый правильный многогранник вписан в сферу. Лучи, идущие из вершин правильного многогранника к его центру, называют осями многогранника. Можно определить оси многогранника, не пользуясь его центром; именно, можно определить ось многогранника, как луч, который выходит из вершины многогранника и образует равные углы со всеми ребрами, выходящими из той же вершины; вращением многогранника вокруг оси можно каждую его грань последовательно привести в совмещение со всеми другими гранями, примыкающими к той же вершине.

При этом определении осей многогранника можно сказать, что все оси правильного многогранника образуют связку сходящихся лучей. Ось многогранника перпендикулярна к касательной плоскости описанной сферы в соответствующей вершине. Еще иначе, описанная сфера сечет ортогонально все оси правильного многогранника.

Комментируя эти рассуждения Лобачевского в своем переводе «Новых начал геометрии» на немецкий язык, Энгель пришел к мысли, что в гиперболическом пространстве возможны правильные многогранники, оси которых образуют связку параллелей или расходящихся прямых. Конечно, в том понимании правильного многогранника, из которого исходил Лобачевский, т. е. в предположении конечного числа граней, это не может иметь места, потому что таких многогранников имеется только пять типов, как и в евклидовом пространстве. Но если допустить существование правильных многогранников с бесконечным числом граней, то положение меняется, — в гиперболической геометрии возникают другие типы правильных многогранников.

Если оси правильного многогранника образуют связку параллелей, то его можно рассматривать, как вписанный в предельную поверхность; если оси образуют расходящуюся связку, то многогранник можно рассматривать как вписанный в эквидистантную поверхность. Такие правильные многогранники действительно существуют.

3. Правильные многогранники, вписанные в предельную поверхность. Обращаясь к этим правильным многогранникам, заметим, что вершины всякого правильного геодезического многоугольника на предельной поверхности лежат в одной плоскости. В самом деле, вершины такого многоугольника на предельной поверхности, как и на евклидовой плоскости лежат на геодезической окружности (описанной около многоугольника), а такая окружность всегда совпадает с окружностью плоского круга.

Как известно, евклидова плоскость может быть разбита на конгруэнтные правильные многоугольники тремя основными способами — на правильные треугольники, квадраты и шестиугольники. Так как предельная поверхность несет на себе евклидову геометрию, то и она может быть разбита на конгруэнтные правильные (геодезические) треугольники, квадраты и шестиугольники. Вершины каждого такого правильного многоугольника лежат в одной плоскости и могут быть рассматриваемы, как вершины плоского правильного многоугольника.

Эти многоугольники при каждом разбиении конгруэнтны; каждый из них образует со смежным многоугольником тот же двугранный угол. Они образуют правильный многогранник с бесконечно большим числом граней. Осями такого многогранника служат оси предельной поверхности; многогранник вписан в эту предельную поверхность.

В гиперболическом пространстве, таким образом, существуют три типа правильных многогранников с бесконечным числом граней, вписанных в предельную поверхность. Однако существует бесконечное число различных правильных многогранников каждого типа, потому что каждому разбиению евклидовой плоскости (или предельной поверхности в гиперболическом пространстве) на правильные многоугольники соответствует бесчисленное множество разбиений на подобные им многоугольники.

4. Правильные многогранники, вписанные в эквидистантную поверхность. На эквидистантной поверхности вершины правильного геодезического многоугольника также лежат в одной плоскости, как и в случае предельной поверхности; это доказывается теми же соображениями. Если эквидистантная поверхность разбита на правильные геодезические многоугольники, то, проектируя их на базисную плоскость, мы разобьем последнюю на правильные прямолинейные многоугольники. И обратно, если разобьем базисную плоскость на правильные многоугольники, то этому будет соответствовать разбиение эквидистантной поверхности на правильные геодезические многоугольники. Если попрежнему обозначим через m число сторон такого многоугольника, через S — сумму его углов, то, с одной стороны, $S < (m-2)\pi$, а с другой стороны, каждый внутренний угол многоугольника равен $S:m$. Если осуществлено разбиение плоскости на такие правильные многоугольники и число многоугольников, сходящихся у каждой вершины попрежнему обозначим через t , то $tS = 2m\pi$; поэтому $t(m-2) > 2m$. Обратно, если возьмем два целых числа m и t , удовлетворяющих этому неравенству, то можно построить правильные многоугольники, воспроизводящие такое разбиение плоскости. В самом деле, не трудно видеть, что существует правильный многоугольник с m сторонами, в котором угол при вершине равен $\frac{S}{m}$, где $S = \frac{2m\pi}{t}$; действительно, этот угол будет равен $\frac{2\pi}{t} < \frac{\pi(m-2)}{m} < \pi$. Задача сведется к построению прямоугольного треугольника (в котором гипотенузу служит радиус описанной, а одним из катетов — радиус вписанной окружности) с острыми углами $\frac{\pi}{m}$ и $\frac{S}{2m} < \frac{\pi}{2} \cdot \frac{m-2}{m}$, сумма которых меньше $\frac{\pi}{2}$; треугольник этим вполне определяется, а вместе с тем вполне определяется и правильный многоугольник. Соединяя при каждой вершине t таких многоугольников, мы с их помощью произведем разбиение плоскости на правильные многоугольники. Этому разбиению будет соответствовать разбиение эквидистантной поверхности на правильные геодезические многоугольники, а вместе с тем этому разбиению будет отвечать правильный многогранник, вписанный в данную эквидистантную поверхность. Совокупность многогранников, вписанных в данную эквидистантную поверхность, зависит от двух целочисленных параметров. Самых эквидистантных поверхностей, отличающихся одна от другой значением параметра, существует ∞^1 . Следовательно, правильных многогранников, вписанных в эквидистантные поверхности в гиперболическом пространстве, существует ∞^3 .

§ 54. ТРИГОНОМЕТРИЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ПРОСТРАНСТВА

1. Основные метрические соотношения в гиперболическом пространстве. Основные две теоремы о сохранении евклидовой геометрии на предельной поверхности и о существовании гиперболической постоянной служат базой, на которой может быть построена вся метрика гиперболического пространства, прежде всего его тригонометрия. Этому именно пути, в общем, следовал Лобачевский в своих работах. Стереометрия гиперболического пространства установлена в §§ 49—53 настоящей главы совершенно независимо от метрических соотношений, которые были выведены выше средствами планиметрии.

Нижеследующие рассуждения поэтому устанавливают метрические соотношения, действующие в гиперболическом пространстве, в том числе гиперболическую тригонометрию, заново. Мы их приводим, чтобы отчетливо выяснить два пути, которые к этой метрике ведут: стереометрический, которым шел Лобачевский, и планиметрический, который был установлен после него.

На предельной поверхности вместе с евклидовой геометрией, естественно, сохраняется и евклидова тригонометрия.

Тригонометрические функции могут быть определены на предельной поверхности так же, как они в евклидовом пространстве определяются на плоскости. Это определение развивается далее и приводит к тем бесконечным рядам, которыми тригонометрические функции определяются через аргумент. Этими рядами тригонометрические функции устанавливаются независимо от геометрии, как это уже указывалось выше в § 48. Имея это в виду, возвратимся к чертежу 312 на странице 438; геодезический треугольник ABM , который мы рассматриваем на предельной поверхности, имеет прямой угол при вершине B и катет $BM = x$. Поскольку на предельной поверхности имеет место евклидова тригонометрия,

$$AB = BM \operatorname{ctg} A, \quad (1)$$

где A есть угол BAM . Но этот угол измеряется двугранным углом между плоскостями $I(BAC)$ и $III(MAC)$; этот же угол, в свою очередь, измеряется своим линейным углом BCG . Но этот последний угол явно равен $\Pi(h)$, где h есть отрезок BC . Если длину предельной дуги AB обозначим через s , то равенство (1) примет вид

$$s = x \operatorname{ctg} \Pi(h) = k \operatorname{ctg} \Pi(h). \quad (\text{XCIV})$$

Так как h явно есть высота предельной дуги $AB = s$, то это равенство выражает длину предельной дуги через ее высоту.

Заменяя в этой формуле, согласно (XXII₁) (стр. 294) $\operatorname{ctg} \Pi(h)$ через $\operatorname{sh} \frac{h}{k}$, получаем снова $s = k \operatorname{sh} \frac{h}{k}$ в полном согласии с формулой (XVI₁) (стр. 284).

Выражение длины предельной дуги через ее хорду выводится непосредственно из предыдущей формулы (XCIV) и, конечно, совпадает с (XVI₁) (стр. 284). Наконец, окружность C , которую мы получили как пересечение плоскости, проходящей через точку C , перпендикулярно к оси AA' , с предельной поверхностью, может быть рассматриваема либо как окружность на плоскости с прямолинейным радиусом h , либо как окружность на предельной поверхности с геодезическим (предельным) радиусом $AB = s$. На предельной поверхности длина окружности C выражается через геодезический радиус формулой $C = 2\pi s$; если в нее подставим вместо s выражение (XCIV), заменив в нем h через r , чтобы отметить, что мы рассматриваем здесь $CB = h$ как радиус окружности,

получим

$$C = 2\pi k \operatorname{ctg} \Pi(r). \quad (\text{XCV})$$

Это есть выражение длины окружности через ее прямолинейный радиус. Оно, конечно, совпадает с выражением (XXXV) (стр. 310), полученным планиметрическими средствами.

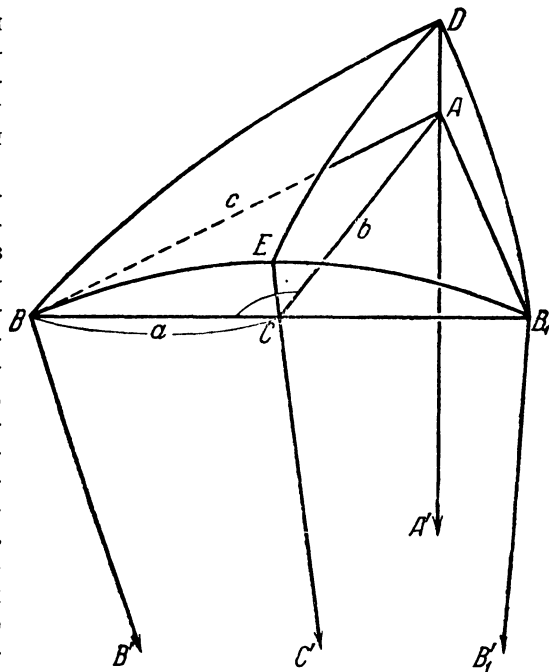
Формулу (XCIV) можно рассматривать как основное метрическое соотношение гиперболического пространства; при его помощи без труда устанавливаются уравнения, связывающие стороны и углы прямолинейного треугольника значительно проще, чем это было сделано в § 36 (стр. 297) планиметрическими средствами.

2. Вывод первой пары уравнений прямоугольного прямолинейного треугольника.

Пусть ABC (черт. 314) будет прямоугольный прямолинейный треугольник с прямым углом при вершине C . На нашем чертеже он изображен в перспективе в горизонтальной плоскости. Из вершины A восставим перпендикуляр AA' к плоскости треугольника и направим его, скажем, вертикально вниз. Построим теперь предельную поверхность, проходящую через точку B и имеющую оси, параллельные AA' ; BB' — ось поверхности, выходящая из точки B . Прямая AA' встречается поверхность в некоторой точке D , лежащей выше A (если бы точка A лежала выше D , то плоскость треугольника не встречала бы поверхности, так как лежала бы над нею). Плоскость параллелей AA' и BB' встречается поверхность по предельной линии BD ; поверхность можно рассматривать как образованную вращением предельной линии BD вокруг оси DAA' . При этом вращении точка B в некоторый момент придет в точку B_1 , симметричную B относительно плоскости CAA' ; дуга DB займет при этом положение DB_1 . Если через точки B и B_1 проведем на поверхности предельную дугу $\widehat{BB_1}$, то плоскость симметрии CAA' расщелет ее пополам в точке E . Предельная линия DE на поверхности будет медианой и высотой равнобедренного геодезического треугольника BDB_1 , так что BDE будет прямоугольный геодезический треугольник с прямым углом при вершине E . Так как на поверхности действует евклидова геометрия, то

$$BE = BD \sin D, \quad (2)$$

где BE и BD — длины соответствующих предельных дуг (катета и гипотенузы геодезического треугольника), D — угол BDE . Этот угол измеряется двугранным углом между плоскостями BDA и EDA или его



Черт. 314.

линейным углом BAC . Если, по обыкновению, стороны и углы прямоугольного треугольника ABC обозначим через a, b, c и A, B , то BAC есть не что иное, как угол A , и вместе с тем в формуле (2) угол D может быть заменен углом A :

$$BE = BD \sin A. \quad (2')$$

Предельная дуга BE составляет половину дуги $\widehat{BB_1}$, которая имеет хорду $BB_1 = 2a$; следовательно, высота дуги BE равна $BC = a$. Поэтому по формуле (XCIV)

$$BE = k \operatorname{ctg} \Pi(a). \quad (3)$$

Что касается предельной дуги BD , то она имеет высотой гипотенузу $BA = c$ исходного треугольника ABC . Поэтому

$$BD = k \operatorname{ctg} \Pi(c). \quad (4)$$

Вставляя выражения (3) и (4) вместо BE и BD в формулу (2'), получим, по сокращении на k , окончательно:

$$\operatorname{ctg} \Pi(a) = \operatorname{ctg} \Pi(c) \sin A. \quad (5)$$

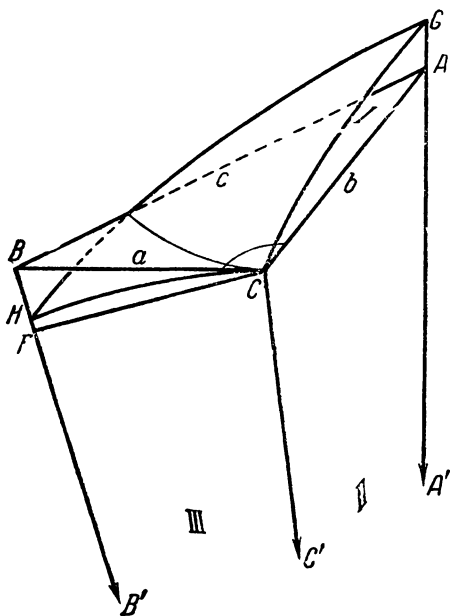
Совершенно ясно, что таким же образом можно вывести уравнение, связывающее катет b , гипотенузу c и угол B :

$$\operatorname{ctg} \Pi(b) = \operatorname{ctg} \Pi(c) \sin B. \quad (6)$$

Мы, таким образом, установили уже этими средствами два уравнения, связывающих в гиперболическом пространстве стороны и углы прямолинейного прямоугольного треугольника. Они совпадают с формулами (XXVI₁) и (XXVI₂) (стр. 297), выведенными планиметрическими средствами.

3. Вывод второй пары уравнений, связывающих стороны и углы прямоугольного треугольника. Чтобы получить третье уравнение, связывающее стороны и углы прямоугольного треугольника, произведем

построение, аналогичное предыдущему. Из вершины A прямоугольного треугольника ABC восставим перпендикуляр AA' к его плоскости и построим предельную поверхность, имеющую этот перпендикуляр AA' своей осью, но на этот раз проходящую через вершину прямого угла C (черт. 315). Плоскость исходного треугольника ABC обозначим цифрой I , плоскости же, проходящие попарно через оси поверхности AA' , BB' и CC' , обозначим последовательно через $II(AA', CC')$, $III(CC', BB')$ и $IV(BB', AA')$, как размечено на чертеже. Эти три плоскости пересекут поверхность по трем предельным дугам CG , CH и HG , образующим геодезический треугольник с прямым углом при вершине C . В самом деле, плоскость II , проходя через прямую AA' , перпендикулярную к плоскости I , сама к этой плоскости перпендикулярна ($II \perp I$); прямая BC , будучи перпендикулярна к линии пересечения AC плоско-



Черт. 315.

стей I и II , перпендикулярна к плоскости II ; поэтому плоскость III , проходящая через прямую BC , перпендикулярна к плоскости II ; это значит, что плоскости II и III образуют при ребре CC' прямой двугранный угол, т. е. в геодезическом треугольнике HCG угол C прямой. Применяя к этому треугольнику уравнение евклидовой тригонометрии, имеем:

$$CH = CG \operatorname{tg} G.$$

Но угол G измеряется углом A исходного прямолинейного треугольника ABC , так что

$$CH = CG \operatorname{tg} A. \quad (7)$$

Далее, так как CA есть высота предельной дуги CG , то формула (XCIV) дает:

$$CG = k \operatorname{ctg} \Pi(AC) = k \operatorname{ctg} \Pi(b). \quad (8)$$

Чтобы выразить также дугу CH через стороны и углы треугольника ABC , проводим ее высоту CF ; тогда по той же формуле (XCIV):

$$CH = k \operatorname{ctg} \Pi(CF). \quad (9)$$

Но из прямоугольного треугольника BFC по формуле (5) имеем:

$$\operatorname{ctg} \Pi(CF) = \operatorname{ctg} \Pi(BC) \sin CBF. \quad (10)$$

Вместе с тем, с одной стороны, BC есть катет a треугольника ABC ; с другой же стороны, так как $BC \perp CC'$, а $BB' \parallel CC'$, то угол CBF и есть $\Pi(BC) = \Pi(a)$. Формулы (9) и (10) поэтому дают:

$$CH = k \operatorname{ctg} \Pi(a) \sin \Pi(a) = k \cos \Pi(a). \quad (11)$$

Подставляя выражения (8) и (11) в уравнение (7), по сокращении на k , получаем:

$$\cos \Pi(a) = \operatorname{ctg} \Pi(b) \operatorname{tg} A. \quad (12)$$

Ясно, что таким же образом может быть выведено и четвертое соотношение

$$\cos \Pi(b) = \operatorname{ctg} \Pi(a) \operatorname{tg} B, \quad (13)$$

которое, впрочем, является следствием первых трех. Из этих же уравнений может быть получена и полная система уравнений прямоугольного треугольника (XXVI₁₋₁₀) (стр. 297), как это выполнено в § 36.

Вывод теоремы сложения (§ 37) основан на этих же тригонометрических уравнениях, поэтому и основное соотношение (XXIII) (стр. 294) может быть теперь выведено на основе тех формул, которые мы сейчас получили.

Метрика гиперболического пространства может быть, таким образом, установлена двояким путем. Путь, которому следовал Лобачевский, опирается на геометрию предельной поверхности — этот вывод пользуется стереометрическими средствами. Второй путь, которому следовали Либман, Успенский и Симон, требует только планиметрических соображений. Первый путь, несомненно, проще, быстрее ведет к цели. Второй путь имеет свои достоинства, так как уравнения прямоугольного треугольника, конечно, принадлежат планиметрии; было поэтому важно их установить без помощи стереометрии. Эти два метода вывода основных уравнений гиперболической геометрии существенно различны, но этим и исчерпывается разнообразие построения метрики гиперболического пространства. Все остальные выводы тех же соотношений представляют собой несущественные варианты этих двух методов.

4. Тригонометрические уравнения прямоугольного сферического треугольника. В тесной связи с этим стоит сферическая тригонометрия гиперболического пространства.

Пусть NMP (черт. 316) представляет собой произвольный острый угол, который мы обозначим через b . Через сторону MN этого угла проводим плоскость $M'MN$ (II), перпендикулярную к плоскости угла NMP , и строим в ней произвольный острый угол $M'MN = a$. На стороне MN откладываем отрезок параллельности, соответствующий углу a : $a = \Pi(MN)$; тогда прямая NN' , перпендикулярная к MN в плоскости $M'MN$, параллельна MM' . Из точки N опустим перпендикуляр NP на прямую MP . Прямая NN' , будучи перпендикулярна к плоскости MNP (I), перпендикулярна

к прямой NP . Наконец, плоскости $M'MP$ (III) и $N'NP$ (IV), проходящие через параллели MM' и NN' , пересекаются по прямой PP' , им параллельной. Плоскость $N'NP$ (IV), проходящая через прямую NN' , перпендикулярна также к плоскости MNP (I), а потому прямая MP , перпендикулярная к прямой PN , перпендикулярна к плоскости $N'NP$ (IV) и, следовательно, к прямой PP' .

Из точки M , как из центра, проведем теперь сферу произвольного радиуса. Плоскости I, II, III, сходящиеся в центре сферы, вырежут сферический

треугольник, который имеет прямой угол при вершине C , ибо плоскости NMP (I) и $M'MN$ (II) взаимно перпендикулярны. Катеты сферического треугольника равны a и b ; его гипотенузу обозначим через c . Прямоугольный сферический треугольник ABC не ограничен никакими специальными условиями, так как его катеты выбраны произвольно. Из чертежа мы видим, что

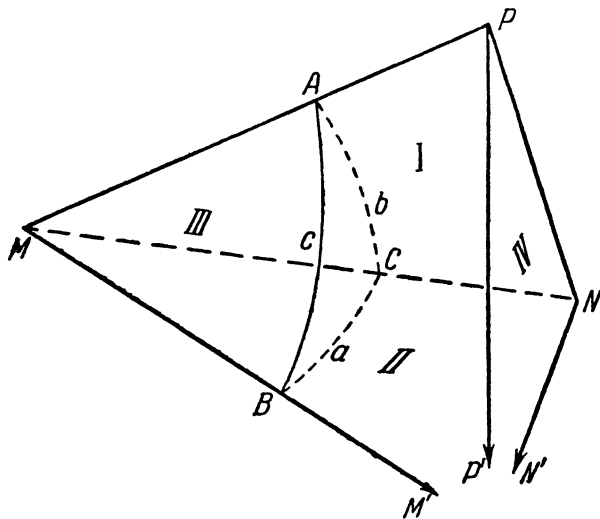
$$c = \Pi(MP), \quad a = \Pi(MN). \quad (14)$$

Далее, угол A сферического треугольника ABC определяется двугранным углом, составленным плоскостями $M'MP$ (III) и NMP (I), и измеряется линейным углом $P'PN$, так что

$$A = \Pi(NP). \quad (15)$$

Из прямоугольного треугольника MNP на основании уравнений (XXVII) [2, 6, 4] (стр. 297), имеем: $\text{ctg } \Pi(NP) = \text{ctg } \Pi(MN) \sin b$, $\cos \Pi(MP) = \cos \Pi(MN) \cos b$, $\cos \Pi(NP) = \text{ctg } \Pi(MP) \text{tg } b$. Принимая же во внимание равенства (14) и (15), находим:

$$\left. \begin{aligned} \text{ctg } A &= \text{ctg } a \sin b \quad \text{или} \quad \text{tg } a = \sin b \text{tg } A, \\ \cos c &= \cos a \cos b, \\ \cos A &= \text{ctg } c \text{tg } b \quad \text{или} \quad \text{tg } b = \text{tg } c \cos A. \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

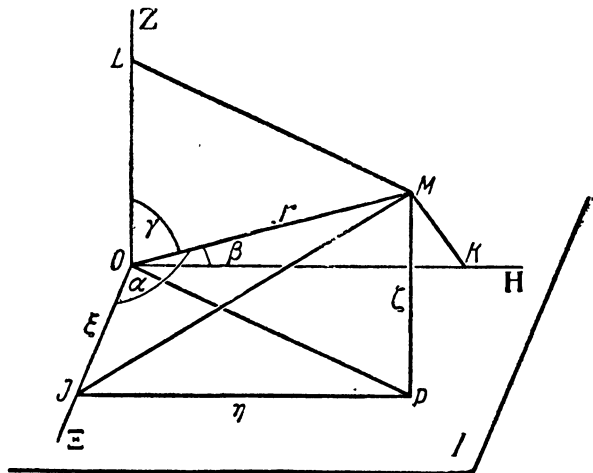


Черт. 316.

Мы видим, что пришли к уравнениям прямоугольного сферического треугольника евклидова пространства. Так как из этих уравнений развивается вся сферическая тригонометрия, то отсюда вытекает следующий важный вывод: сферическая тригонометрия не зависит от постулата Евклида, т. е. в гиперболической геометрии она совпадает со сферической тригонометрией евклидова пространства.

§ 55. ЭЛЕМЕНТЫ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ В ГИПЕРБОЛИЧЕСКОМ ПРОСТРАНСТВЕ

1. Координация точки в гиперболическом пространстве. Некоторую плоскость I в гиперболическом пространстве примем за координатную плоскость (ξ, η) , на ней точку O примем за начало декартовых координат, ориентированную прямую $O\xi$ — за ось абсцисс. Положение точки M в пространстве определяется ее расстоянием $MP = \zeta$ от плоскости I (черт. 317), взятым, как обыкновенно, с надлежащим знаком, и декартовыми координатами (ξ, η) ее проекции P на эту плоскость; ξ, η, ζ и суть декартовы координаты точки M в пространстве. Если PJ есть перпендикуляр, опущенный из точки P на ось абсцисс, то декартовы координаты точки M выражаются длинами отрезков OJ, JP, PM , взятыми с надлежащими знаками. При этом



Черт. 317.

точку J можно рассматривать как проекцию точки M на ось абсцисс, а отрезок OP — как проекцию радиуса-вектора OM на плоскость I . Таким образом, абсциссу ξ точки M можно определить как длину проекции ее радиуса-вектора OM на ось абсцисс, взятую с надлежащим знаком. Если, однако, провести две другие оси координат, именно ось OH в плоскости I перпендикулярно к оси $O\xi$ в сторону положительных ординат, и третью ось OZ , перпендикулярно к плоскости I , то координаты η и ζ отнюдь не будут совпадать с длинами проекций OK и OL радиуса-вектора OM на оси OH и OZ . Если теперь через α, β, γ обозначим углы, которые радиус-вектор $OM (r)$ образует с осями координат, то из прямоугольных треугольников OJM, OKM, OLM имеем (XXVI₀) (стр. 297):

$$\left. \begin{aligned} \cos \Pi(OJ) &= \cos \Pi(r) \cos \alpha, & \cos \Pi(OK) &= \cos \Pi(r) \cos \beta, \\ \cos \Pi(OL) &= \cos \Pi(r) \cos \gamma. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Отрезки OJ, OK, OL обозначим через $\bar{\xi}, \bar{\eta}, \bar{\zeta}$. Длины их суть вторые декартовы координаты или промежуточные координаты, поскольку они служат для перехода к бельтрамиевым координатам; преобразование же координат ξ, η, ζ в координаты $\bar{\xi}, \bar{\eta}, \bar{\zeta}$ выражается

формулами (учитывая, что $\xi = \bar{\xi}$), а также формулу (XLIX) (стр. 329),

$$\left. \begin{aligned} \cos \Pi(\bar{\xi}) &= \cos \Pi(\xi), \\ \cos \Pi(\bar{\eta}) &= \cos \Pi(\eta) \sin \Pi(\xi), \\ \cos \Pi(\bar{\zeta}) &= \cos \Pi(\zeta) \sin \Pi(\xi) \sin \Pi(\eta); \end{aligned} \right\} \quad (\text{XCVI})$$

последняя формула получается из

$$\cos \Pi(\zeta) = \cos \Pi(\zeta) \sin \Pi(OP), \quad \sin \Pi(OP) = \sin \Pi(\xi) \sin \Pi(\eta),$$

Вместе с тем,

$$\sin \Pi(r) = \sin \Pi(\xi) \sin \Pi(\eta) \sin \Pi(\zeta). \quad (\text{XCVII})$$

Наконец, значения $\cos \Pi(\bar{\xi})$, $\cos \Pi(\bar{\eta})$, $\cos \Pi(\bar{\zeta})$, аналогично (XLIX) (стр. 329), примем за бельтрамиевы координаты точки в пространстве:

$$\left. \begin{aligned} x &= \cos \Pi(\bar{\xi}) = \cos \Pi(\xi), \\ y &= \cos \Pi(\bar{\eta}) = \cos \Pi(\eta) \sin \Pi(\xi), \\ z &= \cos \Pi(\bar{\zeta}) = \cos \Pi(\zeta) \sin \Pi(\xi) \sin \Pi(\eta). \end{aligned} \right\} \quad (\text{XCVIII})$$

Тогда легко обнаружим, что

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1 - \sin^2 \Pi(\xi) \sin^2 \Pi(\eta) \sin^2 \Pi(\zeta) = 1 - \sin^2 \Pi(r) = \cos^2 \Pi(r) \quad (\text{XCIX})$$

и, следовательно,

$$x^2 + y^2 + z^2 < 1. \quad (\text{XCIX}_1)$$

Нетрудно также обнаружить, что три числа x , y , z , удовлетворяющие неравенству (XCIX₁), всегда могут быть рассматриваемы как бельтрамиевы координаты точки в гиперболическом пространстве.

Равенства (1) можно написать также в виде:

$$\left. \begin{aligned} x &= \cos \Pi(r) \cos \alpha, \\ y &= \cos \Pi(r) \cos \beta, \\ z &= \cos \Pi(r) \cos \gamma. \end{aligned} \right\} \quad (\text{C})$$

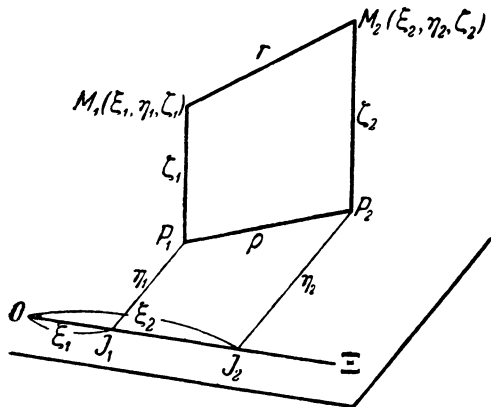
Лобачевский пользуется почти исключительно декартовыми координатами ξ , η , ζ . Часто это бывает целесообразно, но еще чаще усложняет вычисления.

2. Расстояние между двумя точками. Пусть M_1 и M_2 будут две точки с декартовыми координатами ξ_1 , η_1 , ζ_1 и ξ_2 , η_2 , ζ_2 (черт. 318). Из двупрямоугольного четырехугольника $M_1P_1P_2M_2$, обозначая расстояние M_1M_2 через r , а P_1P_2 — через ρ , по формуле (XXXIV₁) (стр. 308) имеем:

$$\sin \Pi(r) = \frac{\sin \Pi(\zeta_1) \sin \Pi(\zeta_2) \sin \Pi(\rho)}{1 - \cos \Pi(\zeta_1) \cos \Pi(\zeta_2) \sin \Pi(\rho)}.$$

Из четырехугольника $J_1P_1P_2J_2$, где J_1 , J_2 суть проекции точек P_1 и P_2 на ось абсцисс, вновь по той же формуле (XXXIV₁) получаем:

$$\sin \Pi(\rho) = \frac{\sin \Pi(\eta_1) \sin \Pi(\eta_2) \sin \Pi(\xi_2 - \xi_1)}{1 - \cos \Pi(\eta_1) \cos \Pi(\eta_2) \sin \Pi(\xi_2 - \xi_1)}.$$



Черт. 318.

Заменяя $\sin \Pi (\xi_2 - \xi_1)$ по формуле сложения (XXIX₀) (стр. 302), получаем окончательное выражение для $\sin \Pi (r)$ через декартовы координаты точек P_1 и P_2 :

$$\sin \Pi (r) = \frac{\sin \Pi (\xi_1) \sin \Pi (\eta_1) \sin \Pi (\zeta_1) \sin \Pi (\xi_2) \sin \Pi (\eta_2) \sin \Pi (\zeta_2)}{S}, \quad (2)$$

где

$$S = 1 - \cos \Pi (\xi_1) \cos \Pi (\xi_2) - \cos \Pi (\eta_1) \cos \Pi (\eta_2) \sin \Pi (\xi_1) \sin \Pi (\xi_2) - \\ - \cos \Pi (\zeta_1) \cos \Pi (\zeta_2) \sin \Pi (\xi_1) \sin \Pi (\xi_2) \sin \Pi (\eta_1) \sin \Pi (\eta_2). \quad (2a)$$

Однако это громоздкое и несимметричное выражение чрезвычайно упрощается, когда мы переходим к бильтрамиевым координатам. Заметим для этого, прежде всего, что расстояния r_1 и r_2 точек M_1 и M_2 от начала координат O определяются формулами:

$$\sin \Pi (r_1) = \sin \Pi (\xi_1) \sin \Pi (\eta_1) \sin \Pi (\zeta_1), \quad (3_1)$$

$$\sin \Pi (r_2) = \sin \Pi (\xi_2) \sin \Pi (\eta_2) \sin \Pi (\zeta_2). \quad (3_2)$$

Вообще, согласно формуле (XCIX), для всякой точки M ее расстояние r_0 от начала определяется равенством

$$\sin \Pi (r_0) = \sqrt{1 - x^2 - y^2 - z^2}.$$

Положительное значение этого радикала будем обозначать через u , так что

$$u = + \sqrt{1 - x^2 - y^2 - z^2} = \sin \Pi (r_0). \quad (4)$$

Если, далее, положим

$$u_{12} = 1 - x_1 x_2 - y_1 y_2 - z_1 z_2, \quad (5)$$

то формула (2) при соотношениях (XCVIII) дает следующее простое выражение расстояния r между двумя точками в бильтрамиевых координатах:

$$\sin \Pi (r) = \frac{u_1 u_2}{u_{12}}. \quad (CI)$$

Мы получили формулу, совершенно аналогичную выражению (XLVIII₂) плоской геометрии (стр. 330).

Естественно возникает вопрос, — представляет ли правая часть равенства (CI) правильную дробь? Ответ на это утвердительный, если координаты x_1, y_1, z_1 и x_2, y_2, z_2 удовлетворяют неравенству (XCIX₁).

В самом деле, из тождества

$$(x_1^2 + y_1^2 + z_1^2)(x_2^2 + y_2^2 + z_2^2) - (x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2)^2 = \\ = (x_1 y_2 - x_2 y_1)^2 + (y_1 z_2 - y_2 z_1)^2 + (z_1 x_2 - x_1 z_2)^2$$

следует, что левая часть не может иметь отрицательного значения, а потому при $x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 < 1$ и $x_2^2 + y_2^2 + z_2^2 < 1$ выражение $x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2$ по абсолютной величине меньше 1, т. е. u_{12} имеет положительное значение.

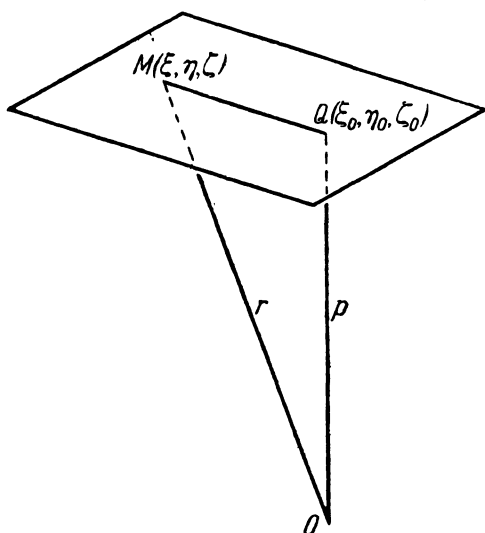
С другой стороны, тождество

$$2u_{12} - u_1^2 - u_2^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2$$

показывает, что для двух несовпадающих точек $u_{12} > \frac{u_1^2 + u_2^2}{2}$. Отношение

$\frac{2u_1 u_2}{u_1^2 + u_2^2}$ представляет собой правильную дробь, поскольку среднее геометрическое двух неравных положительных чисел всегда меньше их среднего арифметического; это отношение еще уменьшится, если мы заменим знаменатель большим числом $2u_{12}$.

3. Уравнение плоскости. Пусть OQ будет перпендикуляр, опущенный из начала координат на данную плоскость (черт. 319), (ξ_0, η_0, ζ_0) — декартовы координаты основания Q этого перпендикуляра; если длину этого перпендикуляра мы обозначим через p , то согласно формуле (XCVII)



Черт. 319.

$$\sin \Pi(p) = \sin \Pi(\xi_0) \sin \Pi(\eta_0) \sin \Pi(\zeta_0).$$

Пусть M будет произвольная точка нашей плоскости, (ξ, η, ζ) — ее декартовы координаты, r , по обыкновению, — длина радиус-вектора OM точки M . По той же формуле (XCVII) мы имеем:

$$\sin \Pi(r) = \sin \Pi(\xi) \sin \Pi(\eta) \sin \Pi(\zeta).$$

Если теперь примем во внимание, что

$$\sin \Pi(OM) = \sin \Pi(OQ) \sin \Pi(MQ)$$

и воспользуемся выражением (2) для последнего множителя, то получим:

$$\sin \Pi(r) = \frac{\sin^2 \Pi(\xi_0) \sin^2 \Pi(\eta_0) \sin^2 \Pi(\zeta_0) \sin \Pi(\xi) \sin \Pi(\eta) \sin \Pi(\zeta)}{S_0}, \quad (6)$$

где по формуле (2a), отнесенной к точкам $M(\xi, \eta, \zeta)$ и $Q(\xi_0, \eta_0, \zeta_0)$,

$$S_0 = 1 - \cos \Pi(\xi) \cos \Pi(\xi_0) - \cos \Pi(\eta) \cos \Pi(\eta_0) \sin \Pi(\xi) \sin \Pi(\xi_0) - \\ - \cos \Pi(\zeta) \cos \Pi(\zeta_0) \sin \Pi(\xi) \sin \Pi(\xi_0) \sin \Pi(\eta) \sin \Pi(\eta_0).$$

Так как числитель выражения (6) равен $\sin^2 \Pi(p) \sin \Pi(r)$, то, сократив уравнение (6) на $\sin \Pi(r)$, получим уравнение плоскости Лобачевского в декартовых координатах:

$$\cos^2 \Pi(p) = \cos \Pi(\xi) \cos \Pi(\xi_0) + \cos \Pi(\eta) \cos \Pi(\eta_0) \sin \Pi(\xi) \sin \Pi(\xi_0) + \\ + \cos \Pi(\zeta) \cos \Pi(\zeta_0) \sin \Pi(\xi) \sin \Pi(\xi_0) \sin \Pi(\eta) \sin \Pi(\eta_0).$$

В бельтрамиевых же координатах, в силу формул преобразования (XCVIII), это уравнение принимает простой вид:

$$xx_0 + yy_0 + zz_0 = \cos^2 \Pi(p). \quad (\text{CII}_1).$$

Рассуждение требует небольшой модификации, когда плоскость проходит через начало координат. Уравнение плоскости в этом случае будет иметь вид

$$xx_0 + yy_0 + zz_0 = 0. \quad (\text{CII}_2)$$

Если через α, β, γ обозначим углы, которые радиус-вектор $OM(r)$ образует с осями координат, через $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0$ — углы, которые с теми же осями образует радиус-вектор $OQ(p)$, то по формулам (C) (стр. 448) получим:

$$x = \cos \Pi(r) \cos \alpha, \quad y = \cos \Pi(r) \cos \beta, \quad z = \cos \Pi(r) \cos \gamma, \quad (7a)$$

$$x_0 = \cos \Pi(p) \cos \alpha_0, \quad y_0 = \cos \Pi(p) \cos \beta_0, \quad z_0 = \cos \Pi(p) \cos \gamma_0. \quad (7b)$$

Подставляя в уравнение (CII₁) вместо x_0, y_0, z_0 выражения (7b) и сокращая на $\cos \Pi(p)$, получим уравнение плоскости в еще более простом

виде, более сходном с уравнением плоскости в евклидовом пространстве:

$$x \cos \alpha_0 + y \cos \beta_0 + z \cos \gamma_0 = \cos \Pi(p). \quad \text{-(CIII)}$$

И этот вывод требует небольшой модификации в том случае, когда плоскость проходит через начало координат.

4. Угол между двумя прямыми. Последнее уравнение приводит еще к одной формуле, имеющей большое значение. Подставляя в него вместо x, y, z выражения (7а) и имея в виду, что $\cos \Pi(p) = \cos \Pi(r) \cos \theta$, где θ — угол между ориентированными прямыми OM и OQ , получим:

$$\cos \alpha \cos \alpha_0 + \cos \beta \cos \beta_0 + \cos \gamma \cos \gamma_0 = \cos \theta. \quad \text{(CIV)}$$

Эта формула определяет угол между двумя прямыми по углам, которые эти прямые образуют с ребрами ортогонального триэдра; она совершенно совпадает с соответствующей формулой евклидовой геометрии. Она, конечно, пригодна для любых двух прямых, так как лучи OM и OQ могут быть выбраны совершенно произвольно. В частности, когда луч OM совпадает с OQ , это дает известную формулу:

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1, \quad \text{(CV)}$$

которая непосредственно вытекает также из соотношений (C) и (XCIX).

Мы пришли к формулам абсолютной геометрии.

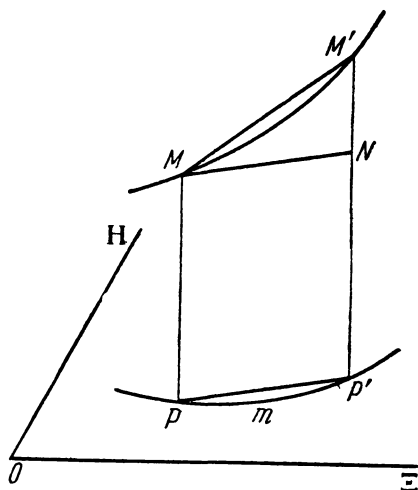
§ 56. ПРОСТЕЙШИЕ ПРИЛОЖЕНИЯ ИСЧИСЛЕНИЯ БЕСКОНЕЧНО МАЛЫХ В ГИПЕРБОЛИЧЕСКОМ ПРОСТРАНСТВЕ

1. Выражение элемента длины в гиперболическом пространстве. Выражение элемента длины в гиперболическом пространстве или основная метрическая форма гиперболического пространства проще всего получается из того обстоятельства, что в прямоугольном треугольнике с бесконечно малыми сторонами остается в силе теорема Пифагора. Если $M(\xi, \eta, \zeta)$ и $M'(\xi + d\xi, \eta + d\eta, \zeta + d\zeta)$ (черт. 320) суть две бесконечно близкие точки на кривой, P и P' их проекции на плоскость $\Xi\mathcal{H}$, то $MPP' M'$ есть двупрямоугольник, в котором отрезок MM' есть верхнее, PP' — нижнее основание. Отложив на $M'P'$ отрезок $P'N = PM$, получим бесконечно малый треугольник $MM'N$, в котором, с точностью до бесконечно малых третьего порядка,

$$MM'^2 = MN^2 + NM'^2{}^1).$$

Так как здесь, с одной стороны, $M'N = d\zeta$, и, с другой стороны [теми рассуждениями, которыми мы в рубр. 3 § 45 пришли к формуле (4) на стр. 360],

$$MN = \frac{PP'}{\sin \Pi(\zeta)},$$



Черт. 320.

¹⁾ К треугольнику $MM'N$ с бесконечно малыми сторонами можно прилагать теорему Пифагора, несмотря на то, что угол N этого треугольника не является прямым, так как этот угол бесконечно мало отличается от прямого.

то, принимая с тем же приближением MM' за элемент длины дуги ds , имеем:

$$ds^2 = d\zeta^2 + \frac{(PP')^2}{\sin^2 \Pi(\zeta)}.$$

Так как, наконец PP' — элемент дуги проекции PmP' рассматриваемой кривой на плоскость $\Xi\mathcal{H}$, то, согласно формуле (LXXVII) (стр. 359), получим формулу Лобачевского:

$$ds^2 = \frac{d\eta^2}{\sin^2 \Pi(\eta) \cdot \sin^2 \Pi(\zeta)} + \frac{d\zeta^2}{\sin^2 \Pi(\zeta)} + d\zeta^2. \quad (\text{CVI})$$

Если кривая расположена на эквидистантной поверхности, базисную плоскость которой примем за плоскость $\Xi\mathcal{H}$, то ζ имеет постоянное значение h , $d\zeta = 0$; выражение (CVI) принимает вид:

$$ds^2 = \frac{1}{\sin^2 \Pi(h)} \left[d\eta^2 + \frac{d\zeta^2}{\sin^2 \Pi(\eta)} \right] = \frac{ds'^2}{\sin^2 \Pi(h)}, \quad (\text{CVII})$$

где ds' — проекция элемента ds на базисную плоскость. Отсюда следует, что длина кривой, лежащей на эквидистантной поверхности, находится в постоянном отношении к длине ее проекции на базисную плоскость, мы это уже отмечали в § 51, рубр. 9 (стр. 433).

Формулу (CVI) нетрудно преобразовать к бельтрамиевым координатам; но мы не будем этим заниматься: мы дадим непосредственный, более простой вывод формулы для элемента длины дуги в бельтрамиевых координатах.

В самом деле, равенства (C), определяющие бельтрамиевы координаты точки, в интересах некоторого упрощения вычисления напомним в таком виде:

$$x = \rho\lambda, \quad y = \rho\mu, \quad z = \rho\nu, \quad (4)$$

где

$$\lambda = \cos \alpha, \quad \mu = \cos \beta, \quad \nu = \cos \gamma, \quad \rho = \cos \Pi(r), \quad (5)$$

тогда соотношение (CV) примет вид:

$$\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 = 1, \quad (6)$$

а вместе с тем,

$$\rho^2 = x^2 + y^2 + z^2. \quad (7)$$

Пусть $\rho + d\rho$, $\lambda + d\lambda$, $\mu + d\mu$, $\nu + d\nu$ означают те же величины для точки M' , бесконечно близкой к M . Тогда

$$(\lambda + d\lambda)^2 + (\mu + d\mu)^2 + (\nu + d\nu)^2 = 1 \quad (8)$$

и из равенств (6) и (8) получаем:

$$2(\lambda d\lambda + \mu d\mu + \nu d\nu) = -(d\lambda^2 + d\mu^2 + d\nu^2). \quad (9)$$

Обозначая, далее, через $d\theta$ угол между радиусами-векторами OM и OM' , заметим, что формула (LXXX) (стр. 362) явно остается в силе:

$$ds^2 = dr^2 + h^2 \operatorname{ctg}^2 r d\theta^2. \quad (10)$$

С другой стороны, согласно формуле (CIV),

$$\cos d\theta = \lambda(\lambda + d\lambda) + \mu(\mu + d\mu) + \nu(\nu + d\nu).$$

Выражая $\cos d\theta$ с точностью до бесконечно малых второго порядка,

относительно $d\theta$ включительно (т. е. заменяя $\cos d\theta$ через $1 - \frac{d\theta^2}{2}$) и учитывая равенство (6), находим:

$$d\theta^2 = -2(\lambda d\lambda + \mu d\mu + \nu d\nu) = d\lambda^2 + d\mu^2 + d\nu^2. \quad (8)$$

Теперь, дифференцируя равенства (1), получаем:

$$dx = \lambda d\rho + \rho d\lambda, \quad dy = \mu d\rho + \rho d\mu, \quad dz = \nu d\rho + \rho d\nu \quad (9)$$

и отсюда

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = d\rho^2 + \rho^2 (d\lambda^2 + d\mu^2 + d\nu^2) + 2\rho d\rho (\lambda d\lambda + \mu d\mu + \nu d\nu).$$

Учитывая соотношения (6) и (8), напомним это равенство в виде:

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = d\rho^2 + (\rho^2 - \rho d\rho) d\theta^2.$$

Отбрасывая же член, имеющий порядок выше 2, получаем:

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\theta^2. \quad (10)$$

Далее, дифференцируя последнее равенство (2), получаем [согласно (LXXVI), стр. 358]:

$$d\rho = -\sin \tilde{r} d\tilde{r} = \frac{1}{k} \sin^2 \tilde{r} dr. \quad (11)$$

Таким образом,

$$dr = \frac{k d\rho}{\sin^2 \tilde{r}} = \frac{k d\rho}{1 - \rho^2}, \quad d\theta^2 = \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2 - d\rho^2}{\rho^2}$$

и, наконец,

$$\operatorname{ctg}^2 \tilde{r} = \frac{\rho^2}{1 - \rho^2} = \frac{x^2 + y^2 + z^2}{1 - x^2 - y^2 - z^2}.$$

Подставляя же эти выражения в формулу (7), получаем:

$$ds^2 = \frac{k^2 d\rho^2}{(1 - \rho^2)^2} + \frac{k^2 (dx^2 + dy^2 + dz^2 - d\rho^2)}{1 - \rho^2}.$$

Отсюда

$$ds^2 = k^2 \frac{(\rho d\rho)^2 + (dx^2 + dy^2 + dz^2)(1 - \rho^2)}{(1 - \rho^2)^2},$$

а так как, в силу равенства (4), $\rho d\rho = x dx + y dy + z dz$, получаем окончательно:

$$ds^2 = k^2 \frac{(x dx + y dy + z dz)^2 + (dx^2 + dy^2 + dz^2)(1 - x^2 - y^2 - z^2)}{(1 - x^2 - y^2 - z^2)^2}. \quad (\text{CVIII})$$

Полагая здесь $z = 0$, т. е. относя это выражение к плоскости x, y , возвратимся к формуле (LXXXII) (стр. 364).

2. Длина кривой, расположенной на поверхности вращения. Если кривая расположена на поверхности вращения, то элементу длины удобно дать другую форму. Положение точки M на поверхности вращения целесообразно определять расстоянием (5) того сечения, перпендикулярного к оси вращения (черт. 321), на котором точка лежит, от некоторого неподвижного сечения (расстояние между плоскостями двух параллелей измеряется по оси), и длиной (6), отсчитываемой от некоторого меридиана OPN и измеряемой углом NPM .

Чтобы найти выражение элемента длины MM' , рассмотрим бесконечно малый прямоугольный треугольник $MM'M''$, катетами которого

служат элемент меридиана, проходящего через точку M' , и элемент параллели, проходящей через точку M . Длина дуги MM'' равна $k \operatorname{ctg} \tilde{\rho} d\psi$, где ρ — радиус сечения, $M'M''$ — элемент длины меридиана; если обозначим его через ds' , то

$$\tilde{ds}^2 = ds'^2 + k^2 \operatorname{ctg}^2 \tilde{\rho} d\psi^2. \quad (\text{CIX})$$

В свою очередь, OP мы можем рассматривать как ось абсцисс ζ в плоскости меридиана, ζ и ρ — как абсциссу и ординату точки M в этой плоскости, так что

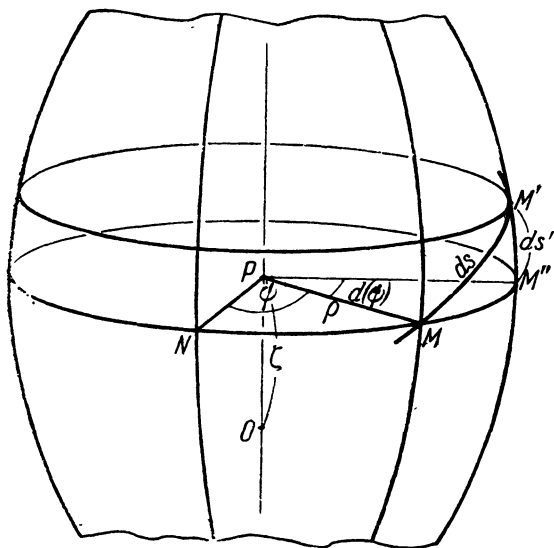
$$ds'^2 = d\rho^2 + \frac{d\zeta^2}{\sin^2 \Pi(\rho)}. \quad (\text{CIX}_1)$$

Если задано уравнение меридиана, то ρ есть функция от ζ , форма (CIX) зависит только от ζ и ψ и их дифференциалов.

Воспользуемся этой формулой для определения длины винтовой линии.

3. Винтовая линия.

Представим себе твердое тело, которое движется таким образом, что некоторая прямая, ему принадлежащая, скользит по неподвижной прямой L в пространстве. Если при этом нет вращения вокруг оси L , т. е. каждая плоскость, проходящая через прямую L , остается в самой себе, то движение называется переносным. Это движение в гиперболическом пространстве существенно отличается от переносного движе-



Черт. 321.

ния в евклидовом пространстве: каждая точка описывает здесь не прямую линию, а эквидистанту, расположенную в той осевой плоскости, в которой точка лежит.

Если переносное движение вдоль по оси L сопровождается вращением вокруг той же оси, то движение называется винтовым; линия (траектория), которую описывает каждая точка, называется винтовой линией. Каждая винтовая линия, таким образом, расположена на поверхности, образованной вращением эквидистанты вокруг базисной прямой. Элемент длины MM' (см. тот же чертеж 321) в этом случае выражается так ($\rho = h$):

$$ds = \frac{1}{\sin \tilde{h}} \sqrt{d\tilde{\zeta}^2 + k^2 \cos^2 \tilde{h} d\psi^2}. \quad (12)$$

В том случае, когда одно и другое движение, т. е. как скольжение по оси, так и вращение вокруг нее, происходят равномерно, кривая называется простой, или обыкновенной, винтовой линией. В этом случае

$$d\tilde{\zeta} = c dt, \quad d\psi = \omega dt,$$

где c и ω суть постоянные скаляры,

$$ds = q dt, \quad q = \frac{1}{\sin \tilde{h}} \sqrt{c^2 + k^2 \omega^2 \cos^2 \tilde{h}}.$$

При надлежащем выборе начала отсчета t , ζ , ψ и s :

$$s = qt, \quad \zeta = ct, \quad \psi = \omega t. \quad (13)$$

Нетрудно видеть, что кривая в этом случае образует с меридианом постоянный угол θ , определяемый формулой

$$\cos \theta = \frac{c}{q \sin \tilde{h}}. \quad (CX)$$

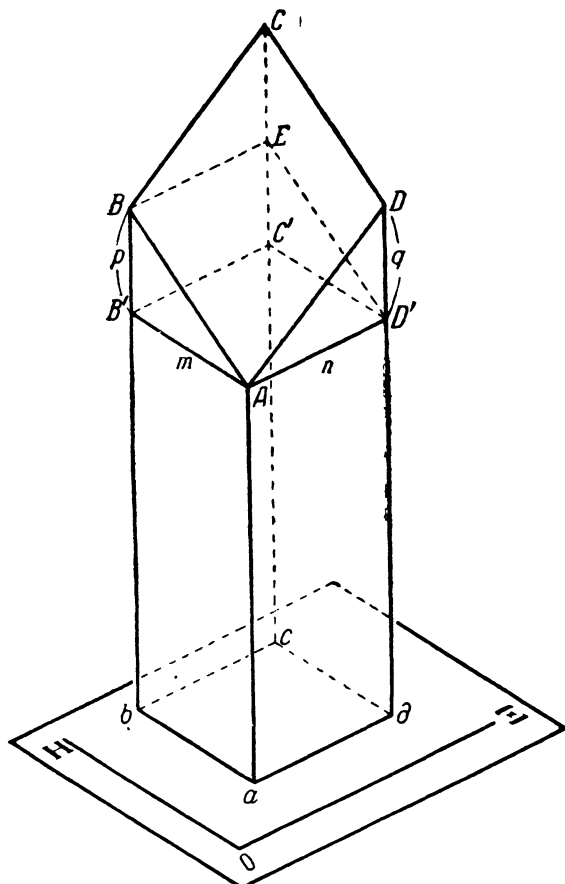
4. Вычисление площадей фигур, расположенных на кривых поверхностях. Вычисление поверхностей и объемов тел в гиперболическом пространстве проводится методами, аналогичными измерению длин: оно основывается на том положении, что элемент площади и элемент объема при бесконечно малых их размерах выражаются по формулам евклидовой геометрии.

Начнем с вычисления элемента поверхности. Пусть ξ , η , ζ и $\xi + d\xi$, $\eta + d\eta$, $\zeta + d\zeta$ — декартовы координаты двух бесконечно близких точек A и C на поверхности (черт. 322). Пусть a и c — их проекции на плоскости $\Xi\mathcal{H}$. Строим, прежде всего, элемент площади $abcd$ на этой плоскости, как мы это делали выше (§ 46, рубр. 1, черт. 255, стр. 369), так что

$$a\partial = \frac{d\xi}{\sin \Pi(\eta)}, \quad ab = \partial c = d\eta.$$

Если точки b и ∂ служат проекциями точек B и D поверхности, то четырехугольник $ABCD$ в пределах обычной точности, необходимой в этих вычислениях, можно считать плоским и принимать его

за соответствующий элемент поверхности. Отложив $bB' = cC' = \partial D' = aA'(\zeta)$, построим четырехугольник $AB'C'D'$ и обозначим AB' и AD' через m и n , BB' и DD' — через p и q . Длины этих отрезков легко вычислить.



Черт. 322.

Из четырехугольников Саккери $B'baA$ и $D'daA$ имеем:

$$m = AB' = \frac{ab}{\sin \Pi(Aa)} = \frac{d\eta}{\sin \tilde{\zeta}}, \quad (14)$$

$$n = AD' = \frac{ad}{\sin \Pi(Aa)} = \frac{d\xi}{\sin \tilde{\eta} \sin \tilde{\zeta}}. \quad (15)$$

Далее, $p = B'B$ представляет собой приращение координаты ζ , соответствующее приращению ординаты $d\eta$ при прежнем значении абсциссы; наоборот, $q = D'D$ представляет собой приращение ζ , соответствующее приращению абсциссы $d\xi$ при прежнем значении ординаты. Поэтому

$$p = \frac{\partial \zeta}{\partial \eta} d\eta, \quad q = \frac{\partial \zeta}{\partial \xi} d\xi. \quad (16)$$

Отсюда, очевидно, вытекает, что

$$C'C = d\zeta = \frac{\partial \zeta}{\partial \xi} d\xi + \frac{\partial \zeta}{\partial \eta} d\eta = p + q.$$

Поэтому, если выберем точку E на отрезке CC' таким образом, что $EC' = BB' = p$, то $EC = DD' = q$, так что бесконечно малый четырехугольник $DD'EC$ можно считать параллелограмом и $DC = D'E$; аналогично с тем же приближением принимаем, что четырехугольник $AB'C'D'$ также является параллелограмом, так что $AB' = C'D'$ и $AD' = B'C'$.

Заметим, что из бесконечно малого треугольника ADD' сторона AD определяется в зависимости от n и q по правилам евклидовой геометрии. Таким же образом определяется $DC = D'E$ из треугольника $D'C'E$ в зависимости от m и p , диагональ AC' — в зависимости от m и n , наконец, AC — в зависимости от AC' и CC' ($= p + q$). Далее, площадь бесконечно малого треугольника ACD опять-таки выразится в зависимости от трех сторон по правилам евклидовой геометрии. Так как то же самое справедливо относительно треугольника ABC , то отсюда вытекает, что элемент поверхности $ABCD$ выразится в зависимости от m, n, p и q совершенно так же, как в евклидовой геометрии, если пренебречь бесконечно-малыми высших порядков.

Становясь поэтому на почву евклидовой геометрии, мы заметим, что проекцией четырехугольника $ABCD$ на плоскость $AB'C'D'$ служит именно этот последний четырехугольник ($AB'C'D'$), площадь которого равна $AB' \cdot AD' = mn$. Далее, проекцией того же четырехугольника на плоскость $DD'C'C$ служит параллелограмм $DD'EC$, площадь которого равна $DD' \cdot D'C' = qm$. Очевидно, таким же приемом можно обнаружить, что проекция того же четырехугольника на третью плоскость $BB'C'C$ равна pn , и так как эти три плоскости ортогональны, то по правилам геометрии Евклида, если будем обозначать, как это делал Лобачевский, элемент поверхности через $d^2\sigma$:

$$d^2\sigma = \frac{d\xi d\eta}{\sin \tilde{\zeta}} \sqrt{\left(\frac{\partial \zeta}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial \zeta}{\partial \eta}\right)^2 \frac{1}{\sin^2 \tilde{\eta}} + \frac{1}{\sin^2 \tilde{\eta} \sin^2 \tilde{\zeta}}} \quad (CXI)$$

или (LXXVI, стр. 358)

$$d^2\sigma = \frac{k^2 d\tilde{\xi} d\tilde{\eta}}{\sin \tilde{r}} \sqrt{\left(\frac{\partial \zeta}{\partial \tilde{\xi}}\right)^2 + \left(\frac{\partial \zeta}{\partial \tilde{\eta}}\right)^2 \frac{1}{\sin^2 \tilde{\eta}} + \frac{1}{\sin^2 \tilde{\eta} \sin^2 \tilde{\zeta}}}. \quad (CXIa)$$

Это выражение элемента поверхности в декартовых координатах выведено Лобачевским в его работе «О началах геометрии»¹⁾. Оно, конечно, не отличается простотой, но имеет совершенно общий характер.

¹⁾ См. [83], т. I, формула (44) на стр. 228.

5. Применение найденного выражения к некоторым простейшим поверхностям. В случае, когда рассматриваемая фигура лежит на эквидистантной поверхности, $\zeta = \text{const} = h$, $\frac{\partial \zeta}{\partial \xi} = \frac{\partial \zeta}{\partial \eta} = 0$; по-этому из (CXI) получаем:

$$d^2\sigma = \frac{d\xi d\eta}{\sin \tilde{\eta} \sin^2 \tilde{h}},$$

ввиду же формулы (LXXXVII) (стр. 369), выражающей элемент площади на плоскости, отсюда следует, что

$$d^2\sigma = \frac{d^2\sigma'}{\sin^2 \tilde{h}},$$

где $d^2\sigma'$ есть проекция того же элемента поверхности на ее базисную плоскость. Вместе с тем

$$\sigma = \frac{\sigma'}{\sin^2 \tilde{h}}. \quad (\text{CXII})$$

Получаем следующий результат.

Отношение площади фигуры, расположенной на эквидистантной поверхности, к ее проекции на базисную плоскость, есть величина постоянная, равная $\frac{1}{\sin^2 \tilde{h}}$.

Обращаясь теперь к площади фигуры на сфере, заметим прежде всего, что уравнение сферы радиуса r с центром в начале координат имеет вид:

$$\sin \tilde{\xi} \sin \tilde{\eta} \sin \tilde{\zeta} = \sin \tilde{r}. \quad (17)$$

Дифференцируя это уравнение по $\tilde{\xi}$ и $\tilde{\eta}$ и рассматривая $\tilde{\zeta}$ как функцию от $\tilde{\xi}$ и $\tilde{\eta}$, находим:

$$\frac{\partial \tilde{\zeta}}{\partial \tilde{\xi}} = -\frac{\cos \tilde{\xi}}{\cos \tilde{\zeta}} \cdot \frac{\sin \tilde{\zeta}}{\sin \tilde{\xi}}, \quad \frac{\partial \tilde{\zeta}}{\partial \tilde{\eta}} = -\frac{\cos \tilde{\eta}}{\cos \tilde{\zeta}} \cdot \frac{\sin \tilde{\zeta}}{\sin \tilde{\eta}}. \quad (18)$$

В силу же формулы (LXXVI) (стр. 358) отсюда следует, что

$$\frac{\partial \zeta}{\partial \xi} = -\frac{\cos \tilde{\xi}}{\cos \tilde{\zeta}}, \quad \frac{\partial \zeta}{\partial \eta} = -\frac{\cos \tilde{\eta}}{\cos \tilde{\zeta}}. \quad (18a)$$

По тому основная формула (CXI) дает:

$$d^2\sigma = \frac{d\xi d\eta}{\sin \tilde{\zeta}} \sqrt{\frac{\cos^2 \tilde{\xi}}{\cos^2 \tilde{\zeta}} + \frac{\text{ctg}^2 \tilde{\eta}}{\cos^2 \tilde{\zeta}} + \frac{1}{\sin^2 \tilde{\eta} \sin^2 \tilde{\zeta}}}, \quad (\text{CXII}')$$

или

$$d^2\sigma = \frac{k^2 d\tilde{\xi} d\tilde{\eta}}{\sin \tilde{r}} \sqrt{\frac{\cos^2 \tilde{\xi}}{\cos^2 \tilde{\zeta}} + \frac{\text{ctg}^2 \tilde{\eta}}{\cos^2 \tilde{\zeta}} + \frac{\sin^2 \tilde{\xi}}{\sin^2 \tilde{r}}}. \quad (\text{CXII}_1)$$

Следуя Лобачевскому, подвергаем подрадикальное выражение следующему преобразованию:

$$\begin{aligned} \frac{\cos^2 \tilde{\xi} + \text{ctg}^2 \tilde{\eta}}{\cos^2 \tilde{\zeta}} + \frac{\sin^2 \tilde{\xi}}{\sin^2 \tilde{r}} &= \frac{(\cos^2 \tilde{\xi} + \text{ctg}^2 \tilde{\eta}) \sin^2 \tilde{\xi} \sin^2 \tilde{\eta}}{\sin^2 \tilde{\xi} \sin^2 \tilde{\eta} - \sin^2 \tilde{r}} + \frac{\sin^2 \tilde{\xi}}{\sin^2 \tilde{r}} = \\ &= \frac{\sin^4 \tilde{\xi} \sin^2 \tilde{\eta} \cos^2 \tilde{r}}{\sin^4 \tilde{r} (\sin^2 \tilde{\xi} \sin^2 \tilde{\eta} - \sin^2 \tilde{r})} \end{aligned} \quad (19)$$

и, следовательно,

$$d^2\sigma = \frac{k^2 d\tilde{\xi} d\tilde{\eta} \cos \tilde{r} \sin^2 \tilde{\xi} \sin \tilde{\eta}}{\sin^2 \tilde{r} \sqrt{\sin^2 \tilde{\xi} \sin^2 \tilde{\eta} - \sin^2 \tilde{r}}}. \quad (20)$$

Площадь σ выражается двойным интегралом, который можно представить в следующем виде:

$$\sigma = k^2 \frac{\cos \tilde{r}}{\sin^2 \tilde{r}} \int \sin \tilde{\xi} d\tilde{\xi} \int \frac{\sin \tilde{\xi} \sin \tilde{\eta} d\tilde{\eta}}{\sqrt{\sin^2 \tilde{\xi} \sin^2 \tilde{\eta} - \sin^2 \tilde{r}}}; \quad (21)$$

пределы интегрирования зависят от того, к какой части сферы мы эту квадратуру относим. Следуя Лобачевскому (сочинение «О началах геометрии», [86]), выполним вычисление для поверхности октанта сферы.

Если за ЭН возьмем плоскость экватора (черт. 323), то первый интеграл (по $\tilde{\eta}$) нужно взять в пределах от $\eta = 0$ до наибольшего его значения η_0 , соответствующего данному значению ξ , т. е. определяемого из уравнения

$$\sin \tilde{\xi} \sin \tilde{\eta}_0 = \sin \tilde{r}; \quad (22)$$

второй интеграл (по $\tilde{\xi}$) нужно взять от $\xi = 0$ до $\xi = r$.

Чтобы первое интегрирование действительно выполнить, напомним

выражение, стоящее в знаменателе под знаком радикала в формуле

$$\sigma = k^2 \frac{\cos \tilde{r}}{\sin^2 \tilde{r}} \int_{\xi=0}^{\xi=r} \sin \tilde{\xi} d\tilde{\xi} \int_{\eta=0}^{\eta=\eta_0} \frac{\sin \tilde{\xi} \sin \tilde{\eta} d\tilde{\eta}}{\sqrt{\sin^2 \tilde{\xi} \sin^2 \tilde{\eta} - \sin^2 \tilde{r}}}, \quad (23)$$

в виде:

$$\sin^2 \tilde{\xi} - \sin^2 \tilde{r} - \sin^2 \tilde{\xi} \cos^2 \tilde{\eta} = (\sin^2 \tilde{\xi} - \sin^2 \tilde{r})(1 - \tau^2),$$

где

$$\tau = \frac{\sin \tilde{\xi} \cos \tilde{\eta}}{\sqrt{\sin^2 \tilde{\xi} - \sin^2 \tilde{r}}} \quad (24)$$

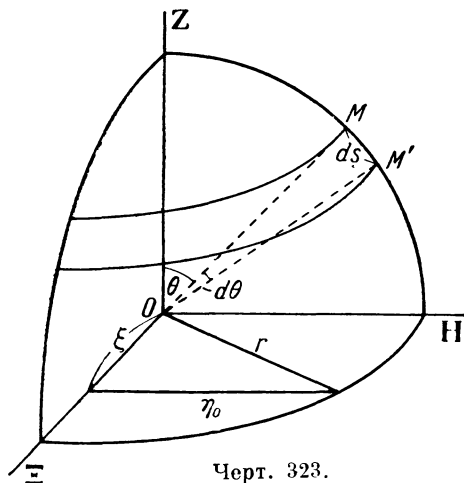
и при постоянном ξ

$$d\tau = - \frac{\sin \tilde{\xi} \sin \tilde{\eta} d\tilde{\eta}}{\sqrt{\sin^2 \tilde{\xi} - \sin^2 \tilde{r}}}.$$

Первое интегрирование дает поэтому

$$\frac{1}{\sqrt{\sin^2 \tilde{\xi} - \sin^2 \tilde{r}}} \int_{\eta=0}^{\eta=\eta_0} \frac{\sin \tilde{\xi} \sin \tilde{\eta} d\tilde{\eta}}{\sqrt{1 - \tau^2}} = - \int_{\eta=0}^{\eta=\eta_0} \frac{d\tau}{\sqrt{1 - \tau^2}} = - \Big|_{\eta=0}^{\eta=\eta_0} \arcsin \tau. \quad (25)$$

$$\text{При } \eta = \eta_0, \tau_0 = 1, \arcsin \tau_0 = \frac{\pi}{2}$$



и, следовательно, интеграл (25) имеет значение $-\frac{\pi}{2}$; поэтому

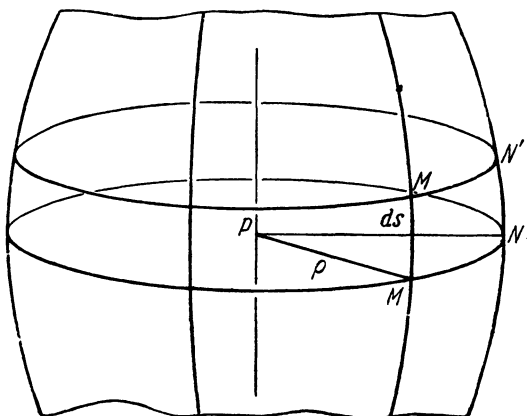
$$\sigma = -k^2 \frac{\pi}{2} \frac{\cos \tilde{r}}{\sin^2 \tilde{r}} \int_{\xi=0}^{\xi=r} \sin \tilde{\xi} d\tilde{\xi} = \frac{\pi}{2} k^2 \operatorname{ctg}^2 \tilde{r}.$$

Вместе с тем площадь всей сферы

$$\Sigma = 4\pi k^2 \operatorname{ctg}^2 \tilde{r} = 4\pi k^2 \operatorname{ctg}^2 \Pi(r). \quad (\text{СХІІІ})$$

При весьма малых значениях r получаем евклидово выражение поверхности шара.

6. Элемент площади поверхности вращения. Тот же результат получим гораздо проще, исходя из другой формулы, приспособленной специально для вычисления величины поверхности вращения. Если возьмем полоску (зону), которая содержится между двумя бесконечно близкими сечениями MN и $M'N'$, отстоящими одно от другого по меридиану на расстоянии $MM' = ds$ (черт. 324), и обозначим через C длину окружности, ограничивающей одно (нижнее) из этих сечений, то площадь этой полоски $d\sigma = Cds$; если же радиус сечения обозначим через ρ , то $C = 2\pi k \operatorname{ctg} \Pi(\rho)$:



Черт. 324.

$$d\sigma = 2\pi k \operatorname{ctg} \Pi(\rho) ds.$$

Для определения площади зоны на сфере, которая содержится между двумя сечениями (черт. 323 на стр. 458), нужно взять интеграл этого выражения по дуге меридиана, содержащейся между этими сечениями. Если θ есть угол MOZ , то $ds = k \operatorname{ctg} \Pi(r) d\theta$,

$$d\sigma = 2\pi k^2 \operatorname{ctg} \Pi(\rho) \operatorname{ctg} \Pi(r) d\theta;$$

а так как

$$\operatorname{ctg} \Pi(\rho) = \operatorname{ctg} \Pi(r) \sin \theta,$$

то

$$d\sigma = 2\pi k^2 \operatorname{ctg}^2 \Pi(r) \sin \theta d\theta,$$

$$\sigma = 2\pi k^2 \operatorname{ctg}^2 \Pi(r) (\cos \theta_0 - \cos \theta). \quad (\text{СХІІІ,})$$

Отсюда для поверхности всей сферы получим то же выражение (СХІІІ).

Казалось бы, что это последнее вычисление настолько проще предыдущего, что было нецелесообразно производить первоначальное вычисление в декартовых координатах. Однако для Лобачевского сопоставление этих результатов имело особое значение: то обстоятельство, что совершенно различные пути приводят к одному и тому же результату, Лобачевский рассматривал как подтверждение того, что построенная им геометрия, на основе которой вычисления ведутся, логически

правильна, не содержит в себе противоречий. Мы уже об этом говорили (§ 45, рубр. 4, стр. 362).

Более того, располагая значением объема или поверхности некоторого тела, найденным геометрическими средствами воображаемой геометрии, Лобачевский часто выражает тот же объем или поверхность в координатах, в которых соответствующая квадратура не раскрывается. Сопоставляя этот результат с найденным ранее значением объема или поверхности рассматриваемого тела, Лобачевский находит таким образом значение определенного интеграла, к которому он свел выражение рассматриваемой геометрической величины. Таким образом, соображения, основанные на применении неевклидовой геометрии, дают Лобачевскому возможность разыскать значение определенного интеграла, когда соответствующий неопределенный интеграл не поддается выражению в известных функциях. Этот прием играет в работах Лобачевского, можно сказать, преобладающую роль. Мемуары «О началах геометрии», «Воображаемая геометрия», «Приложение воображаемой геометрии к некоторым интегралам» содержат десятки определенных интегралов, значение которых найдено этим путем¹⁾.

7. Интеграл, выражающий поверхность сферы в угловых координатах. Чтобы выяснить эти приемы на примере, мы приведем здесь определенный интеграл, значение которого Лобачевский разыскал в этом порядке идей, пользуясь найденным выражением (СХІІІ) поверхности сферы. Это даст ясное представление как о характере метода, так и об искусстве, с которым Лобачевский его применяет.

Лобачевский вводит угловые координаты φ и ψ , которые определяются равенствами

$$\left. \begin{aligned} \cos \psi &= \operatorname{tg} \tilde{r} \operatorname{ctg} \tilde{\eta}, \\ \cos \tilde{\xi} &= \cos \tilde{r} \sin \varphi \sin \psi. \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

Каждому значению $\eta (< r)$ первое уравнение однозначно относит соответствующий угол первой четверти ψ и притом $\psi = 0$ при $\eta = r$, $\psi = \frac{\pi}{2}$ при $\eta = 0$. При данных ξ и ψ второе уравнение определяет φ , причем $\varphi = 0$ при $\xi = 0$ (при $\psi \neq 0$) и $\varphi = \frac{\pi}{2}$ при $\cos \tilde{\xi} = \cos \tilde{r} \sin \psi$; таким образом, в пределах первого квадранта (ξ, η) обе координаты φ и ψ пробегает все значения от 0 до $\frac{\pi}{2}$.

Чтобы привести двойной интеграл (24) к новым переменным, нужно подинтегральный дифференциал, выраженный в новых переменных, помножить на определитель

$$\frac{\partial \tilde{\xi}}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial \tilde{\eta}}{\partial \psi} - \frac{\partial \tilde{\xi}}{\partial \psi} \cdot \frac{\partial \tilde{\eta}}{\partial \varphi},$$

взятый с надлежащим знаком. А так как в данном случае $\tilde{\eta}$ не зависит от φ , то множитель этот сводится к $\frac{\partial \tilde{\xi}}{\partial \varphi} \frac{\partial \tilde{\eta}}{\partial \psi}$. Дифференцируя уравнения (26)

¹⁾ Вычисления, которые в мемуаре «О началах геометрии» Лобачевским только намечены, выполнены А. П. Котельниковым в комментариях к этому мемуару (см. [3], т. I, примечания 104—115, стр. 335—341).

соответственно по ψ и φ , находим:

$$\sin \psi = \frac{\operatorname{tg} \tilde{r}}{\sin^2 \tilde{\eta}} \frac{\partial \tilde{\eta}}{\partial \psi},$$

$$-\sin \tilde{\xi} \frac{\partial \tilde{\xi}}{\partial \varphi} = \cos \tilde{r} \cos \varphi \sin \psi,$$

откуда

$$-\frac{\partial \tilde{\xi}}{\partial \varphi} \frac{\partial \tilde{\eta}}{\partial \psi} = \frac{\cos^2 \tilde{r} \cos \varphi \sin^2 \psi \sin^2 \tilde{\eta}}{\sin \tilde{r} \sin \tilde{\xi}};$$

определитель взят со знаком «—», потому что, когда переменные ξ и η при интегрировании увеличиваются ($\tilde{\xi}$ и $\tilde{\eta}$ уменьшаются), то φ увеличивается, а ψ уменьшается. Вводя в выражение для $d^2\sigma$ (20) этот множитель, получим для элемента площади формулу:

$$d^2\sigma = -k^2 \frac{d\varphi d\psi \cos^2 \tilde{r} \sin \tilde{\xi} \sin^2 \tilde{\eta} \cos \varphi \sin^2 \psi}{\sin^3 \tilde{r} \sqrt{\sin^2 \tilde{\xi} \sin^2 \tilde{\eta} - \sin^2 \tilde{r}}}, \quad (27)$$

которую нужно выразить еще в координатах φ и ψ , т. е. выразить $\sin \tilde{\xi}$ и $\sin \tilde{\eta}$ через φ и ψ . В силу уравнений (26)

$$\begin{aligned} \sin^2 \tilde{\eta} &= \frac{1}{1 + \operatorname{ctg}^2 \tilde{\eta}} = \frac{\operatorname{tg}^2 \tilde{r}}{\operatorname{tg}^2 \tilde{r} + \cos^2 \psi} = \\ &= \frac{\sin^2 \tilde{r}}{\sin^2 \tilde{r} + \cos^2 \psi \cos^2 \tilde{r}} = \frac{\sin^2 \tilde{r}}{1 - \sin^2 \psi \cos^2 \tilde{r}}. \end{aligned} \quad (28)$$

Отсюда

$$\frac{\sin^2 \tilde{\xi} \sin^2 \tilde{\eta}}{\sin^2 \tilde{r}} = \frac{\sin^2 \tilde{\xi}}{1 - \sin^2 \psi \cos^2 \tilde{r}};$$

составляя производную пропорцию и учитывая (26), получим:

$$\frac{\sin^2 \tilde{\xi} \sin^2 \tilde{\eta} - \sin^2 \tilde{r}}{\sin^2 \tilde{\xi} \sin^2 \tilde{\eta}} = \frac{\sin^2 \psi \cos^2 \tilde{r} - \cos^2 \tilde{\xi}}{\sin^2 \tilde{\xi}} = \frac{\cos^2 \tilde{r} \sin^2 \psi \cos^2 \varphi}{\sin^2 \tilde{\xi}}.$$

И потому

$$\sqrt{\sin^2 \tilde{\xi} \sin^2 \tilde{\eta} - \sin^2 \tilde{r}} = \cos \tilde{r} \sin \psi \cos \varphi \sin \tilde{\eta}.$$

Подставляя в формулу (27) это выражение радикала и выражение (28) вместо $\sin^2 \tilde{\eta}$, получим окончательно:

$$\begin{aligned} d^2\sigma &= \frac{-k^2 d\varphi d\psi \cos^2 \tilde{r} \sin \tilde{\xi} \sin \psi}{\sin \tilde{r} (1 - \sin^2 \psi \cos^2 \tilde{r})} = \\ &= -k^2 d\varphi d\psi \frac{\cos^2 \tilde{r}}{\sin \tilde{r}} \cdot \frac{\sqrt{1 - \cos^2 \tilde{r} \sin^2 \psi \sin^2 \varphi}}{1 - \cos^2 \tilde{r} \sin^2 \psi} \sin \psi; \end{aligned}$$

вместе с тем поверхность всей сферы выразится двойным интегралом:

$$\Sigma = 8 \frac{k^2 \cos^2 \tilde{r}}{\sin \tilde{r}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi d\psi \sin \psi \sqrt{1 - \cos^2 \tilde{r} \sin^2 \psi \sin^2 \varphi}}{1 - \cos^2 \tilde{r} \sin^2 \psi}.$$

Принимая же во внимание найденное выше выражение (CXIII) (стр. 459) поверхности сферы, найдем значение этого двойного интеграла:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi d\psi \sin \psi \sqrt{1 - \cos^2 \tilde{r} \sin^2 \varphi \sin^2 \psi}}{1 - \cos^2 \tilde{r} \sin^2 \psi} = \frac{\pi}{2 \sin \tilde{r}}. \quad (29)$$

8. Приведение двойного интеграла (29) к одной квадратуре. Полученный двойной интеграл Лобачевский приводит к одной квадратуре. Он употребляет для этого оригинальный прием. Он теперь рассматривает r , как переменную, заменяет в обеих частях равенства $\tilde{r}$ через $\frac{\pi}{2} - \tilde{r}$ и умножает их на $\cos \tilde{r} d\tilde{r}$; интегрированием по $\tilde{r}$ от 0 до $\tilde{r}$ он получает:

$$\frac{\pi \tilde{r}}{2} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\psi \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\tilde{r}} d\tilde{r} \frac{\cos \tilde{r} \sin \psi \sqrt{1 - \sin^2 \tilde{r} \sin^2 \varphi \sin^2 \psi}}{1 - \sin^2 \tilde{r} \sin^2 \psi}. \quad (30)$$

Если положим $\sin \tilde{r} \sin \psi = u$, то интегрирование по u приводит к разысканию интеграла

$$\frac{\pi \tilde{r}^2}{2} = \int_0^{\tilde{r}} \frac{\sqrt{1 - u^2 \sin^2 \varphi}}{1 - u^2} du,$$

который явно выражается в элементарных функциях¹⁾. По выполнении интегрирования получаем:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi d\psi \sin \tilde{r} \sin \psi}{\sqrt{1 - \sin^2 \tilde{r} \sin^2 \varphi \sin^2 \psi}}.$$

Но и интегрирование по ψ явно выполняется, что, после несложных преобразований, приводит это равенство (30) к виду:

$$\pi \tilde{r} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sin \varphi} \ln \frac{1 + \sin \tilde{r} \sin \varphi}{1 - \sin \tilde{r} \sin \varphi}.$$

Полагая же теперь $\varphi = \Pi(x)$, находим [учитывая (XXII₁) (стр. 294) и (LXXVI) (стр. 358)]:

$$\pi \tilde{r} = \int_0^{\infty} dx \ln \frac{e^{2x} + 1 + 2e^x \sin \tilde{r}}{e^{2x} + 1 - 2e^x \sin \tilde{r}}.$$

Правую часть интегрируем по частям. Проинтегрированная часть

$$x \ln \frac{e^{2x} + 1 + 2e^x \sin \tilde{r}}{e^{2x} + 1 - 2e^x \sin \tilde{r}}$$

обращается в нуль как при $x=0$, так и при $x=\infty$. Получим поэтому:

$$\frac{\pi \tilde{r}}{4 \sin \tilde{r}} = \int_0^{\infty} \frac{(e^{2x} - 1) e^x dx}{e^{4x} + 2e^{2x} \cos 2\tilde{r} + 1},$$

¹⁾ Для упрощения вычисления Лобачевский очень удачно пользуется возникающей здесь эллиптической функцией. А. П. Котельников в комментариях к сочинению «О началах геометрии» дает непосредственный вывод этого интеграла.

или, обозначая $\tilde{r}$ через α ,

$$\int_0^{\infty} \frac{(e^x - e^{-x}) x dx}{e^{2x} + e^{-2x} + 2 \cos 2\alpha} = \frac{\pi \alpha}{4 \sin \alpha}, \quad (31)$$

— интеграл, значение которого, как замечает Лобачевский, было известно только при $\alpha = \frac{\pi}{2}$. Именно, в этом случае знаменатель равен $(e^x - e^{-x})^2$ и по сокращении мы получаем:

$$\int_0^{\infty} \frac{e^x x dx}{e^{2x} - 1} = \frac{\pi^2}{8}.$$

Лобачевским найдено, таким образом, значение нового интеграла (31).

9. Отзыв Остроградского. Однако к формуле (31) Лобачевский пришел, обозначая через α угол $\Pi(r)$, который по своему значению не может превышать $\frac{\pi}{2}$. Это совершенно ясно, но Лобачевский явно этого не оговорил. Между тем Остроградский в своем рапорте Академии Наук иронически заявляет, что результат неверен, ибо при $\alpha > \frac{\pi}{2}$ он несправедлив. Интеграл представляет собой периодическую функцию от α с периодом, равным π ; в случае, если $\alpha > \frac{\pi}{2}$, как указывает Остроградский, α следует заменить через $\pi - \alpha$, тогда получим:

$$\int_0^{\infty} \frac{(e^x - e^{-x}) x dx}{e^{2x} + e^{-2x} + 2 \cos 2\alpha} = \frac{\pi (\pi - \alpha)}{4 \sin \alpha}.$$

Остроградский в своем отзыве¹⁾ сам говорит, что рассуждений Лобачевского, относящихся к «воображаемой геометрии», он не понял; он не усмотрел поэтому, что в выводе Лобачевского α , по существу, означает острый угол. Утверждение, что результат, полученный Лобачевским, неправилен, совершенно несправедливо.

10. Выражение элемента объема в гиперболическом пространстве. Вычисление объемов тел в гиперболическом пространстве основано на том положении, что объем тела, линейные размеры которого бесконечно малы, выражается через соответствующие элементы так же, как в евклидовом пространстве²⁾.

Пусть M и M' — две точки тела с декартовыми координатами (ξ, η, ζ) и $(\xi + d\xi, \eta + d\eta, \zeta + d\zeta)$ (черт. 325). Проектируя их на плоскость $\Xi\mathcal{N}$, получим точки m и m' с координатами (ξ, η) и $(\xi + d\xi, \eta + d\eta)$; проектируя же последние на ось Ξ , получим на ней точки m_0 и m'_0 с абсциссами ξ и $\xi + d\xi$. По ним построим четырехугольники Саккери $m_0 m q m'_0$ и $m_0 q' m' m'_0$ с общим нижним основанием $m_0 m'_0$ ($d\xi$) и боковыми сторонами — для первого $m_0 m$ (η) и для второго $m_0 q'$ ($\eta + d\eta$). Бесконечно-малый четырехугольник $m q m' q'$ можно с обычным приближением при-

¹⁾ Л. Б. Модзалевский [138].

²⁾ О том, насколько это положение обосновано, см. в конце настоящего параграфа, стр. 467.

нимать за прямоугольник со сторонами $\frac{d\xi}{\sin \tilde{\eta}}$ и $d\eta$. Из вершин этого четырехугольника восстанавливаем перпендикуляры к его плоскости и на них откладываем отрезки $mM = q'N = m'P = qQ = \zeta$ и $mP' = q'Q' = m'M' = qN' = \zeta + d\zeta$; образуется многогранник $MNPQP'Q'M'N'$, который

можно принимать за прямоугольный параллелепипед; но основание $MNPQ$ имеет стороны

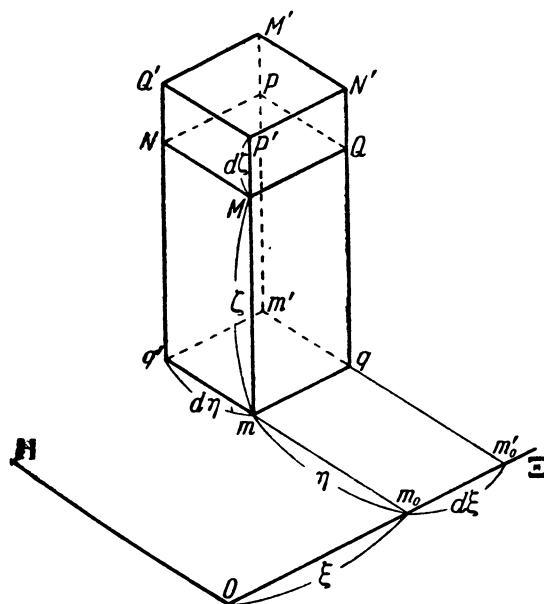
$$\frac{d\eta}{\sin \tilde{\zeta}} \text{ и } \frac{d\xi}{\sin \tilde{\eta} \sin \tilde{\zeta}} \left(m q = \frac{d\xi}{\sin \tilde{\eta}} \right),$$

а высота его равна $d\zeta$. Поэтому объем этого параллелепипеда — элемент объема всего тела — равен

$$\frac{d\xi d\eta d\zeta}{\sin \tilde{\eta} \sin^2 \tilde{\zeta}}. \quad (\text{CXIV})$$

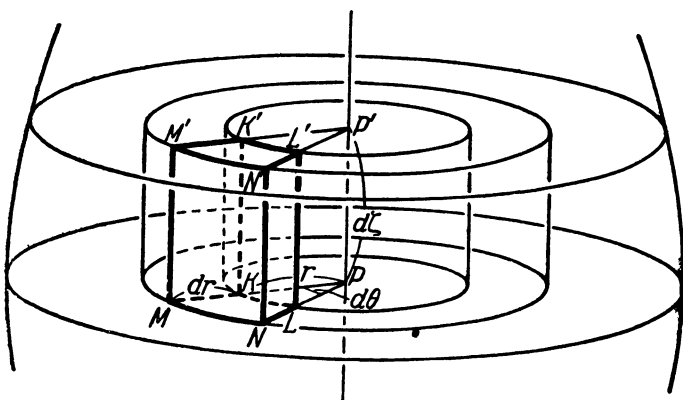
Интегрируя это выражение в надлежащих пределах, получим объем рассматриваемого тела.

Если имеем дело с телом вращения, то целесообразно воспользоваться другими координатами, которые приводят к специальной, более простой, формуле элемента объема.



Черт. 325.

11. Вычисление объема тела вращения. В этом случае определим сначала объем слоя, заключенного между двумя близкими сечениями, находящимися одно от другого на расстоянии $d\zeta$ по оси вращения (черт. 326).



Черт. 326.

Разобьем объем тела вращения на бесконечно малые кольца цилиндрическими поверхностями, имеющими PP' общей осью; одно из таких колец изображено на чертеже. Это кольцо мы снова разобьем на элементы

плоскостями $MM'P'P$, $NN'P'P$ и т. д., образующими бесконечно-малые углы $d\theta$. Объем элемента $MKLN'M'K'L'N'$ равен, очевидно, произведению $KM \cdot KL \cdot KK'$. Обозначая через r внутренний радиус PK кольца, будем иметь:

$$KM = dr, \quad KL = k \operatorname{ctg} \tilde{r} d\theta, \quad KK' = \frac{PP'}{\sin \tilde{r}} = \frac{d\tilde{r}}{\sin \tilde{r}}.$$

Поэтому объем элемента равен:

$$k \frac{\cos \tilde{r} dr d\tilde{r} d\theta}{\sin^2 \tilde{r}}.$$

Интегрируя это выражение по θ от 0 до 2π , найдем выражение для объема кольца:

$$\frac{2\pi k \cos \tilde{r} dr d\tilde{r}}{\sin^2 \tilde{r}} = - \frac{2\pi k^2 \cos \tilde{r} d\tilde{r} d\tilde{r}}{\sin^2 \tilde{r}}.$$

Интегрируя же это выражение по r от 0 до ρ (или по $\tilde{r}$ от $\frac{\pi}{2}$ до $\tilde{\rho}$), где ρ — радиус сечения, мы найдем объем бесконечно тонкого слоя:

$$dv = \pi k^2 d\tilde{r} \left| \frac{1}{\sin^2 \tilde{r}} \right|_{\frac{\pi}{2}}^{\tilde{\rho}} = \pi k^2 \operatorname{ctg}^2 \tilde{\rho} d\tilde{r}. \quad (\text{CXV})$$

Чтобы найти объем конечного слоя тела вращения, необходимо выразить радиус сечения ρ в зависимости от $\tilde{r}$ и интегрировать это выражение по $\tilde{r}$. Когда тело вращения представляет собой шар радиуса a , а плоскость $ЕН$ проходит через его центр, то $\sin \tilde{\rho} = \frac{\sin \tilde{a}}{\sin \tilde{r}}$. Поэтому

$$dv = \frac{\pi k^2}{\sin^2 \tilde{a}} (\sin^2 \tilde{r} - \sin^2 \tilde{a}) d\tilde{r} = -\pi k^2 \left(k \frac{\sin \tilde{r} d\tilde{r}}{\sin^2 \tilde{a}} + d\tilde{r} \right).$$

Интегрируя это выражение от $\tilde{\zeta}_0$ до $\tilde{\zeta}_1$, найдем объем сферического слоя, который заключен между двумя параллелями, отстоящими от центра на расстояния $\tilde{\zeta}_0$ и $\tilde{\zeta}_1$:

$$v = \pi k^2 \left(k \frac{\cos \tilde{\zeta}_1 - \cos \tilde{\zeta}_0}{\sin^2 \tilde{a}} - \tilde{\zeta}_1 + \tilde{\zeta}_0 \right).$$

Полагая же здесь $\tilde{\zeta}_0 = 0$ и $\tilde{\zeta}_1 = a$ и удваивая результат, найдем объем шара:

$$V = 2\pi k^2 \left(k \frac{\cos \tilde{a}}{\sin^2 \tilde{a}} - a \right) = \pi k^2 (k \operatorname{ctg} \tilde{a} - d), \quad (\text{CXVI})$$

где $d = 2a$ есть диаметр шара.

12. Вычисление объема прямого кругового конуса. Если данное тело представляет собой прямой круговой конус, то расстояние $\tilde{r}$ можно отсчитывать по оси от вершины (черт. 327). Если обозначим через α угол между осью и образующей конуса, то из треугольника $СЕК$ найдем:

$$\cos \tilde{\rho} = \operatorname{ctg} \tilde{r} \operatorname{tg} \alpha.$$

Поэтому, по формуле (CXV),

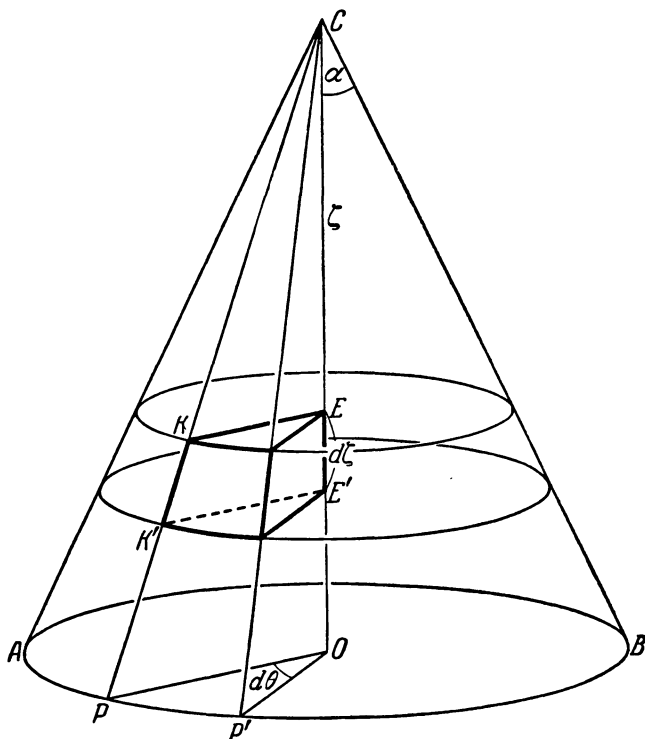
$$dv = \frac{\pi k^2 \operatorname{ctg}^2 \tilde{\zeta} \operatorname{tg}^2 \alpha d\tilde{\zeta}}{1 - \operatorname{ctg}^2 \tilde{\zeta} \operatorname{tg}^2 \alpha} = \frac{\pi k^2 d\tilde{\zeta}}{1 - \operatorname{ctg}^2 \tilde{\zeta} \operatorname{tg}^2 \alpha} - \pi k^2 d\tilde{\zeta}$$

и, следовательно, объем прямого кругового конуса, имеющего высоту ζ и угол при вершине α , равен:

$$v = \pi k^2 \int_0^{\zeta} \frac{d\tilde{\zeta}}{1 - \operatorname{ctg}^2 \tilde{\zeta} \operatorname{tg}^2 \alpha} - \pi k^2 \zeta.$$

Чтобы раскрыть эту квадратуру, заметим, что

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{\zeta}}{1 - \operatorname{ctg}^2 \tilde{\zeta} \operatorname{tg}^2 \alpha} &= \frac{\sin^2 \tilde{\zeta} d\tilde{\zeta}}{\sin^2 \tilde{\zeta} - \cos^2 \tilde{\zeta} \operatorname{tg}^2 \alpha} = \\ &= \frac{\cos^2 \alpha \sin^2 \tilde{\zeta} d\tilde{\zeta}}{\cos^2 \alpha - \cos^2 \tilde{\zeta}} = - \frac{k \cos^2 \alpha \sin \tilde{\zeta} d\tilde{\zeta}}{\cos^2 \alpha - \cos^2 \tilde{\zeta}} = \frac{k \cos \alpha}{2} \left(\frac{d \cos \tilde{\zeta}}{\cos \alpha + \cos \tilde{\zeta}} + \frac{d \cos \tilde{\zeta}}{\cos \alpha - \cos \tilde{\zeta}} \right). \end{aligned}$$



Черт. 327.

Интегрируя это выражение по $\tilde{\zeta}$ в пределах от $\frac{\pi}{2}$ до $\tilde{\zeta}$, получаем:

$$\int_0^{\zeta} \frac{d\tilde{\zeta}}{1 - \operatorname{ctg}^2 \tilde{\zeta} \operatorname{tg}^2 \alpha} = \frac{k \cos \alpha}{2} \ln \frac{\cos \alpha + \cos \tilde{\zeta}}{\cos \alpha - \cos \tilde{\zeta}}.$$

Заметим, однако, что из треугольника POC имеем, согласно уравнению (XXVI₆) (стр. 297):

$$\cos \tilde{\zeta} = \cos l \cos \alpha,$$

где l — образующая конуса. Подставляя это в предыдущее выражение,

и учитывая основную формулу (XXIII) (стр. 294), найдем:

$$\int_0^{\tilde{l}} \frac{d\tilde{l}}{1 - \operatorname{ctg}^2 \alpha \operatorname{ctg}^2 \tilde{l}} = \frac{k \cos \alpha}{2} \ln \frac{1 + \cos \tilde{l}}{1 - \cos \tilde{l}} = k \cos \alpha \ln \operatorname{ctg} \frac{1}{2} \tilde{l} = l \cos \alpha.$$

Следовательно, обозначая высоту конуса через h ,

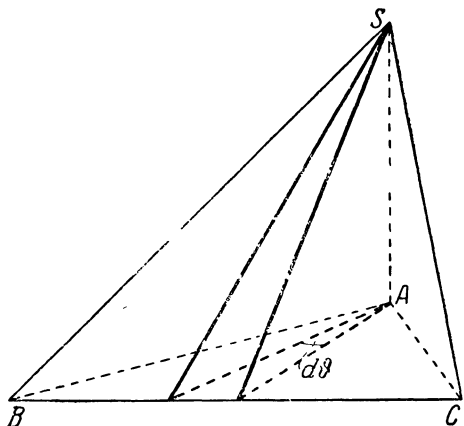
$$v = \pi k^2 (l \cos \alpha - h). \quad (\text{CXVII})$$

13. Вычисление объема пирамиды. Формула (CXVII) выражает объем всего конуса. Легко видеть, однако, что часть этого конуса, заключенная между двумя положениями образующего треугольника PCO и $P'CO$, составляющими весьма малый угол $d\theta$, относится к объему всего конуса, как $d\theta$ к 2π ; поэтому этот элемент конуса равен:

$$dv = \frac{k^2}{2} d\theta (l \cos \alpha - h).$$

Если мы себе представим, что наш конус — не круговой, то бесконечно-малую часть его все же можно считать элементом кругового конуса, так как такое допущение даст погрешность бесконечно-малую по отношению к dv . Но в таком случае как l , так и α будут изменяться при передвижении точки P по периферии основания. Если эта кривая нам известна, то мы можем выразить как l , так и α в зависимости от угла θ , который плоскость PCO образует с неподвижной плоскостью ACO . Интегрируя тогда предыдущее выражение по θ в надлежащих пределах, получим объем конуса:

$$v = \frac{k^2}{2} \int (l \cos \alpha - h) d\theta. \quad (\text{CXVII}_1)$$



Черт. 328.

Всякая пирамида, очевидно, может быть рассматриваема как такой конус; но квадратуры, к которым мы при этом приходим, не раскрываются. Интеграл этот Лобачевский применяет к «прямоугольному тетраэдру», т. е. к такому тетраэдру, в котором высота служит одним из его ребер (черт. 328).

Было сделано немало попыток выразить объем тетраэдра через его двугранные, трехгранные и линейные углы. Однако эти попытки к цели не привели. Во всяком случае, не подлежит сомнению, что такого предложения, которое непосредственно аналогично теореме об угловом дефекте в гиперболической плоскости (или угловом избытке на сфере) не существует¹⁾.

Положение о том, что объем бесконечно-малого параллелепипеда в гиперболическом пространстве выражается по формулам евклидовой геометрии, мы здесь не можем считать вполне обоснованным. Это положение оправдывается более сложными соображениями, основанными на идеях Б. Римана [118] (об этом подробнее будет сказано во второй части настоящего сочинения).

¹⁾ Об этом подробнее см. Ф. Клейн [137], стр. 224.

§ 57. ЕЩЕ К ПРЕДИСТОРИИ НЕЕВКЛИДОВОЙ ГЕОМЕТРИИ

1. Геометрические работы Лобачевского. Геометрические работы Лобачевского распадаются на две категории. Одни из них посвящены детальной разработке созданной им неевклидовой геометрии и ее аналитическим приложениям. Сюда относятся упомянутая уже выше работа «О началах геометрии» (1829)^[86], «Воображаемая геометрия» (1835)^[138], «Применение воображаемой геометрии к некоторым интегралам» (1836)^[139] и отчасти также его последняя работа «Пангеометрия» (1855)^[140]. Другие работы: обширное сочинение «Новые начала геометрии с полной теорией параллельных» (1835—1838)^[64] и краткая брошюра «Геометрические исследования по теории параллельных линий»^[68], опубликованная на немецком языке в 1840 г., посвящены детальной разработке начал геометрии как евклидовой, так и неевклидовой и возможно более доступному изложению последней¹⁾.

В предыдущих главах изложены основы гиперболической геометрии в тех пределах, в которых она построена Н. И. Лобачевским и, в общем, теми методами, которыми Лобачевский ее строил. От его приемов и способов вычисления мы уклонялись лишь там, где более поздние работы внесли существенные упрощения, более широкую постановку вопроса или дополнения основных его идей. По существу, здесь изложена «воображаемая геометрия» Лобачевского.

Основной доклад Лобачевского физико-математическому факультету Казанского университета, содержавший уже обстоятельное изложение его «воображаемой геометрии», как указано выше (§ 16, рубр. 4, стр. 151), был сделан 11(23) февраля 1826 г. Мемуар же о «Началах геометрии», содержавший развитие этого доклада, был опубликован в «Ученых записках Казанского университета» в 1829—1830 гг. Никаких работ, содержащих эти идеи, до Лобачевского опубликовано не было. Лобачевскому принадлежит, таким образом, неоспоримый приоритет создания и опубликования неевклидовой геометрии.

Но, как было указано в конце § 16 (стр. 153), после смерти Лобачевского обнаружилось, что к исходным его идеям близко подходили и другие геометры. Однако там же было указано, что выяснить соотношения между этими различными авторами возможно только на базе уже усвоенной неевклидовой геометрии. Именно здесь, после обстоятельного изложения геометрии Лобачевского, будет уместно к этому вопросу возвратиться.

2. Работы Гаусса. Гаусс при жизни не опубликовал ничего по неевклидовой геометрии. Однако после его смерти (1855 г.) из опубликованной его переписки с друзьями выяснилось, что эти идеи были ему близки, что он много размышлял над теорией параллельных линий и пришел к выводам, которые привели его, по его же словам, к неевклидовой геометрии.

Различные ученики и друзья Гаусса сообщали ему свои соображения и сомнения, относившиеся к теории параллельных линий. Обычно это были попытки доказать V постулат Евклида. В ответных письмах Гаусс указывал своим корреспондентам допущенную ими погрешность и иногда, в связи с этим, более близким друзьям конфиденциально сообщал свои собственные взгляды на этот вопрос. Наиболее интересным является его

¹⁾ Более обстоятельное изложение содержания каждой из этих работ можно найти в сочинении В. Ф. Кагана «Лобачевский»^[85].

письмо к молодому математику Тауринусу от 8 ноября 1824 г. ([⁷⁰], стр. 186). Существенную часть этого письма Гаусса мы здесь приводим в переводе.

«Допущение, что сумма трех углов треугольника меньше 180° , приводит к своеобразной, совершенно отличной от нашей (евклидовой) геометрии; эта геометрия совершенно последовательна, и я развил ее для себя совершенно удовлетворительно; я имею возможность решить в этой геометрии любую задачу, за исключением определения некоторой постоянной, значение которой а priori установлено быть не может. Чем большее значение мы придадим этой постоянной, тем ближе мы подойдем к евклидовой геометрии, а бесконечно большое ее значение приводит обе системы к совпадению. Предложения этой геометрии отчасти кажутся парадоксальными и непривычному человеку—даже несуразными; но при строгом и спокойном размышлении оказывается, что они не содержат ничего невозможного. Так, например, все три угла треугольника можно сделать сколь угодно малыми, если только взять достаточно большие стороны; площадь же треугольника не может превысить, даже не может достичь некоторого предела, как бы велики ни были его стороны. Все мои старания найти в этой неевклидовой геометрии противоречие или непоследовательность остались бесплодными, и единственно, что в этой системе противится нашему разуму, это то, что в пространстве, если бы эта система была справедлива, должна была бы существовать некоторая сама по себе определенная (хотя нам и неизвестная) линейная величина. Но мне кажется, что мы, кроме ничего не выражающей словесной мудрости метафизиков, знаем очень мало или даже не знаем ничего о сущности пространства; мы не можем смешивать того, что нам представляется естественным, с абсолютно невозможным. Если бы неевклидова геометрия была истинна, и упомянутая выше постоянная находилась бы в определенном отношении к таким величинам, которые доступны нашему измерению на небе или на земле, то ее можно было бы определить а posteriori. Я поэтому иногда в шутку высказывал желание, чтобы евклидова геометрия не была истинной, потому что мы тогда имели бы а priori абсолютную меру длины».

Всякому, кто усвоил основы неевклидовой геометрии, совершенно ясно, что Гаусс действительно владел начальными ее идеями. Более того, в отдельных его письмах и пометках приведены различные предложения и формулы, подтверждающие, что Гаусс довольно глубоко проник в основные начала неевклидовой геометрии. Весь этот материал, сохранившийся в литературном наследии Гаусса, ныне собран и опубликован в VIII томе полного собрания его сочинений [⁷⁰]¹⁾. Однако даже Ф. Клейн в своем Эрлангенском докладе²⁾ говорит, что материалы, оставленные Гауссом, содержат «только отрывочные начатки неевклидовой геометрии». Это, впрочем, не мешало Клейну утверждать, что авторы, пришедшие к неевклидовой геометрии — в том числе и Лобачевский, — заимствовали ее идеи у Гаусса. Это безусловно неправильное утверждение, опровергнутое Энгелем, Штекелем и другими, конечно, не имеет под собой основания³⁾. Впрочем,

¹⁾ Обстоятельный разбор этих материалов можно найти в монографии Штекеля [¹⁴¹], приложенной к X тому сочинений Гаусса и выпущенной также отдельным изданием.

²⁾ Об этом докладе будет подробно сказано во второй части настоящего сочинения.

³⁾ Об этом см. В. Ф. Каган «Лобачевский» [⁸⁵].

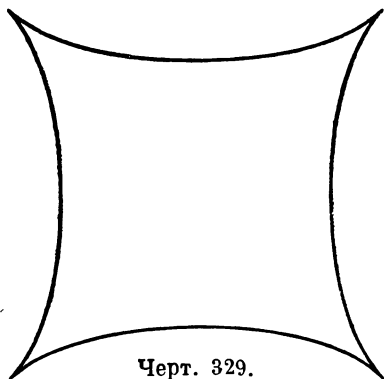
повидимому, и Клейн впоследствии от него отказался. Письмо Гаусса к Тауринусу, которое мы привели выше почти целиком, заканчивается так:

«Относительно человека, который обнаружил глубокий математический ум, я не опасаясь, что он дурно поймет изложенное выше; но во всяком случае Вы должны смотреть на это как на частное сообщение, которое отнюдь не должно быть опубликовано».

На этом требовании сохранить высказанные им взгляды в тайне Гаусс настаивал в письмах ко всем своим корреспондентам, которым он об этих взглядах сообщал. Когда же Тауринус в предисловии к опубликованной им брошюре по теории параллельных линий ^[142] позволил себе, отнюдь не выдавая взглядов Гаусса, просить его опубликовать свои воззрения на этот предмет, то Гаусс прекратил с ним всякую переписку. Это привело Тауринуса в глубокое отчаяние; в конце своей жизни он сжег сохранившиеся у него экземпляры выпущенной им брошюры, о которой мы скажем ниже.

3. Работы Швейкарта и Тауринуса. Обращаясь к Тауринусу, необходимо, однако, этому предпослать мысли Ф. Швейкарта, у которого он свои идеи заимствовал. С 1812 по 1817 г. в Харькове состоял профессором правовых наук приглашенный из Германии Фердинанд Швейкарт. Отнюдь нередким явлением было, что люди, по основной своей специальности далекие от математики, посвящали ей — главным образом элементарным ее вопросам — свой досуг. Швейкарт охотно занимался геометрией и еще раньше, до переезда в Россию, заинтересовался теорией параллельных линий; в 1807 г. он опубликовал брошюру ^[143], содержащую доказательство V постулата. Убедившись затем в неправильности этого доказательства, Швейкарт, размышляя об этом во время своего пребывания в Харькове, пришел, по существу, к тем же воззрениям, которых придерживался Гаусс. Переехав затем в Кенигсберг, Швейкарт препроводил через своего товарища, профессора астрономии Герлинга, Гауссу заметку следующего содержания:

«Существует двойкая геометрия: геометрия в узком смысле слова и звездная (astralische). Треугольники последней геометрии



Черт. 329.

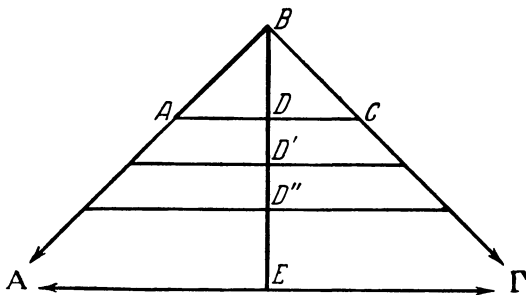
имеют ту особенность, что сумма трех их углов не равна двум прямым. Принимая это, можно самым точным образом доказать следующее: а) что сумма трех углов треугольника меньше двух прямых; б) что сумма эта тем меньше, чем больше площадь треугольника; в) что высота равнобедренного прямоугольного треугольника, постоянно возрастающая с возрастанием боковых сторон, не может превзойти некоторой линии, которую я называю константой. Квадраты имеют поэтому следующий вид (черт. 329).

Если эта константа для нас равна радиусу Земли (в каком случае всякая линия, проведенная в пространстве от одной неподвижной звезды к другой, отстоящей от нее на 90° , была бы касательной к земному шару), то она бесконечно велика по сравнению с протяжениями, которые мы встречаем в повседневной жизни. Евкли-

дова геометрия имеет место только в том случае, если константа бесконечно велика. Только в этом случае сумма углов каждого треугольника равна двум прямым, и это легко доказать, если принять, что константа бесконечно велика».

Читателю, владеющему уже неевклидовой геометрией, совершенно ясно, что Швейкарт пришел к исходным положениям гиперболической геометрии. Его утверждения а) и б) в этом отношении совершенно ясны; утверждения, содержащиеся в рубрике с), требуют некоторого пояснения.

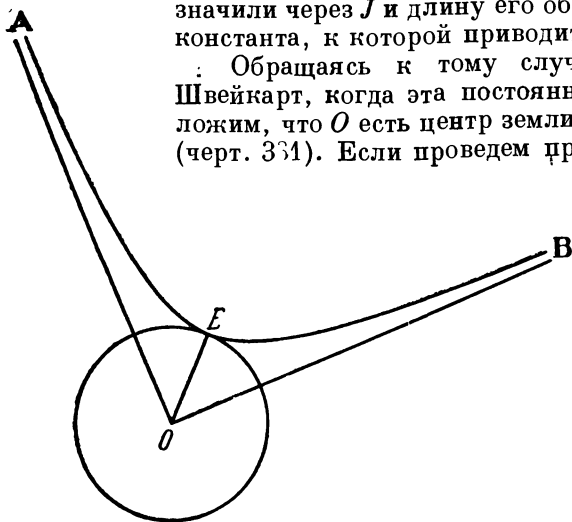
Пусть ABC будет равнобедренный треугольник (черт. 330) с прямым углом при вершине B , BD — его высота; если из точек D' , D'' и т. д. на продолжении BD восставить к BD перпендикуляры, то



Черт. 330.

они сначала будут пересекать прямые BA и BC ; но в точке E , конечной точке отрезка BE параллельности, соответствующего углу ABE в 45° , перпендикуляр AE становится параллельным прямым BA и BC . Здесь BE и есть та предельная прямая — константа, о которой говорит Швейкарт. Ясно, что это есть тот же постоянный отрезок, который мы в § 20, рубр. 6 (стр. 179) обозначили через J и длину его обозначили константой j . Это — константа, к которой приводит гиперболическая геометрия.

Обращаясь к тому случаю, который рассматривает Швейкарт, когда эта постоянная равна радиусу земли, положим, что O есть центр земли, E — точка на ее поверхности (черт. 331). Если проведем прямые OA и OB под углами в



Черт. 331.

45° к OE , то они будут «гиперболически параллельны» EA и EB : они будут встречать прямую AB в бесконечности. Если мы представим себе в точках A и B по звезде, то они будут удалены одна от другой на 90° . Соединяющая же их прямая AB будет служить касательной к поверхности земли.

«Заметка проф. Швейкарта, — писал Гаусс Герлингу, — доставила мне чрезвычайно много удовольствия,

и я прошу передать ему от меня по этому поводу самый лучший отзыв».

Швейкарт, однако, не развивал дальше своих исследований, но сообщил о них своему племяннику Тауринусу, молодому математику, о котором речь шла выше. Последний с увлечением занялся теорией параллельных линий. Однако, усвоить взгляды Швейкарта он не мог. В 1824 г. Тауринус обратился к Гауссу с письмом, в котором изложил ему результаты своих исследований. В этом письме содержится доказательство

того, что сумма двух углов треугольника не может быть больше двух прямых, после чего он замечает: «Я полагаю, что можно доказать также, что сумма углов треугольника не может быть меньше двух прямых, т. е. что она непременно равна двум прямым; из этого же вытекает постулат Евклида». Ответ Гаусса выше приведен почти целиком.

Ободренный в некоторой мере отзывом Гаусса, Тауринус продолжал свои исследования и в 1825 г. опубликовал брошюру^[142], содержание которой очень близко подходит к исследованиям Саккери. Как и последний, он отнюдь не допускает, что можно принять геометрию, отличную от евклидовой; однако он приходит к тому, что, отвергая V постулат, мы вынуждены ввести в геометрию параметр, характеризующий пространство; что возможно, таким образом, бесчисленное множество различных геометрических систем; что никакое значение постоянной не может иметь преимущества пред другими. Получив эти результаты, Тауринус полагает, что он этим доказал постулат. Однако он в этом явно не ушел дальше Швейкарта. Сознавая это, он продолжал работать в этом направлении и через год опубликовал новую брошюру^[144]. Оставаясь, по существу, при прежнем своем взгляде, Тауринус ведет, однако, далее выводы, которые можно получить, отвергая постулат. Здесь скорее своеобразной интуицией, чем строгим рассуждением, он приходит фактически к тригонометрии гиперболического пространства и замечает, что основные ее уравнения можно получить из уравнений сферической тригонометрии, замещающей действительные аргументы мнимыми.

Тауринус надеялся, что его исследования встретят сочувствие у математиков. Но друзья, которым он разослал свои работы, их не поняли, а Гаусс, на котором были сосредоточены все его надежды, упорно не отвечал на его письма. Это привело Тауринуса к состоянию, в котором он уничтожил все сохранившиеся у него экземпляры своей брошюры. Энгелю, однако, удалось разыскать экземпляр; он воспроизвел эту работу Тауринуса в своих «Первоисточниках»^[81].

4. «Аппендикс» Иоанна Больаи. Если Саккери, Ламберта, Швейкарта, Тауринуса следует относить к предшественникам создания неевклидовой геометрии, то Иоанн Больаи стоял ближе к ее созданию. Часто его и Гаусса называют вместе с Лобачевским творцами неевклидовой геометрии; однако приоритет Лобачевского не подлежит никакому сомнению (см. стр. 468, 474).

В студенческие годы в Гёттингене Гаусс ближе всех сошелся с талантливым венгерским студентом Вольфгангом Больаи. Вскоре после окончания курса в Гёттингене молодой Больаи был назначен профессором математики и физики в реформатской коллегии в Марош-Вашаргелли. Он опубликовал несколько математических сочинений, представляющих собой по большей части учебники элементарной и высшей математики. Важнейший из них, выпущенный в 1832 г., называется «Опыт руководства для введения любознательного юношества в основы чистой математики, элементарной и высшей, наглядным методом; с тремя приложениями»^[145].

В. Больаи всю жизнь очень интересовался обоснованием математики вообще, геометрии в частности, и посвятил много труда доказательству V постулата; он дважды посылал Гауссу придуманные им доказательства постулата; Гаусс в ответных письмах указывает его ошибки, высказывая, однако, при этом еще надежду пробраться «через рифы теории параллельных линий». В. Больаи не переставал заниматься параллельными линиями. В 1802 г. у Больаи родился сын Иоанн. Мальчик рано стал обнаруживать

математические дарования, отец лично руководил его занятиями по математике. В 1822 г. Иоанн окончил коллегию; отец хотел, чтобы он продолжал свое образование в Гёттингене под наблюдением и руководством Гаусса. Однако, Гаусс не пошел этому навстречу, и Иоанн поступил в военно-инженерную академию в Вене, где жил и учился на казенный счет. В следующем 1823 г. он был произведен в лейтенанты и был назначен в небольшой город Темешвар.

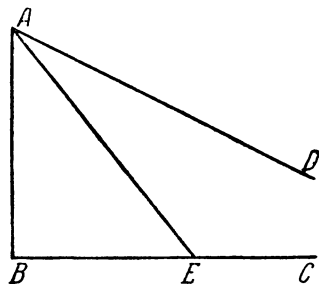
Здесь в уединении Иоанн с увлечением занялся доказательством постулата о параллельных. Зная по собственному опыту, насколько бесплодны эти усилия, Вольфганг старался удержать сына от этих занятий, но безуспешно. В 1823 г. Иоанн писал отцу:

«Я твердо решил опубликовать работу о параллельных линиях, как только я приведу материал в порядок и обстоятельства позволят мне это сделать. В настоящее время я еще не достиг цели; но путь, по которому я пошел, почти наверное обещает привести к этой цели, если это только вообще возможно. Я не достиг цели, но я получил такие замечательные результаты, что было бы чрезвычайно жаль, если бы они погибли. Когда Вы с ними познакомитесь, Вы это сами признаете; пока скажу только, что я из ничего создал новый мир».

Этим новым миром была неевклидова геометрия.

Прошло, однако, почти 10 лет, прежде чем это произведение увидело свет. Обработав свои исследования, Иоанн Больаи издал их в

виде приложения к сочинению отца ^[145] под названием «Приложение, содержащее абсолютно истинное учение о пространстве, т. е. не зависящее от правильности или ложности XI аксиомы Евклида, что никогда не может быть решено». Это небольшое сочинение, которое и в русской литературе также известно под названием «Аппендикс» ^[87], содержит систематическое изложение начал гиперболической геометрии, ранее уже опубликованной Лобачевским. По материалу, который в нем изложен, оно ближе всего подходит к «Геометрическим исследованиям» Лобачевского; но составлено оно в иной установке. Поставив вопрос, проходит ли в плоскости ABC через данную точку A , лежащую вне прямой BC , только одна прямая, не встречающая BC , или, быть может, больше одной, Больаи не считает нужным дать на этот вопрос определенный ответ. Он называет прямую AD (черт. 332) параллельной BC , если она является первой, не встречающей BC , т. е. если всякая прямая AE , проходящая внутри угла BAD , встречает BC ¹⁾. Но Больаи рассматривает это определение как а б с о л ю т н о е, не зависящее от того, проходит ли через точку A только одна прямая, не встречающая BC , или таких имеется больше (бесчисленное множество). В первом предположении мы имеем евклидову, во втором—неевклидову геометрию. Больаи ставит себе целью развешивать геометрию таким образом, чтобы выводы не зависели от того или иного предположения.



Черт. 332.

¹⁾ Это определение приведено в согласии с определением Лобачевского в § 18 (стр. 166) и далее использовано; по существу, как это там и указано, оно от определения Лобачевского не отличается.

Совокупность предложений, удовлетворяющих этому требованию, он называет «абсолютной геометрией»; этим термином, вошедшим в литературу, мы систематически пользовались выше. Конечно, выдержать этот принцип до конца Больаи не удастся, и, начиная с § 15, он отличает систему Σ , соответствующую первому предположению (т. е. евклидову), от системы S , соответствующей второму предположению (от неевклидовой геометрии). Но многие предложения Больаи очень искусно выражает так, что они сохраняют абсолютный характер. Во всяком случае он развертывает систему S настолько далеко, что получает тригонометрические уравнения неевклидовой геометрии (гиперболической), а также выражение элемента длины и площади в тех координатах, которые теперь принято называть декартовыми. Он заканчивает работу доказательством того, что в неевклидовой геометрии бывает иногда возможно циркулем и линейкой построить квадрат, равновеликий данному кругу (см. выше § 48, рубр. 6, стр. 393—394). Вся система построена с большим искусством. После «Геометрических исследований» Лобачевского «Аппендикс» должен быть признан одним из лучших перлов геометрической литературы; но в работах Лобачевского новая геометрия развернута неизмеримо шире и глубже. Не будет преувеличением сказать, что «Аппендикс» содержит только введение в геометрию, которую Лобачевский довел до тех же пределов, до каких в новое время доведена геометрия Евклида.

Когда «Аппендикс» вышел в свет, оба Больаи—отец и сын—послали экземпляр Гауссу, от которого Иоанн ждал большой поддержки. И действительно, в ответном письме от 6/III 1832 г. Гаусс отзывался о работе Иоанна с большим одобрением, но в то же время говорит, что он не может Иоанна хвалить, потому что это значило бы хвалить самого себя: он сам давно уж владеет этими идеями. В письмах к своим друзьям он называет Иоанна гением первого ранга, но самое письмо его к Больаи написано в гораздо более сдержанном тоне; в печати же Гаусс, верный своей установке в этом вопросе, совершенно не высказался. Лишенный поддержки Гаусса, не встретив, как и Лобачевский, ни единого человека, который бы оценил его работу, Иоанн очень тяжело перенес отсутствие признания; к тому же в 1841 г. он, воспользовавшись указанием Гаусса, получил экземпляр «Геометрических исследований» Лобачевского, из которого он убедился, что и приоритет открытия неевклидовой геометрии ему не принадлежал. Это привело его в состояние, близкое к психическому расстройству¹⁾.

Три обстоятельства здесь следует отметить. Во-первых, Лобачевский доложил физико-математическому факультету Казанского университета свою работу, содержащую изложение основ неевклидовой геометрии, в 1826 г., т. е. за шесть лет до опубликования работы Больаи; его приоритет, таким образом, совершенно неоспорим. Во-вторых, он развил неевклидову геометрию неизмеримо глубже, чем Больаи: его мемуар «О началах геометрии», опубликованный за три года до появления «Аппендикса», содержит уже очень далеко идущее развитие гиперболической геометрии, с которым содержание «Аппендикса» не идет ни в какое сравнение (см. [86], «О началах геометрии» и примечания А. П. Котельникова к этой работе). В-третьих, никакие нарекания, никакая жестокая и несправедливая критика не сокрушили в нем уверенности в правильности его творений:

¹⁾ О мыслях Иоанна, вызванных этими переживаниями, см. обстоятельное сочинение Штекеля, посвященное отцу и сыну Больаи [146]. Обстоятельные сведения об этом сообщены также в книге В. Ф. Кагана «Лобачевский» [86]. Детальное сопоставление работ Лобачевского, Гаусса и Больаи—см. статью В. Ф. Кагана «Строение неевклидовой геометрии у Лобачевского, Гаусса и Больаи» [147].

он не убоился «крика беотийцев», как Гаусс, не впал в уныние, как Больаи. Он продолжал разнообразную научную и общественную деятельность, которая навсегда связала его имя не только с историей Казанского университета, но и со всей русской наукой, можно с полным основанием сказать, — со всей современной математикой.

5. Нерешенная проблема. И все же основным вопрос, который остался нерешенным ни Лобачевским, ни Больаи, заключается в том, можно ли с полной научной уверенностью утверждать, что неевклидова геометрия логически совершенно правильна, что дальнейшее ее развитие не может привести ни к какому противоречию. Соображения, которые по этому вопросу выдвигал сам Лобачевский, — главным образом — согласие всех получаемых результатов и применения неевклидовой геометрии к разысканию значений определенных интегралов — могли привести только к субъективной уверенности в этом тех, кто усвоил его систему; но они не давали и не могли дать строгого убедительного разрешения этого основного вопроса. Больаи в одной из своих заметок утверждает, что ему удалось найти доказательство логической правильности новой геометрии. Вряд ли может быть сомнение, что это была иллюзия. К решению вопроса привели позднейшие изыскания, в результате которых идеи Лобачевского получили широкое развитие и был установлен совершенно новый взгляд на самую сущность геометрии.

Однако это произошло значительно позже. Гаусс скончался в 1855 г. В следующем году скончались Лобачевский и Вольфганг Больаи, а в 1868 г. сошел в могилу и Иоанн Больаи. Замечательные идеи неевклидовой геометрии в ту пору оставались незамеченными.

ЛИТЕРАТУРА

1. A. Clairaut. *Eléments de géométrie*. Paris, 1741.
2. О. Нейгебауэр. Лекции по истории античных математических наук. Т. I. Догреческая математика. Пер. С. Я. Лурье. М.—Л., 1937.
3. G. Scholiz. *Die Axiomatik der Alten. Blätter für deutsche philosophie*. Zeitschrift der deutschen philosophischen Gesellschaft. Berlin, 4, 1930.
4. Proclus. *In primum Euclidis elementorum librum commentarii*. Ex rec. G. Friedlein. Leipzig, 1873.
5. Euclid. *Euclidis opera omnia*. Ed. J. Heiberg et H. Menge. Leipzig, 1883—1896; семь томов, из которых первые пять содержат «Начала».
6. Euclid. *Preclarissimus liber elementorum Euclidis perspicacissimi: in artem Geometrie incipit quam foelicissime*. Venezia, Erhard Ratdolt, 1482.
7. P. Riccardi. *Saggio di una bibliografia Euclidea*. Bologna, Mem. Acc. Sc., 1887—1889, 1893.
8. Euclid. *Εὐκλιδος στοιχείων βιβλίαι*. Basel, Ed. Simon Grynaeus, 1533.
9. Euclid. *Euclidis quae supersunt omnia*. Ex rec. Davidis Gregorii. Oxford, 1703.
10. F. Peyrard. *Les œuvres d'Euclide en grec, latin et français*. Paris, 1814—1818.
11. J. W. Camerer. *Euclidis elementorum libri sex priores, graece et latine, commentario e scriptis veterum ac recentiorum mathematicorum et Pfeidereri maxime illustrati*. Berlin, 1824.
12. A. Tacquet. *Elementa geometriae planae et solidae, quibus accedunt selecta ex Archimede theoremata*. Antwerpen, 1654; пер. на англ. яз. в 1714.
13. R. Simson. *The Elements of Euclid, viz. The first six books together with the eleventh and twelfth*. Glasgow, 1756.
14. J. Playfair. *Elements of geometry, containing the first six books of Euclid*. Edinburgh and London, 1797.
15. J. F. Lorenz. *Euclides Elemente. Die sechs ersten Bücher*. Halle, 1773. XI—XII Bücher. Halle, 1781.
16. J. Todhunter. *The Elements of Euclid for the use of schools and colleges*. London, 1862.
17. C. F. Dechales. *Les éléments d'Euclide expliqués d'une manière nouvelle et très facile*. Paris, 1672.
18. A. M. Legendre. *Eléments de géométrie*. Изд. 1—12. Paris, 1794—1823. Русск. изд.: А. Лежандр. Начальные основания геометрии. Пер. М. Сахарова. СПб, 1819.
19. T. L. Heath. *The thirteen books of Euclid's elements. Translated from the text of Heiberg with introduction and commentary*. Т. I—III. Cambridge, 1908; изд. 2, 1926.
20. F. Enriques. *Gli elementi d'Euclide e la critica antica e moderna. Libri I—IV, Roma, 1925; Libri V—IX, Bologna, 1930; Libro X, Bologna, 1932*.
21. Евклидовы элементы, из двенадцати нефтоновых книг выбранные и в восемь книг чрез профессора математики Андрея Фархварсона сокращенные, с латинского на российский язык хирургом Иваном Сатаровым преложенные. СПб, 1739.
22. Н. Курганов. Евклидовы элементы геометрии. СПб, 1769.
23. П. Суворов и В. Никитин. Евклидовы стихи. Пер. с греч. СПб, 1784; изд. 2, 1789.
24. Евклидовых начал восемь книг: первые шесть, одиннадцатая и двенадцатая, содержащие в себе основания геометрии. Пер. с греч. Ф. Петрушевского. СПб, 1819.
25. Евклидовых начал три книги, а именно: седьмая, осьмая и девятая, содержащие общую теорию чисел древних геометров. Пер. с греч. Ф. Петрушевского. СПб, 1835.
26. М. Е. Ващенко-Захарченко. Начала Евклида с пояснительным введением и толкованиями. Киев, 1880.

27. J. Frischau f. Absolute Geometrie nach Johann Bolyai. Leipzig, 1872. Изложение этого небольшого сочинения можно найти во введении к изданию «Начал» в переводе М. Е. Ващенко-Захарченко [28].
28. Начала Евклида. Пер. с греч. и комментария Д. Д. Мордухай-Болтовского при редакционном участии И. Н. Веселовского и М. Я. Выгодского. М.—Л., кн. I—VI, 1948, кн. VII—X, 1949.
29. Euclid's book on divisions of figures by R. C. Archibald. Cambridge, 1915.
30. W. Killing. Einführung in die Grundlagen der Geometrie. Paderborn, т. I, 1893; т. II, 1898.
31. A. De-Morgan. Short supplementary remarks on the first six books of Euclid's «Elements». British Almanac, 1849.
32. А р х и м е д. Об измерении круга. Пер. М. Е. Ващенко-Захарченко. Приложение к егѳ переводу «Начал» Евклида [28]. Также в кн. А р х и м е д, Г ю й г е н с, Л а м б е р т, Л е ж а н д р «О квадратуре круга». М.—Л., 1934.
33. А р х и м е д. Псаммит или исчисление песку в пространстве, равном шару неподвижных звезд. Пер. Ф. Петрушевского. СПб, 1824. Псаммит (исчисление песчинок). Пер., комм. и обзор работ Архимеда Г. Н. Попова. М.—Л., 1932.
34. И. Гейберг. Новое сочинение Архимеда. Послание Архимеда к Эратосфену о некоторых теоремах механики. С пред. И. Ю. Тимченко. Одесса, 1909.
35. Archimedis opera omnia cum commentariis Eutocii. Ed. J. L. Heiberg. I—III. Leipzig 1880—1881; изд. 2, 1910—1913.
36. The works of Archimedes. Ed. in modern notations, with introductory chapters by T. L. Heath. Cambridge, 1897.
37. Archimedes Werke. Mit modernen Bezeichnungen herausgegeben und mit einer Einleitung versehen von T. Heath. Deutsch von F. Kliem. Berlin, 1914.
38. Архимеда две книги «О шаре и цилиндре», «Измерение круга» и «Леммы». Пер. с греч. («Леммы» с лат.) Ф. Петрушевского, СПб, 1823.
39. С. Я. Л у р ь е. Архимед. М.—Л., 1945. Книга содержит подробную библиографию работ Архимеда и относящихся к нему сочинений.
40. Apollonii Pergaei quae Graece exstant cum commentariis antiquis. Ed. J. L. Heiberg. Leipzig, 1891.
41. T. L. Heath. Apollonius of Perga. Cambridge, 1896.
42. Apollonius. Conica. Ed. E. Halley. Oxford, 1710.
43. Proclus. Procli Diadochi... in primum Euclidis Elementorum librum commentariomm...; summa opera a Francisco Barocio... editi. Patavii, 1560.
44. Proclus. The philosophical and mathematical commentaries of Proclus on the first book of Euclid's Elements. Trans. by Th. Taylor. T. I—II. London, 1788—9.
45. H. Suter. Das Mathematiker—Verzeichnis in Fihrist. Abh. Gesch. Math., Leipzig, 6, 1892.
46. An-Nairizi. Anaritii in decem libros priores elementorum Euclidis commentarii. Ed. M. Curtze. Leipzig, 1899. Дополнение к изд. «Начал» Евклида [5].
47. G. I. G é r h a d t. Leibnitzens mathematische Schriften. Berlin, 1845.
48. Encyclopédie ou dictionnaire raisonné des sciences, des arts et des métiers. Mis en ordre par Diderot et par d'Alembert. Paris, 1751—1780.
49. J. d'Alembert. Géométrie. Encyclopédie, t. VII. Paris, 1757.
50. J. d'Alembert. Eléments des sciences. Encyclopédie, t. V. Paris, 1755.
51. [J. d'Alembert] Mélanges de littérature, d'histoire et de philosophie. 1759. Nouvelle édition, t. IV. Essai sur les éléments de philosophie ou sur les principes des connaissances humaines. Amsterdam, 1770.
52. S. F. L a s c r o i x. a) Essai sur l'enseignement en général et sur celui des mathématiques en particulier. Paris, 1805. b) Eléments de géométrie à l'usage de l'école centrale des quatre nations. Paris, 1803. Русск. пер.: С. Ф. Л а к р у а. Основания геометрии. СПб, 1835.
53. E. Bezout. Cours de mathématiques à l'usage du corps royal d'artillerie. Paris, 1770—1772. Русск. изд.: Е. Б е з у. Основы геометрии для назначающих себя к мореплаванию. СПб, 1794.
54. E. R o u c h é t et Ch. C o m b e r o u s s e. Traité de géométrie. Paris, изд. 6, 1891.
55. Ж. А д а м а р. Элементарная геометрия. Под ред. Д. И. Перепелкина. Ч. I. Планиметрия; пер. с 11-го изд. 1936; ч. II. Стереометрия; пер. с 7-го изд., 1938. Москва; изд. 2, 1948. Перевод сочинения: J. H a d a m a r d. Leçons de géométrie élémentaire. I. Géométrie plane. II. Géométrie dans l'espace. Paris, 1898—1901.
56. Д. И. П е р е п е л к и н. Курс элементарной геометрии. Ч. I. Геометрия на плоскости. М.—Л., 1948. Ч. II. Геометрия в пространстве. М.—Л., 1949.
57. С. Е. Г у р ь е в. Опыт о усовершеннии элементов геометрии. СПб, 1798.
58. Н. И. Л о б а ч е в с к и й. Геометрия. Казань, 1823. Опубликовано Каз. физ.-мат. обществом; Казань, 1909; [63], т. II.

59. G. S. Klügel. Conatum praecipuorum theoriam parallelarum demonstrandi recensio, quam publico examini submittent A. G. Kaestner et auctor respondens G. S. Klügel. Göttingen, 1763.
60. В. Я. Буняковский. Параллельные линии. Ученые записки И. Академии наук, т. II, 1854; отд. изд. СПб., 1853.
61. A. M. Legendre. *Eléments de géométrie avec additions et modifications par M. A. Blanchet*. Paris, 10 éd., 1852.
62. H. Schmidt. Geometrische Untersuchungen. Journ. reine angew. Math., 112, 1893.
63. Н. И. Лобачевский. Полное собрание сочинений. Под общей редакцией В. Ф. Кагана, А. П. Котельникова, А. П. Нордена, В. В. Степанова, Н. Г. Чеботарева, П. А. Широкова. Главный редактор В. Ф. Каган. М.—Л. Сочинения по геометрии помещены в первых трех томах.
64. Н. И. Лобачевский. Новые начала геометрии с полной теорией параллельных. Уч. зап. Каз. ун-та, 1835—1838 гг.; [63], т. II.
65. Nasiraddin. Euclidis Elementorum geometricorum libri tredecim. Ex traditione doctissimi Nasiridini Tusini nunc primum Arabicè impressi. Roma, 1594. Пер. на санскритский язык: Бомбей, 1901.
66. J. Wallis. a) De Postulato quinto; et definitione quinta Lib. 6 Euclidis; disceptatio geometrica. Opera mathematica. Oxford, 1693, II, стр. 665—673. b) Demonstratio postulati quinti Euclidis. Там же, стр. 674—678. Воспроизведено в книге Штекеля [81].
67. G. Saccheri. Euclides ab omni naevo vindicatus; sive conatus geometricus quo stabiliuntur prima ipsa universae geometriae principia. Milano, 1733. Воспроизведено в книге Штекеля [81].
68. Н. И. Лобачевский. Геометрические исследования по теории параллельных линий. Пер. с нем. и примеч. В. Ф. Кагана; [63], т. I. Отд. изд. АН СССР. М.—Л., 1945. Впервые было опубликовано на нем. языке: N. J. Lobatschewski. Geometrische Untersuchungen zur Theorie der Parallellinien. Berlin, Fincke, 1840.
69. M. Pasch. Vorlesungen über neuere Geometrie. Leipzig, 1882. Второе издание (с добавлением работы Дена: M. Dehn, Die Grundlegung der Geometrie in historischer Entwicklung), Berlin, 1926.
70. C. F. Gauss. Werke. T. VIII. Grundlagen der Geometrie. Gött.—Lpz., 1900.
71. G. Desargues. Brouillon project d'une atteinte aux événements des rencontres d'un cone avec un plan. Paris, 1639. Oeuvres, I, 1864.
72. L. Bertrand. a) Développement nouveau de la partie élémentaire des mathématiques. Genève, 1778. b) *Eléments de géométrie*. Paris, 1812.
73. A. L. Crelle. Théorie des parallèles. Journ. reine angew. Math., 11, 1835.
74. A. M. Legendre. Réflexions sur différentes manières de démontrer la théorie des parallèles ou le théorème sur la somme des trois angles du triangle. Mémoires de l'Acad. des sciences, Paris, 12, 1833.
75. J. P. Steiner. Examen de quelques tentatives de théorie des parallèles. Ann. de Math. pures et appliquées. Nîmes, 15, 1824.
76. J. Carton. Nouveau moyen de lever la difficulté de la théorie des parallèles. C. R. Ac. Sc., Paris, 69, 1869.
77. В. Я. Буняковский. Заметка по вопросу о параллельных линиях. Математический сборник, 6, 1872.
78. В. П. Ермаков. О сумме углов треугольника. Вестник опытной физики и элементарной математики, 31, 1887.
79. E. Beltrami. Un precursore italiano di Legendre et di Lobatschewski [Saccheri]. Rend. Acc. Lincei, Roma (4), 5, 1889.
80. J. H. Lambert. Theorie der Parallellinien. Leipziger magazin reine angew. Math., 1786. Воспроизведено в книге Штекеля [81].
81. P. Stäckel und F. Engel. Die Theorie der Parallellinien von Euklid bis auf Gauss, eine Urkundensammlung zur Vorgeschichte der nichteuklidischen Geometrie. Leipzig, 1895. В книге помещены работы Валлиса, Саккери, Ламберта, Гаусса, Тауринуса, а также библиография сочинений по теории параллельных линий за период 1482—1837 гг.
82. Э. П. Янишевский. Историческая записка о жизни и деятельности Н. И. Лобачевского. Казань, 1863.
83. F. Engel. N. I. Lobatschewski. Zwei geometrische Abhandlungen, aus dem Russischen übersetzt, mit Anmerkungen und mit einer Biographie des Verfassers. Leipzig, 1898—1899.
84. А. В. Васильев. Николай Иванович Лобачевский. СПб., 1914.
85. В. Ф. Каган. Лобачевский. М.—Л., 1944; изд. 2-е, 1948.

86. Н. И. Лобачевский. О началах геометрии. Каз. вестник, 1829—1830; [63], т. I.
87. J. Bolyai. Appendix, scientiam spatii absolute veram exhibens: a veritate aud falsitate Axiomatis XI Euclidei (a priori haud unquam decidenda) independentem. Maros-Vásárhely, 1832. Вышло в виде приложения к сочинению W. Bolyai «Tentamen» [146]. Нем. пер. в соч. P. Stäckel «W. und J. Bolyai» [146].
88. Н. Liebmann. Nichteuklidische Geometrie. Leipzig, 1905 (Sammlung Schubert, XLIX). Изд. 2, 1912, изд. 3, 1923 (совершенно переработанное).
89. Д. Гильберт. Основания геометрии. М.—Л., 1948. Пер. с 7 нем. изд. И. С. Градштейна под ред. и со вступ. статьей П. К. Рашевского (D. Hilbert. Grundlagen der Geometrie. Leipzig und Berlin, 7 Aufl., 1930).
90. Д. Гильберт. Новое обоснование геометрии Больаи-Лобачевского. Приложение 3 к сочинению [89]. Впервые опубликовано под названием: Neue Begründung der Bolyai-Lobatschewskyschen Geometrie. Math. Ann. 57, 1903.
91. Д. Д. Мордухай-Болтовской. О геометрических построениях в пространстве Лобачевского. Сборник «In memoriam N. I. Lobatschewskij», II. Казань, 1927.
92. M. Simon. Nichteuklidische Geometrie in elementarer Behandlung. Leipzig—Berlin, 1925 (посмертное издание).
93. J. Hjelmslev. Neue Begründung der ebenen Geometrie. Math. Ann., 64, 1907.
94. F. Schur. Ueber die Grundlagen der Geometrie. Math. Ann. 55, 1901. Также в изд. Grundlagen der Geometrie. Leipzig, 1909, § 6.
95. L. Gérard. Sur la géométrie non euclidienne. Paris, 1892.
96. Ф. Энгель. Построение параллельной линии в геометрии Лобачевского. Изв. Казанского физ.-мат. общ. (2) 7, 1897. На нем. яз.: F. Engel. Construction der Parallelen in der nichteuklidischen Geometrie. Ber. Ges. Wiss. Leipzig, 50, 1898.
97. Н. Liebmann. Die Bewegungen der hyperbolischen Ebene. Math. Ann., 85, 1922.
98. C. F. Gauss. Werke. T. III. Göttingen, 1876.
99. H. Thieme. Die Elemente der Geometrie. Grundlehren der Mathematik für Studierende und Lehrer. T. II, ч. 1. Leipzig u. Berlin, 1909.
100. G. B. Halsted. Rational Geometry. New York, 1907.
101. H. G. Forder. The foundations of euclidean Geometry. Cambridge, 1927.
102. П. А. Широков. Краткий очерк основ геометрии Лобачевского. В сборнике «Н. И. Лобачевский», М.—Л., 1943.
103. Н. Liebmann. Die Konstruktion des geradlinigen Dreiecks der nichteuklidischen Geometrie aus den drei Winkeln. Leipzig, Ber. Ges. Wiss., 53, 1901.
104. Н. Liebmann. Die Kegelschnitte und die Planetenbewegung im nichteuklidischen Raum. Ber. Ges. Wiss. Leipzig, 54, 1902.
105. Н. Liebmann. Winkel- und Streckenteilung in der Lobatschewskyschen Geometrie. Archiv für Math., Leipzig, (3), 5, 1903.
106. Н. Liebmann. Ueber die Begründung der hyperbolischen Geometrie. Math. Ann., 59, 1904.
107. Н. Liebmann. Elementargeometrischer Beweis der Parallelenkonstruktion und neue Begründung der trigonometrischen Formeln der hyperbolischen Geometrie. Math. Ann., 61, 1905.
108. Н. Liebmann. Zur nichteuklidischen Geometrie. Ber. Ges. Wiss., Leipzig, 58, 1906.
109. Н. Liebmann. Elementare Ableitung der nichteuklidischen Trigonometrie. Ber. Ges. Wiss., Leipzig, 59, 1907.
110. Н. Liebmann. Die elementaren Konstruktionen der nichteuklidischen Geometrie. Jahresber. Deutsch. Matem. Vereinigung, 20, 1911.
111. Я. Успенский. Введение в неевклидову геометрию Лобачевского-Больаи. Петроград, 1922.
112. С. О. Патуновский. Об основаниях геометрии. Вестн. опытной физики и элементарной математики (27 сем.), 1902.
113. W. Killing. Die Rechnung in den nichteuklidischen Raumformen. Journ. reine angew. Math., 89, 1880.
114. W. Killing. Die nicht-euklidischen Raumformen in analytischer Behandlung. Leipzig, 1885.
115. Р. Бонола. Неевклидова геометрия. Пер. А. Р. Кулишера. СПб, 1910. Пер. сочинения: R. Bonola. La geometria non euclidea. Bologna, 1906.
116. J. M. Tilly. Essai sur les principes fondamentaux de la géométrie et de la mécanique. Mémoires de la Société phys. nat. de Bordeaux (2), 3, 1879.
117. E. Beltrami. Saggio di interpretazione della geometria non-euclidea. Giorn. Mat. Napoli, 6, 1868; Opere mat., I.

118. Б. Рима н. О гипотезах, лежащих в основании геометрии. Пер. В. Л. Гончарова, «Избранные сочинения», М.—Л., 1948. Пер. сочинения: B. Riemann. Ueber die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen. Abh. Ges. Wiss., Göttingen, 13, 1866; Berlin, изд. 2, 1919; изд. 3, 1923.
119. Т. Леви-Сивита. Der absolute Differentialkalkül. Berlin, 1928.
120. П. К. Рашевский. Введение в риманову геометрию и тензорный анализ. М.—Л., 1936.
121. В. Ф. Каган. Развитие интерпретаций неевклидовой геометрии. Труды семинара по векторному и тензорному анализу, вып. VII, 1949.
122. В. Ф. Каган. Очерк геометрической системы Лобачевского. Одесса, 1900.
123. А. Адлер. Теория геометрических построений. Одесса, 1910.
124. Н. М. Несторович. Вопросы теории геометрических построений в пространстве Лобачевского и сборник задач. Рукопись.
125. Е. Григорьев. К делению окружности на шесть равных частей. Вестник опытной физики и элементарной математики, 472, 1909.
126. Н. М. Несторович. О квадратуре круга и циркулятуре квадрата в пространстве Лобачевского.
127. Н. М. Несторович. Орициркуль и его роль в геометрических построениях на плоскости Лобачевского.
128. Н. М. Несторович. Геометрические построения в пространстве Лобачевского. Уч. зап. НИИ матем. и физ. университета. Ростов-на-Дону, IV, 1940.
129. Н. М. Несторович. О конструктивной мощности комплекса E на плоскости Лобачевского. ДАН, XLIII, № 5, 1944.
130. О. С. Смогоржевский. Про розв'язування конструктивних задач другого степеня в просторі Лобачевського з допомогою циркуля, гороциркуля й гіперциркуля. Матем. збірник, Київ, 2, 1948.
131. А. С. Смогоржевский. О некоторых геометрических построениях в гиперболической и евклидовой плоскостях. ДАН, 50, 1945.
132. А. С. Смогоржевский. Геометрические построения в пространстве Лобачевского. Юбилейный сборник Киевского политехнического ин-та.
133. О. С. Смогоржевский. Теорія геометричних побудов в просторі Лобачевського. Київ, 1949.
134. Г. Гельмгольц. О фактах, лежащих в основании геометрии. Сб. «Об основаниях геометрии». Пер. А. В. Васильева, Казань, 1893. Пер. сочинения: H. Helmholtz. Ueber die Thatsachen, die der Geometrie zu Grunde liegen. Gött. Nachr., 14, 1868.
135. S. Lie. Theorie des Transformationsgruppen. (Gesammelte Abhandlungen). Herausgegeben von F. Engel. T. III, Leipzig, 1922.
136. Материалы для биографии Н. И. Лобачевского. Собрал и редактировал Л. Б. Модзалевский. М.—Л., 1948.
137. Ф. Клейн. Неевклидова геометрия. Пер. Н. К. Брушлинского. М.—Л., 1936. Пер. сочинения: F. Klein. Vorlesungen über nichteuclidische Geometrie. Berlin, 1928.
138. Н. И. Лобачевский. Воображаемая геометрия. Уч. зап. Каз. ун-та, 1835; [63], III.
139. Н. И. Лобачевский. Применение воображаемой геометрии к некоторым интегралам. Уч. зап. Каз. ун-та, 1836; [63], III.
140. Н. И. Лобачевский. Пангеометрия. Уч. зап. Каз. ун-та, 1855; [63], III.
141. P. Stäckel. Materialien für eine wissenschaftliche Biographie von Gauss. Heft 5. C. F. Gauss als Geometer. Leipzig, 1918.
142. F. A. Taurinus. Theorie der Parallellinien. Köln, 1825. Воспроизведено в кн. Штекеля [81].
143. F. K. Schweißkart. Die Theorie der Parallellinien, nebst dem Vorschlage ihrer Verbannung aus der Geometrie. Leipzig, 1808. См. также [81].
144. F. A. Taurinus. Geometriae prima elementa. Köln, 1826. См. также [81].
145. W. Bolyai. Tentamen Juventutem studiosam in elementa Matheseos purae, elementaris ac sublimioris methodo intuitiva evidentialaque huic propria, introducendi; cum appendice triplici. Maros—Vásárhelyini, 1832.
146. P. Stäckel und F. Engel. Wolfgang und Johann Bolyai. Geometrische Untersuchungen. (Urkunden zur Geschichte der nichteuclidischen Geometrie, II, ч. 1—2.) 1. Leben und Schriften der beiden Bolyai. 2. Stücke aus den Schriften der beiden Bolyai. Leipzig, 1913.
147. В. Ф. Каган. Строение неевклидовой геометрии у Лобачевского, Гаусса и Больяи. Труды института истории естествознания АН СССР, т. II, М.—Л., 1948.

ИМЕННОЙ УКАЗАТЕЛЬ

- Аганис** 102, 127
Адамар 16, 108, 154, 477
Адлер 376, 387, 480
Александров Г. Ф. 22
Амодео 16
Ампер 16
Анариций 31, 99, 101, 102, 154, 477
Андроник 22
Анюллоний 35, 92, 96, 97, 98, 99, 477
Аристей 96
Аристотель 21, 22, 23, 24, 25, 26, 29, 40, 41, 43, 49, 51, 61, 74, 78, 85, 90, 98, 100, 103, 112, 117, 154
Архимед 28, 88, 91—96, 97, 98, 126, 260, 477
Ательгарт 31
Ахмес 18

Безу 107, 109, 477
Бельтрами 145, 364, 478, 479
Бернулли И. (младший) 148
Бертран Ж. 143
Бертран Л. 128, 130, 478
Бланше 116
Больбаи В. 322, 472, 473, 475, 480
Больбаи И. 59, 153, 165, 185, 209, 235, 239, 347, 356, 394, 472, 473, 474, 475, 478
Больцано 62
Бонола 351, 479
Борелли 102, 127
Боссю 104
Бовтий 30
Бувяковский В. Я. 114, 116, 126, 128, 130, 131, 143, 478

Валлис 119, 123—126, 128, 162, 478
Васильев А. В. 151, 478
Вашенко-Захарченко М. Е. 32, 35, 91, 476
Вейерштрасс 17, 341
Веронезе 16
Виндельбанд 19, 20

Галлей 97
Гальстет 16, 228, 479
Ганези 15, 94
Гаусс 16, 110, 127, 128, 134, 141, 142, 153, 178, 187, 224, 235, 241, 266, 280, 322, 323, 347, 349, 350, 351, 352, 356, 357, 391, 468, 469, 470, 471, 472, 473, 474, 475, 478, 479
Гегель 24

Гейберг 29, 30, 31, 34, 35, 36, 40, 91, 93, 96, 477
Гельмгольц 62, 404, 424, 480
Гельмслев 205, 479
Гельфонд А. О. 395
Гемин 99, 112, 127
Герлинг 141, 470, 471
Герон 45, 99, 102
Гильберт 14, 16, 17, 47, 48, 49, 96, 153, 185, 198, 227, 325, 427, 479
Гинденбург 148
Гиппократ 19, 27
Гипсиклес 38, 91
Грегоги 32
Григорьев Е. 391, 480
Гриней 32
Гурьев С. Е. 109, 477

Даламбер 104—108, 477
Дедекинд 17, 62, 154
Дезарг 127, 479
Декарт 16
Делаμβр 105
Демокрит 20, 89
Де-Морган 81, 89, 108, 477
Дешаль 33, 34, 476
Диоген 20
Дубнов Я. С. 198

Евдем 18, 99
Евдокс 28, 74, 79, 80, 88, 96
Евклид 27, 28—91, 96, 97, 98, 123, 404, 426, 427, 476
Евклид из Мегары 29
Ермаков В. П. 143, 478
Ефимов Н. В. 11

Жерар 209, 297, 479

Зенон 99
Зутер 101, 477

Исгак 31

Каган В. Ф. 12, 16, 356, 367, 373, 468, 474, 478, 480
Камерер 32, 476
Кампанус 31
Кант 23, 24
Кантор Г. 17, 62
Кантор М. 98, 101
Кардано 40

- Картон 143, 274, 478
 Кеплер 127
 Кестнер 113, 150
 Киллинг 49, 339, 341, 357, 477, 479
 Клавий 124, 127
 Клейн 49, 62, 341, 469, 470, 480
 Клеро 16, 34, 476
 Ключель 113, 114, 148, 150, 478
 Комберус 108, 477
 Костин В. И. 11
 Котельников А. П. 298, 460, 462, 474
 Коши 16, 280
 Крелль 102, 130, 478
 Кубицкий А. В. 22, 37
 Кузьмин Р. О. 395
 Курганов Н. 35, 476
 Куртце 101
- Лагранж 16, 105
 Лакруа 105, 107, 108, 109, 477
 Ламберт 145, 148—150, 151, 152, 156, 296, 356, 472, 478
 Лаплас 178
 Лев 27
 Леви-Чивита 367, 480
 Лежандр 16, 34, 60, 107, 108, 109, 115, 116, 123, 130—138, 141, 142, 143, 145, 147, 148, 152, 156, 175, 177, 356, 476, 478
 Лейбниц 16, 102
 Леон 98
 Ли 62, 357, 404, 480
 Лимбан 153, 165, 204, 206, 209, 224, 235, 240, 264, 269, 282, 285, 294, 316, 339, 398, 445, 479
 Лобачевский Н. И. 13, 16, 118, 122, 123, 137, 138, 145, 148, 151, 152, 153, 154, 157, 158, 163, 164, 166, 168, 172, 173, 175, 177, 178, 180, 210, 211, 224, 235, 239, 247, 263, 266, 281, 282, 284, 289, 294, 296, 297, 299, 322, 346, 347, 351, 356, 362, 369, 391, 436, 437, 439, 442, 445, 448, 456, 457, 458, 459, 460, 462, 463, 467, 468, 469, 472, 473, 475, 478, 480
 Лоренц 33, 104, 474
 Лурье С. Я. 95, 477
- Маринус 98
 Менге 29, 30, 34, 36, 40, 91
 Менелай 427
 Менэхм 96
 Модзалевский Л. Б. 463, 480
 Мордухай-Болтовской Д. Д. 35, 40, 80, 85, 196, 376, 377, 378, 379, 384, 385, 388, 395, 477, 478
- Насир-эддин ат Туси, см. Туси
 Нейгебауэр 18, 476
 Несторович Н. М. 257, 306, 383, 394, 400, 401, 403, 480
 Никитин В. 35, 476
- Остроградский М. В. 13, 463
- Папп 35, 51, 96, 99
 Паш 16, 478
- Пеано 16
 Пейрар 29, 32, 105, 476
 Перепёлкин Д. И. 108, 477
 Петрушевский Ф. 35, 84, 476
 Пжери 16
 Пифагор 19
 Платон 19, 20, 21, 22, 29, 30, 38, 40, 41, 42, 49, 61, 74, 85, 89, 98, 103, 105
 Плутарх 92
 Плэйфер 33, 42, 104, 476
 Порфирий 99
 Посидоний 127
 Прокл 18, 19, 20, 27, 36, 37, 38, 42, 43, 45, 47, 60, 98—101, 102, 112, 113, 116, 117, 118, 122, 124, 128, 154, 182, 404, 476, 477
 Птолемей 28
- Радлов Э. Л. 24
 Ратдолът 31
 Рашевский П. К. 367, 480
 Региомонтан 31
 Рикарди 32, 476
 Риман 366, 367, 368, 467, 480
 Руше 108, 477
- Саккери 102, 118, 120—123, 145—148, 151, 152, 156, 176, 356, 472, 478
 Сатаров И. 34
 Симон 205, 234, 240, 316, 398, 445, 479, Симплиций 102, 127
 Симсон 33, 35, 53, 66, 102, 104, 110, 404
 Смогоржевский А. С. 11, 403, 480
 Спиноза 27
 Стобей 39
 Суворов П. 35, 476
- Табит 31
 Таке 33, 34, 476
 Таннери 19
 Тауринус 152, 153, 266, 469, 470, 471, 472, 480
 Теон 29
 Теэтет 28, 30, 89
 Тилли 351, 479
 Тиме 16, 228, 479
 Тотгентер 33, 476
 Туси (Насир-эддин) 31, 102, 118—123, 128, 131, 133, 146, 156, 478
 Тэйлор 99
- Успенский Я. 235, 264, 445, 479
- Фалес 18, 19, 51, 59, 61
 Фано 16
 Фарварсон А. 34, 35
 Февдий 20, 27
 Финци 367
 Фордер 16, 228, 479
 Фридлейн 99
 Фришауф 35, 477
 Фукс 116
 Фурье 16
- Хаджадж 30, 31
 Хис 29, 32, 33, 34, 36, 42, 51, 84, 93, 96, 101, 102, 112, 476

Цицерон 30, 94

Чева 145

Шаль 35, 36

Шатуновский С. О. 325, 387, 497

Швейкарт Ф. 152, 153, 178, 179, 187, 280,
393, 470, 471, 480

Широков П. А. 235, 478

Шмидт 116, 253, 478

Шольц 25, 26, 476

Шопенгауэр 17, 99

Штейн 138, 478

Штекель 148, 469, 474, 478, 480

Штуди 165

Шумахер 127

Шур 208, 479

Энгель 151, 209, 222, 226, 469, 472,
478, 479, 480

Энрикес 102, 476

Эратосфен 92, 97, 98

Янишевский Э. П. 151, 478

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

- Абсолютная геометрия 58, 62, 91, 154, 155, 404, 405, 474
 — тригонометрия 351
 Аксиоматическое определение 80
 Аксиомы абсолютной геометрии 154
 — Архимеда 95, см. также Архимеда аксиома (пятая)
 — Евклида 43, 44—45
 — (у Прокла) 100
 — Лежандра 109, 110
 Алгебра геометрическая (у Евклида) 62
 — соизмеримых и несоизмеримых величин 86
 Алгебраические кривые (в гиперболической плоскости) 344
 Алгоритм Евклида см. Евклида алгоритм
 Аналитическая геометрия на гиперболической плоскости 327
 — — в гиперболическом пространстве 447
 Анггармоническое отношение 36
 «Аппендикс» Иоанна Больаи 209, 235, 473
 Арабы, геометрия у арабов 30
 Аристотеля аксиома 117, 118, 122, 182
 — сочинения:
 «Аналитика» 22, 24, 61, 112
 «Вторая аналитика» 22, 24
 «Категории» 22, 23, 24
 «Метафизика» 22, 49
 «Об истолковании» 22, 24
 «Органон» 22, 24
 «Первая аналитика» 22, 24
 «Софистические доказательства» 22
 «Топика» 22, 25
 Арифметика у греков 84
 Арифметические книги «Начал» Евклида 84
 Архимеда аксиома (пятая) 81, 95, 96, 123, 154, 259, 261
 — сочинения:
 «Исчисление песка» 92, 93
 «Начала» 93
 «О квадратуре параболы» 95
 «О коноидах и сфероидах» 95
 «О спиралях» 95
 «О шаре и цилиндре» 93, 94
 «Об измерении круга» 92, 94
 Асимптота (у Иоанна Больаи) 185
 Базисная плоскость 416, 419
 — прямая 240, 245
 Бельтрамиевы координаты на плоскости 329
 — — в пространстве 448
 — — прямой линии 334
 Бесконечно большие величины 128
 — малые величины 106, 128
 — малый треугольник (тригонометрические соотношения) 345
 — удаленная вершина треугольника 187, 188
 — — точка 127, 204
 — удаленный центр окружности 254
 Биссектриса угла (доказательство существования) 229
 Биссектрисы треугольника (точка пересечения) 72
 — треугольников вырожденных (нулевого угла) 192
 — углов треугольника (внутренних, внешних) 199
 — — гиперболического ромба 198
 Большой круг 428
 Вавилоняне, вавилонская математика 18
 Вейерштрассовы координаты (в гиперболической плоскости) 341
 Величины иррациональные, несоизмеримые см. Иррациональные, несоизмеримые величины
 Вершины гиперболического параллелограмма (основные, боковые) 196
 Взаимность параллелизма 168
 Винтовая линия 454
 Винтовое движение 454
 Внешнее расхождение (двух прямых относительно третьей) 278
 Внешний параллелизм (двух прямых относительно третьей) 278
 — угол, теоремы о внешнем угле (у Евклида) 54, 59
 Внутреннее расхождение (двух прямых относительно третьей) 278
 Внутренний параллелизм (двух прямых относительно третьей) 278
 Внутренняя геометрия поверхности 426
 — — предельной поверхности 434
 — — сферы 428
 — — эквидистантной поверхности 428, 431, 432
 Восточная математика 18
 Вращение плоскости (вокруг центра окружности) 268

- Вращения поверхности, длина кривой на ней 453
 — поверхность, площадь 459
 — тело, объем 464
 Второго порядка кривые на гиперболической плоскости 344, 345
 Выражения данного класса, порядка 377
 — квадрато-радикальные 387
 — целые гиперболические 379
 Вырожденные треугольники 187
 — —, условия их конгруэнтности 190
 Высота предельной дуги 253
 — —, связь с ее длиной 282
 Высоты треугольника, точка их пересечения 202
 — трипрямоугольника 196
 Гаусса функции $f(x)$, $\varphi(x)$, определение 347
 — —, дифференциальные соотношения 351, 354
 — —, разыскание 355
 Гексаэдр (в гиперболическом пространстве) 439
 Гельмслева прямая 206, 207
 — теорема 205
 Геолезические эквидистанты 421, 428, 429, 431—432
 Геометрическая алгебра Евклида 62
 Геометрические построения в гиперболической плоскости 375, см. также название соответствующей фигуры
 — тождества у Евклида 63, 66, 68
 Гильберта аксиомы 154
 — построения 235
 — постулат (о параллельных линиях) 239
 — теорема (о биссектрисах гиперболического ромба) 198
 Гипербола (у Аполлония) 97
 Гиперболическая геометрия 153
 — —, начала 154
 — —, конструктивные методы ее построения 227
 — —, первая основная теорема 165
 — —, вторая основная теорема 175
 — —, третья основная теорема 180
 — —, четвертая основная теорема 181, 232, 235
 — — в пространстве 404
 — параллель 162, 166
 — —, ее особенности 167
 — плоскость 160, L_2 239, H_2 239
 — —, аналитическая и дифференциальная геометрия в ней 327
 — —, геометрические построения в ней 375
 — —, ее кривизна 346, 366
 — —, ее основная метрическая форма 358, 359
 — —, ее постоянная 280, 284
 — —, кривые постоянной кривизны в ней 240
 — —, метрические соотношения в ней 210, первое 281, второе 291, 294
 — —, не обладающая непрерывностью 227
 Гиперболическая постоянная гиперболической плоскости и гиперболического пространства 280, 284, 437, 439
 — — эквидистантной поверхности 433
 — тригонометрия 279, 284, 356, 442
 Гиперболические выражения 379
 Гиперболический одночлен 379
 — параллелограм 196
 — радиан 311
 — ромб 196
 Гиперболическое пространство 160, L_2 405, H_2 405
 — —, аналитическая геометрия в нем 447
 — —, дифференциальная геометрия в нем 451
 Гиперциркуль 399
 Гипотеза острого, прямого, тупого угла 146, 147, 148
 Главная ось предельной линии 248
 Гномон 65
 Группа прямоугольного треугольника 219
 Даламбера план (изложения начал геометрии) 104
 Движение (у Евклида) 45, 49, 62, 91
 — (по Даламберу) 106
 — (по Проклу) 100
 — винтовое 454
 — свободное (на поверхности) 424, 426
 — переносное 454
 —, полная система движений 357
 Двупрямоугольник 161, 194
 —, тригонометрические соотношения в нем 308
 Двуугольник 190
 Дедекинда принцип 177, 227, 235, 239
 Дедуктивная школа Аристотеля 21
 Декартовы координаты на гиперболической плоскости 327
 — — в гиперболическом пространстве 447
 Деление аргумента (формулы для функции $\Pi(\tau)$) 302
 — окружности на равные части 391
 — предельной дуги на равные части 390
 Демокрита сочинение «О геометрии» 20
 Дефект угловой многоугольника 161
 — — треугольника 139, 160, 319
 Диагональ квадрата (несомизмеримость со стороной) 85
 Диалоги Платона 20
 Диоризм 97
 Дифференциальная геометрия на гиперболической плоскости 327, 345, 358
 — — в гиперболическом пространстве 451
 Длина кривой 310, 360, см. также название кривой
 — отрезка 259
 Длины элемент (на гиперболической плоскости) в декартовых координатах 358, 359
 — — в полярных координатах 362
 — — в бельтрамиевых координатах 363
 — — на либмановой карте 364

- Длины элемент, конформно-евклидово выражение 366
 — —, риманово выражение 366
 — — (в гиперболическом пространстве) 451
 Додекаэдр (в гиперболическом пространстве) 439
 Дополнительные отрезки 213, 375
 — —, аналитическое соотношение между ними 287
 — —, построение 226
 Дуга окружности, ее длина 311
 — —, ее измерение 259, 260
 — —, предельной линии 253
 — — —, ее длина 283
 — — —, ее измерение 264
 — — —, связь ее с высотой 282
 — эквидистанты, ее длина 311
 — —, ее измерение 261
 Евклида алгоритм 259, 260, 261
 — комментаторы 98
 — постулат, см. Пятый постулат Евклида
 — продолжатели 91
 — сочинения:
 «Данные» 36
 «Конические сечения» 35
 «Начала» см. «Начала» Евклида
 «О делениях» 36
 «Оптика» 36
 «Поризмы» 35, 36, 39
 «Pseudaria» 35
 «Феномен» 36
 Евклидова геометрия (как предельный случай неевклидовой геометрии) 346
 — — см. Собственно евклидова геометрия
 Египтяне, египетская математика 18
 Единица меры (площади) 316
 Заградительная прямая угла 183, 184
 — — —, ее построение 237
 Замечательные точки и прямые треугольника 199
 «Звездная геометрия» (Швейкарта) 470
 Идеальная точка 205
 Измерение (учение об измерении у Даламбера) 106
 — дуги окружности 259, 260
 — — предельной линии 264
 — — эквидистанты 261
 — площадей, основная теорема 319
 — прямолинейных отрезков 259
 Икосаэдр (в гиперболическом пространстве) 439
 Интегрирование (у Архимеда) 93
 Иррациональные величины 84
 — выражения (построения в гиперболической плоскости) 385, 387
 Исчерпывание 93
 Исчерпывания метод 88, 93
 Карта Либмана 269
 Касательная (у Евклида), ее построение 69, 70
 Квадрат, несоизмеримость диагонали со стороной 85
 —, преобразование параллелограмма в равновеликий квадрат (у Евклида) 67
 Квадратное уравнение, его геометрическое решение (у Евклида) 66
 Квадрато-радикальные выражения, их построение 387
 Квадратура круга 392, 394
 Класс выражения (у Д. Д. Мордухай-Болтовского) 377
 Комментаторы Евклида 98—103
 «Комментарии» Прокла 98, 99—101
 Конгруэнтность вырожденных треугольников 190, 191
 — полос между параллельными линиями 185
 — предельных линий 254
 Конец общий двух прямых (у Гильберта) 185
 «Конические сечения» Аполлония 96, 97
 Конструктивные методы в построении начал гиперболической геометрии 227
 Конус, его объем 465
 — параллелей 410—411
 Конфигурация основная Лобачевского 187
 Конформно-евклидово выражение элемента длины 366
 Конформность преобразования Либмана 365
 Координаты (на гиперболической плоскости) бельтрамиевы 329
 — вейерштрассовы 341
 — декартовы (две системы) 327
 — однородные 340
 — орициклические 365, 366
 — полярные 328
 — прямой линии 334
 — (в гиперболическом пространстве) бельтрамиевы 448
 — декартовы (две системы) 447
 Косинусов теорема 290, 298
 Кривая, длина кривой 360, см. также название кривой
 — на поверхности вращения, ее длина 453
 — равных расстояний 147, см. также Эквидистанта
 Кривизна гиперболической плоскости 346, 366
 Кривые алгебраические (в гиперболической плоскости) 344
 — постоянной кривизны см. Постоянной кривизны кривые
 Круга квадратура 392, 394
 — площадь (в гиперболической плоскости) 374
 Ламберта четырехугольник 149, 161, 196
 Латентные уравнения прямоугольного треугольника 212
 Лежандра основная теорема первая 133, 134
 — — — вторая 138, 141
 Лежандра-Туси постулат 116, 123, 131, 157

- Лимбана преобразование** 269
 — —, его конформность 365
 — —, его применение к геометрическим построениям 273
Линейка, построение помощью линейки см. Построение
Линейное задание отрезка 179
 — — угла 210, 291
Линия винтовая см. Винтовая линия
 —, определение (у Евклида) 40, 41
 —, — (у Лежандра) 110
 — предельная см. Предельная линия
Лобачевского исходное положение 157, 159
 — сочинения:
 «Воображаемая геометрия» 152, 460, 468, 480
 «Геометрические исследования по теории параллельных линий» 123, 153, 157, 158, 168, 175, 263, 347, 417, 436, 437, 439, 468, 473
 «Геометрия» 109, 439, 477
 «Новые начала геометрии с полной теорией параллельных» 118, 138, 180, 222, 224, 263, 282, 439, 468, 478
 «О началах геометрии» 151, 153, 173, 178, 211, 226, 281, 294, 296, 362, 456, 460, 462, 468, 479
 «Папгеометрия» 468, 480
 «Применения воображаемой геометрии к некоторым интегралам» 460, 468, 480
 — плоскость см. Гиперболическая плоскость
 — пространство см. Гиперболическое пространство
 — уравнения первой системы 211
 — — второй системы 213
 — цикл 220
Луч 166

Медианы треугольника, их пересечение 316
Менелая теорема 313
 — —, ее аналог 314
 — — обратная 315
Мера, единица меры площади 316
Метод исчерпывания 88, 93
Метрическая геометрия 106, 109
 — форма основная гиперболической плоскости 358, 359
Метрические соотношения в гиперболической плоскости 210, 281, 291
Мнимая сфера 150
Мнимый угол между двумя прямыми 339
Многогранники правильные (у Евклида) 37, 87, 89
 — — в гиперболическом пространстве 439
 — — с бесконечным числом граней 442
Многоугольник, его площадь 324
 —, его угловой дефект 161
Многоугольники правильные 392
Мордухай-Болтовского теорема 376 387

«Начала» Евклида, библиография 32
 — —, заключительный обзор 89
 — —, значение названия 37

«Начала» Евклида, исходные положения 40
 — —, книги: I (первая половина) 45; I (вторая половина) 56; I (общий обзор) 60; II 62, 68; III 69, 71; IV 72; V 73; VI 81; VII—IX 84; X 84; XI 87; XII 88; XIII 89; XIV—XV 91
 — —, новейшие издания 34
 — —, русские издания 34
 — —, школьные издания 32
«Начала» Лежандра 34, 107, 132
Неевклидова геометрия, определение 153
 — —, открытие 151
 — —, предистория 111
Непрерывность 103
 —, гиперболическая геометрия, не обладающая непрерывностью 227
Несоизмеримые величины 86
 — отрезки 74
Нормальное протяжение предельной дуги 262—263
 — расстояние параллельных предельных линий 256
 — — точки от предельной линии 262
Нормальный вид уравнения прямой (в гиперболической плоскости) 333

Общий перпендикуляр к двум прямым см. Перпендикуляр общий
Объем, элемент объема 463
 — конуса 465
 — пирамиды 467
 — сферического слоя 465
 — тела вращения 464
 — шара 465
Одиннадцатая аксиома Евклида 58, см. также Пятый постулат Евклида
Однородности принцип 130, 133, 141, 142
Однородные бильтрамиевы координаты 340
Одноугольник 191
Одночлен гиперболический 379
Окружность (у Евклида) 42, 69
 — вписанная, описанная (у Евклида) 72
 — —, — (в гиперболической плоскости) 155, 156
 —, деление на равные части 391
 —, длина 310, 360—361
 —, длина дуги 311
 —, измерение дуг окружности 259
 —, отношение окружности к диаметру 94
 —, уравнение 341
 —, условия пересечения окружностей (в гиперболической плоскости) 275
Октаэдр (в гиперболическом пространстве) 439
Опорный угол 166
Определение аксиоматическое 80
Определения (у Аристотеля) 22, 26
 — (у Евклида) 40, стереометрические 87
 — (у Лежандра) 109
 — (по Проклу) 99
Ориентированная параллель 165
 — полупрямая 165
 — прямая 165
Орисфера 424

- Орицикл 247, 255, см. также Предельная линия
- Орициклические координаты 365, 366
- Орициклическое смещение плоскости 268
- Орициркуль 399
- Ортогональность траектории и пучка лучей 243
- Основание предельной дуги 253
- Основания геометрии 15
- двупрямоугольника 194
- равнобокого четырехугольника 193
- трипрямоугольника 196
- Основная дуга предельной линии 262
- Острый угол трипрямоугольника, его вычисление 305
- Ось поверхности уровня 419
- правильного многогранника 440
- предельной линии 248
- симметрии двух параллельных линий 192
- Отношение 77, 78, 80
- Отрезки данного класса, порядка 377
- дополнительные 213, 375
- несоизмеримые 74
- прямолинейные, их измерение 259
- связанные 375
- Отрезок, деление отрезка пополам (у Евклида) 54
- , его линейное и угловое задания 179
- , его перенесение (по Евклиду) 47
- , — (по Гильберту) 48
- , его трисекция 389
- параллельности 176
- , его построение 208, 226
- Парабола (у Аполлония) 97
- Параллельность (у Евклида) 57—59
- Параллелизм внутренних, внешний 278
- , взаимность 168
- , смещение точки параллелизма 167
- , транзитивность 170, 171, 409
- Параллелограмм гиперболический 196
- Параллель гиперболическая 162, 166
- , ее особенности 167
- ориентированная 165
- , конус параллелей 410—411
- Параллельная линия (в плоскости Лобачевского), определение 158, 163, 164
- , ее построение 208
- Параллельности отрезок 176
- , его построение 208, 226
- угол 172
- , его построение 208
- Параллельность прямой и плоскости 409, 410
- прямых, достаточные условия (у Евклида) 56
- в гиперболической плоскости, заданных своими уравнениями 336
- Параллельные линии, евклидова теория 59
- , другие определения 126
- в гиперболическом пространстве 407
- , постулат о параллельных линиях см. Пятый постулат Евклида
- Параллельные плоскости 413
- предельные линии 255
- Параметр эквидистантной поверхности 419
- эквидистанты 245
- Папа аксиома (основная) 72, 121, 123, 158, 227, 229
- предложение для вырожденных треугольников 187—188
- Pentagramma mirificum 224
- Первое основное метрическое соотношение в гиперболической плоскости 281
- Перенесение отрезка (по Евклиду) 47
- (по Гильберту) 48
- Перенос плоскости вдоль прямой 268
- Переносное движение 454
- Перпендикуляр, построение (у Евклида) 54
- общий (двух расходящихся прямых), существование 187
- , его построение 234, 237
- , его уравнение 338
- к двум плоскостям 414
- Перпендикуляры к сторонам угла, взаимное расположение 214
- серединные (треугольника) 73, 201
- Перпендикулярность двух прямых, заданных своими уравнениями 337
- Пересечение двух прямых, заданных своими уравнениями 336
- окружностей в гиперболической плоскости 275
- «Пи», функция $P(x)$, определение 173
- , —, аналитическое выражение 294
- , —, монотонность 174
- , —, обращение 175
- , —, обобщение 210
- , —, пределы изменения 177
- Пирамида объем (у Лобачевского) 467
- Пифагора теорема 17, 19, 60
- Платона сочинения:
- «Апологии Сократа» 20
- «Государство» 20, 21
- «Законы» 21
- «Тимей» 20
- Платоновы тела 30
- Плоскости пересекающиеся, параллельные, расходящиеся 412—414
- Плоскость, определение (у Евклида) 40
- , — (у Лежандра) 110
- , — (у Лейбница) 103
- базисная эквидистантной поверхности 416, 419
- гиперболическая см. Гиперболическая плоскость
- , смещения плоскости в самой себе 268
- , ее уравнение 450
- Площади (у Евклида) 83
- , их вычисление (в гиперболической плоскости) 368
- Площади, их измерение (основная теорема) 319
- равновеликие 316
- Площадь круга 374
- многоугольника 324
- прямолинейной фигуры 316
- сегмента предельной линии 372

- Площадь поверхности сферы 458, 459
 — треугольника 321, 323
 — — вырожденного 322
 — трипрямоугольника 371
 — фигуры на поверхности 455
 — — — вращения 459
 — — на эквидистантной поверхности 457
 — четырехугольника Саккери 369, 372
 —, элемент площади в гиперболической плоскости 368
 —, — — в полярных координатах 373
 Плэйфера-Прокла постулат 115
 Поверхности, см. название поверхности
 «Поверхности как геометрические места» Евклида 35
 Поверхность уровня связки 418
 Подобие (у Евклида) 81
 —, связь с пятым постулатом Евклида 124
 Полная связка прямых 415
 — система движений 357
 — — уравнений прямоугольного треугольника 212, 287, 288
 Полоса между параллельными линиями (их конгруэнтность) 185
 Полярные координаты (на гиперболической плоскости) 328
 Поперечное разбиение треугольника 325
 Поризм 39
 Порядок выражения (у Д. Д. Мордухай-Болтовского) 377
 Постоянная гиперболической плоскости и гиперболического пространства 280, 284, 437, 439
 — эквидистантной поверхности (гиперболическая) 433
 Постоянной кривизны кривые 240, 244, 257
 — — — нормальные 257
 — — —, их длина 310
 — — —, их уравнения 341, 344
 Построения геометрические в гиперболической плоскости 208, 273, 375, см. также название соответствующей фигуры
 Постулат (у Аристотеля) 26
 Постулат пятый см. Пятый постулат Евклида
 Постулаты Евклида 43, 44
 — — (у Прокла) 100
 — — абсолютной стереометрии 404—405
 Правильные многогранники (у Евклида) 37, 87, 89
 — — в гиперболическом пространстве 439
 — — многоугольники (у Евклида) 72
 — — в гиперболической плоскости 392
 Предельная дуга, ее высота 253
 — —, ее деление на равные части 390
 — —, ее длина 283
 — —, ее измерение 264
 — —, ее основание 253
 — —, ее тангенциальное и нормальное продолжения 226
 — —, соотношения, связывающие хорду, основание и высоту предельной дуги 302
 — круга 255, см. Предельная линия
 Предельная линия 247
 — —, ее ось 248
 — —, ее площадь (сегмента) 372
 — —, ее свойства 248
 — —, ее элементы 252
 — поверхность 422
 — —, ее внутренняя геометрия 434
 — —, ее начало 422
 — —, ее ось 422
 — —, ее уравнение 342
 — сфера 424, см. Предельная поверхность
 Предельные линии, их конгруэнтность, скольжение по себе 254
 — — параллельные 255
 — поверхности, их конгруэнтность 425
 Преобразование Либмана 269
 — —, его конформность 365
 Принцип однородности 130, 133, 141, 142
 Приоритет Лобачевского 468, 472, 474
 Прокла-Плэйфера постулат 115
 Промежуточное пространство 411
 Пропорция, теория пропорций (у Евклида) 73
 Пропорциональные величины 78
 Пропорциональность в гиперболической плоскости 380
 Протяжение дуги предельной линии (тангенциальное, нормальное) 262—263, 281
 Пространство, гиперболическая геометрия в пространстве 404
 — гиперболическое, аналитическая геометрия 447
 — —, дифференциальная геометрия 451
 — —, постоянная гиперболического пространства 437
 — —, тригонометрия 442
 — Лобачевского, см. Гиперболическое пространство
 — промежуточное 411
 Прямая, определение (у Евклида) 40, 41
 — — (у Лейбница) 103
 — — (у Лежандра) 110
 — заградительная см. Заградительная прямая
 — средняя (полосы) 170
 —, уравнение прямой в гиперболической плоскости 332, 333
 Прямой угол (доказательство существования, без непрерывности) 228
 Прямолинейные отрезки, их измерение 259
 Прямолинейный треугольник, его тригонометрия 284
 — — косоугольный, общие тригонометрические его уравнения 289
 Прямоугольник, преобразование его в равновеликий квадрат (у Евклида) 67
 Прямоугольный тетраэдр 467
 Прямоугольные треугольники, имеющие общий угол 312
 — —, — общую гипотенузу 314
 Прямоугольный треугольник, группа прямоугольного треугольника 219
 — —, дифференциальные соотношения в нем 348

- Прямоугольный треугольник, латентные уравнения 212
 —, явные уравнения 284—297, 443—444
 —, полная система уравнений 282, 287, 288
 —, построения его по различным заданиям 230
 Прямые, взаимное расположение прямых гиперболической плоскости (пересечение, расхождение, параллелизм) 179, 182, 184, 186, 339
 Прямые, пучок прямых (сходящихся, параллельных, расходящихся) см. Пучок прямых
 Прямые, связанные между собою (в пространстве) 407
 Пучок прямых 205, 240
 — — полный 240
 — — сходящихся, параллельных, расходящихся 240
 — —, соответственные точки на лучах пучка 241
 — —, его траектория 243
 Пятиугольник с пятью прямыми углами 225
 Пятый постулат Евклида, формулировка 43, 58
 — — —, общие соображения 91, 112
 — — —, постулаты, эквивалентные пятому постулату 114
 — — —, ошибочные доказательства 116:
 Прокла 116, Туси (Насир-эддина) 118, Лежандра 130, 131—132, 134, 136, 141, Валлиса 123, Бертрана 128, Картона 143—144, 274, Саккери 145
 — — —, связь с суммой углов треугольника 123, 131
 — — — на предельной поверхности 435
 Равенство треугольников см. Треугольников равно
 Равнобедренные трипрямоугольники 306
 Равнобоочные четырехугольники 193
 Равновеликие многоугольники 316
 — фигуры (у Евклида) 60
 Равновеликость треугольников с одинаковым угловым дефектом 319
 Равнократные значения 75
 Радиан 261
 — гиперболический 311
 Расположение точек на прямой 61, 91
 Расположение прямых см. Прямые
 Расстояние между расходящимися прямыми 187
 — — двумя точками (на гиперболической плоскости) 329, 330, 333
 — — — (в гиперболическом пространстве) 448
 — нормальное параллельных предельных линий 256
 — точки от предельной линии 262
 — тангенциальное точки от предельной линии 262
 Расхождение внутреннее, внешнее (двух прямых относительно третьей) 278
 Расходящиеся прямые 164
 — плоскости 414
 Расхождение прямой и плоскости 411
 — прямых, аналитическое условие 336
 Рациональное выражение, его построение в гиперболической плоскости 380, 383
 Риманово выражение элемента длины 366
 Ромб гиперболический 196
 Саккери четырехугольник 149, 161, 193, 194, 348
 — —, его площадь 369
 — —, тригонометрические соотношения 307
 Свободное движение на поверхности 424, 426
 Связанные отрезки 375
 — прямые 407
 Связка прямых 415
 — — полная 415
 — —, ее поверхность уровня 418
 Секущая равного наклона 170, 192, 240
 Середина отрезка, доказательство ее существования (без непрерывности) 229
 Серединные перпендикуляры треугольника 73, 201
 Симметрии постулат 427
 Синусов теорема 290
 Сложения теорема 300
 Смещения плоскости в самой себе, их классификация 268
 Собственно евклидова геометрия 59, 62, 91, 111
 Соизмеримые величины (у Евклида) 86
 Сонаправленные прямые 165
 Соответственные дуги двух параллельных предельных линий 256, их отношение 279
 — — параллельных эквидистант 261
 — точки на прямых пучка 241
 — — — связи 416
 — хорды двух параллельных предельных линий 256
 Средняя прямая 170
 Стереометрические книги «Начал» Евклида 87
 — предложения абсолютной геометрии 404
 Сумма углов многоугольника 160
 — — треугольника, связь с пятым постулатом 123, 131
 — — —, опытная проверка Лобачевского 177
 — — — на предельной поверхности 436
 — — — на эквидистантной поверхности 432
 Сходящиеся прямые 164
 Схолии 30
 Сфера, ее внутренняя геометрия 428

- Сфера, площадь ее поверхности 458, 459
 — как поверхность уровня сходящейся связи 419
 — мнимая 150
 — прельная 424, см. также Прельная поверхность
 Сферическая геометрия 428
 — тригонометрия 356, 446
 Сферический слой, его объем 465
- Тангенциальное протяжение предельной дуги 262
 — расстояние точки от предельной линии 262
 Тело, определение (у Евклида) 87
 Тетраэдр в гиперболическом пространстве 439
 Тождества геометрические (у Евклида) 63, 66, 68
 Точка бесконечно удаленная 127, 204
 — идеальная 205
 — пересечения двух прямых, заданных своими уравнениями 336
 Точки замечательные (треугольника) 199
 — соответственные 241, 416
 Траектория пучка 243
 Транзитивность параллелизма 170, 171, 409
 Трансверсальное разбиение треугольника 325
 Треугольник бесконечно малый 345
 — вписанный в окружность, описанный около окружности 72
 — вырожденный 187, 190
 — прямоугольный см. Прямоугольный треугольник
 —, его площадь 321, 323
 —, его угловой дефект 139, 160, 319
 —, задание острыми углами 298
 —, построение по трем сторонам (у Евклида) 55
 —, построение по трем углам 395
 Треугольников равенство, первый признак 48
 —, второй признак 52
 —, третий признак 55
 — по трем углам 161
 Тригонометрия абсолютная 351
 — бесконечно малого треугольника 345
 — гиперболическая 356
 — гиперболической плоскости 279, 284, 442
 — прямолинейная (обзор уравнений) 299
 — сферическая 356, 446
 Трипрямоугольник 195
 —, его построение 232
 —, его площадь 370
 —, его сопоставление с треугольником 219
 — равнобедренный 306
 —, тригонометрические соотношения 303—306
 —, уравнения 217
- Трисекция отрезка 389
 — угла 389
 Туси-Лежандра постулат 116, 123, 131, 157
- Угловой дефект многоугольника 161
 — — треугольника 139, 160, 319
 Угловое задание отрезка 179
 — — сторон треугольника 284
 Углы, сумма углов треугольника см. Сумма
 Угол, гипотеза острого, тупого, прямого угла 146, 147, 148
 —, линейное задание угла 210, 291
 —, сопоставление значений угла в линейной и угловой мере 291
 —, трисекция угла 389
 — между двумя прямыми, заданными своими уравнениями 336, 451
 — опорный 166
 — параллельности см. Параллельности угол, «Пи»
 Удвоение куба 98
 Умножение аргумента, формулы 302
 Уравнение линии см. название соотв. линии
 — квадратное, его геометрическое решение (у Евклида) 66
 Уровня поверхность 418
- «Фихрист» 101
 Форма метрическая гиперболического пространства 358
- Целые гиперболические выражения 379
 Центр круга, нахождение (у Евклида) 69
 — пучка прямых 240
 — связи прямых 416
 Цикл Лобачевского 220
 Циркуль 47, см. также Построения геометрические
- Чевы теорема 315
 — —, ее аналог 315
 Четырехугольник в гиперболической плоскости 193
 — Ламберта 149, 161, 196
 — равнобокий 193
 — с двумя прямыми углами 308, см. также Двупрямоугольник
 — Саккери 149, 161, 193, 194, 348
 —, его тригонометрия 303
- Шара объем 465
 Шатуновского теорема 325
 Шура теорема 206
- Эйлера теорема 439
 Эквилистанта 148, 244, 245
 —, ее длина дуги 246, 311
 —, ее параметр 245
 —, площадь, ею ограниченная 371
 —, ее уравнение 344
 — как геометрическое место вершин равновеликих треугольников 317, 318

- Эквидистанта геодезическая эквидистантной поверхности 421, 428, 429, 431—432
 Эквидистантная поверхность 419
 — —, ее внутренняя геометрия 428—432
 — —, ее гиперболическая постоянная 433
 — —, ее сечения 420
 — —, площадь фигуры на ней 457
 Элемент длины в декартовых координатах 358, 359
 — — в полярных координатах 366
 — — в бильтрамиевых координатах 362
 Элемент длины в гиперболическом пространстве 451
 — — на либмановой карте 364
 — —, конформно-евклидово выражение его 366
 — — риманово выражение его 366
 — площади 368, 373
 — площади на поверхности вращения 459
 — объема 463
 Эллипс (у Аполлония) 97
 «Энциклопедия», энциклопедисты 104
 «Эратосфеново речето» 98
-